

## CAPÍTULO IV - PROCESSOS ALEATÓRIOS

- **Definição, caracterização e classificação.**
- **Média e autocorrelação.**
- **Exemplos de processos aleatórios.**
- Processos de Markov e de incrementos independentes.
- Processos gaussianos.
- Estacionariedade e ergodicidade
- Processos complexos.
- Propriedades da correlação para processos estacionários (tempo contínuo e discreto);

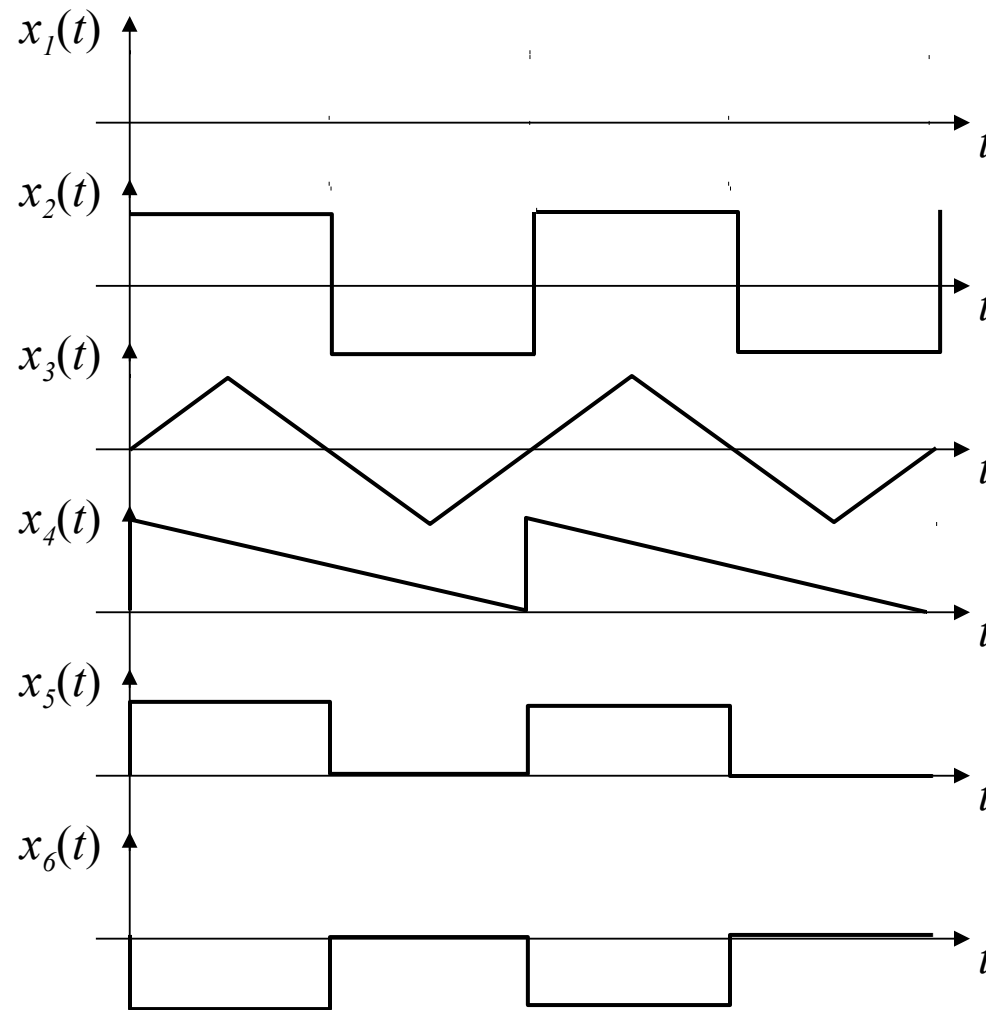
# Processos Aleatórios

- Dado um experimento, especificado por seus resultados que compõem o espaço  $S$ , por certos subconjuntos de  $S$  denominados eventos, e pelas probabilidades desses eventos, vamos associar, a cada resultado  $\xi$ , e de acordo com uma certa regra, uma função do tempo,  $\mathbf{x}(t, \xi)$ , real ou complexa.
- Criamos, então, uma família de funções, uma para cada valor  $\xi$ .
- Essa família é denominada processo estocástico ou processo aleatório.
- Note-se que:
  - para um resultado específico,  $\xi_i$ ,  $\mathbf{x}(t, \xi_i)$  é uma simples função do tempo;
  - para um instante de tempo  $t$ , determinado,  $\mathbf{x}(t, \xi)$  é uma variável aleatória;
  - para  $t$  e  $\xi_i$  determinados,  $\mathbf{x}(t, \xi_i)$  é apenas um número.

## Exemplo: gerador de funções

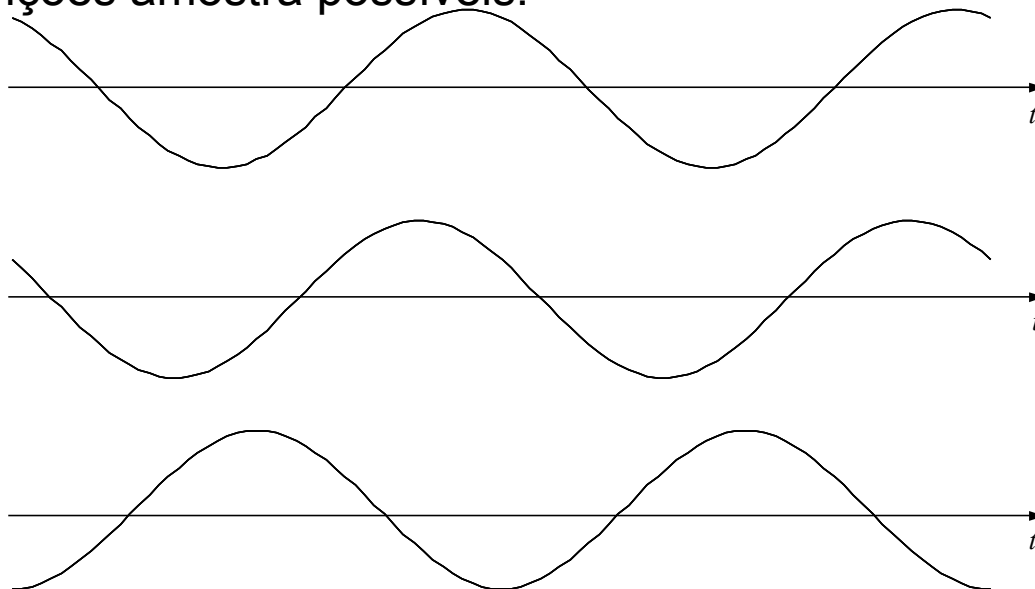
- Uma bancada de laboratório tem um gerador de funções com as seguintes possíveis saídas, todas na mesma frequência,
- 1 - senóide                      2 - onda quadrada                      3 - onda triangular
- 4 - dente de serra                      5 - pulso positivo                      6 - pulso negativo
- Os números nas 6 faces de um dado são associados a essas 6 funções (como numerado).
- O dado é então lançado e o gerador é ligado selecionando-se a função correspondente ao número ocorrido.
- Esse experimento define um processo aleatório  $\mathbf{x}(t, \xi)$  onde  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (os números nas 6 faces do dado) e  $\mathbf{x}(t, \xi)$  são as funções especificadas acima, cada uma com probabilidade  $1/6$ .
- Cada uma das 6 funções do exemplo acima é denominada função amostra.

## Exemplo: gerador de funções



## Exemplo: senoide com fase aleatória

- Seja o processo  $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta})$  definido por
  - $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta}) = A \cos(2 \pi f_0 t + \boldsymbol{\theta})$
- onde  $A$  e  $f_0$  são constantes e  $\boldsymbol{\theta}$  é uma variável aleatória com densidade de probabilidade uniforme entre 0 e  $2\pi$ .
- algumas funções amostra possíveis:



# Processos Aleatórios

- Note que, na maioria das vezes, as funções amostra de um processo são muito complicadas, e uma função amostra específica pode ser muito irregular e indescritível por uma fórmula.
- Além disso, se  $x(t)$  é conhecido para  $t < t_1$  seus valores futuros não podem, em geral, ser preditos (ao contrário dos exemplos mostrados).
- Outros exemplos:
  - Sinal de voz;
  - Sinal de vídeo;
  - Sequência binária randômica;
  - Número de pessoas numa fila do INSS;
  - Etc.

# Definição e caracterização de processos aleatórios

- Seja  $\mathbf{x}(t)$  um processo aleatório real.
- Usaremos a notação  $\mathbf{x}(t)$  para representar um processo, omitindo, em geral, sua dependência com  $\xi$ .
- Para um  $t$  específico,  $\mathbf{x}(t)$  é uma variável aleatória com função de distribuição que, em geral, depende de  $t$ , dada por
  - $F_{\mathbf{x}}(x;t) = P(\mathbf{x}(t) \leq x)$ ,
- ou seja, ela dá a probabilidade de que, no instante  $t$ , as funções amostra de nosso processo não excedam o valor  $x$ .
- A função  $F_{\mathbf{x}}(x;t)$  será chamada de função de distribuição de primeira ordem do processo  $\mathbf{x}(t)$ . A correspondente densidade de probabilidade é obtida diferenciando-se  $F_{\mathbf{x}}(x;t)$  com relação a  $x$ ,

$$f_{\mathbf{x}}(x;t) = \frac{\partial F_{\mathbf{x}}(x;t)}{\partial x}$$

# Definição e caracterização de processos aleatórios

- Dados, agora, dois instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ , considere as variáveis aleatórias  $\mathbf{x}(t_1)$  e  $\mathbf{x}(t_2)$ . Sua distribuição conjunta depende, em geral, de  $t_1$  e  $t_2$  e será dada por

$$F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\left\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2\right\}$$

- e será chamada de função distribuição de probabilidade de segunda ordem do processo  $\mathbf{x}(t)$ . A densidade correspondente será dada por

$$f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

- Note que:

$$F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, \infty; t_1, t_2) = F_{\mathbf{x}_1}(x_1; t_1) \quad \text{e} \quad f_{\mathbf{x}_1}(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

# Definição e caracterização de processos aleatórios

- De maneira análoga, define-se a densidade condicional por

$$f_{\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2}(x_1; t_1 | \mathbf{x}(t_2) = x_2) = \frac{f_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{f_{\mathbf{x}_2}(x_2; t_2)}$$

- Um processo estocástico real  $\mathbf{x}(t)$  está estatisticamente determinado se sua função de distribuição de ordem  $n$ :
  - $F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) \leq x_n\}$
- for conhecida para qualquer  $n$  e para todos os instantes  $t_1, \dots, t_n$ .

# Definição e caracterização de processos aleatórios

- A função densidade de probabilidade de ordem  $n$  do processo  $\mathbf{x}(t)$  é obtida diferenciando-se sua distribuição de ordem  $n$  em relação a todas as variáveis  $x_i$ .
- Um processo bidimensional consiste de dois processos,  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  e estará estatisticamente determinado se for conhecida a distribuição conjunta das variáveis aleatórias  $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n), \mathbf{y}(t'_1), \dots, \mathbf{y}(t'_m)$  para quaisquer  $m$  e  $n$  e todos os instantes  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m$ .
- Dessa forma, um processo complexo  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + j \mathbf{y}(t)$  é uma família de funções complexas, e estará estatisticamente determinado em termos do processo bidimensional  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ .

# Classificação de processos aleatórios

- Os processos aleatórios podem ser classificados em processos de tempo discreto e de tempo contínuo.
- Um processo aleatório de tempo discreto é aquele cujas funções amostra são observadas em instantes discretos de tempo apenas, como numa amostragem.
- Processos dessa classe podem, portanto, ser vistos como uma sequência aleatória, e serão representados por
  - $\mathbf{x}(n)$ ,  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- Já os processos de tempo contínuo assumem valores para qualquer instante de tempo, sendo então representados por  $\mathbf{x}(t)$ .

# Classificação de processos aleatórios

- Uma outra classificação de processos estocásticos é quanto aos valores que suas funções amostra podem assumir.
- Um processo cujas funções amostra assumem apenas valores discretos (por exemplo -1 e 1 como num sinal binário), ou seja, onde  $x(\cdot)$  é uma variável aleatória discreta, é denominado processo discreto ou de amplitude discreta.
- Já um processo que pode assumir valores contínuos num intervalo é denominado processo contínuo, ou de amplitude contínua.

# Média, correlação e covariância

- A média de um processo  $\mathbf{x}(t)$  é o valor esperado da variável aleatória  $\mathbf{x}(t)$ :

$$m_{\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}}(x; t) dx$$

- e é, em geral, função do tempo.
- A autocorrelação,  $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$ , de um processo real é o momento conjunto das variáveis aleatórias  $\mathbf{x}(t_1)$  e  $\mathbf{x}(t_2)$ :

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1) \cdot \mathbf{x}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- e é função de  $t_1$  e  $t_2$ .
- O sufixo  $\mathbf{x}$ , que identifica o processo, pode ser omitido quando for claro a qual processo nos referimos.

# Média, correlação e covariância

- A autocovariância de  $\mathbf{x}(t)$  é a covariância das variáveis aleatórias  $\mathbf{x}(t_1)$  e  $\mathbf{x}(t_2)$ ,

$$C_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E \left\{ \left[ \mathbf{x}(t_1) - m_{\mathbf{x}}(t_1) \right] \left[ \mathbf{x}(t_2) - m_{\mathbf{x}}(t_2) \right] \right\} = R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) - m_{\mathbf{x}}(t_1) m_{\mathbf{x}}(t_2)$$

- Ressalte-se que a variância da variável aleatória  $\mathbf{x}(t)$  é dada por

$$\sigma_{\mathbf{x}(t)}^2 = C_{\mathbf{x}}(t, t) = R_{\mathbf{x}}(t, t) - m_{\mathbf{x}}^2(t)$$

- A correlação cruzada de dois processos é definida por:

$$- R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = E \{ \mathbf{x}(t_1) \cdot \mathbf{y}(t_2) \}$$

- e a covariância cruzada por:

$$- C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) - m_{\mathbf{x}}(t_1) \cdot m_{\mathbf{y}}(t_2)$$

# Média, correlação e covariância

- Para processos de tempo discreto temos, de forma análoga,

$$m_x(n) = E\{\mathbf{x}(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x; n) dx$$

- e

$$R_x(n_1, n_2) = E\{\mathbf{x}(n_1) \cdot \mathbf{x}(n_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x_1 x_2}(x_1, x_2; n_1, n_2) dx_1 dx_2$$

- Já para os processos discretos:

$$m_x(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} = \sum_i x_i P_{x(t)}(x_i) \quad R_x(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1) \cdot \mathbf{x}(t_2)\} = \sum_i \sum_j x_i x_j P_{x(t_1) x(t_2)}(x_i, x_j)$$

$$m_x(n) = E\{\mathbf{x}(n)\} = \sum_i x_i P_{x(n)}(x_i) \quad R_x(n_1, n_2) = E\{\mathbf{x}(n_1) \cdot \mathbf{x}(n_2)\} = \sum_i \sum_j x_i x_j P_{x(n_1) x(n_2)}(x_i, x_j)$$

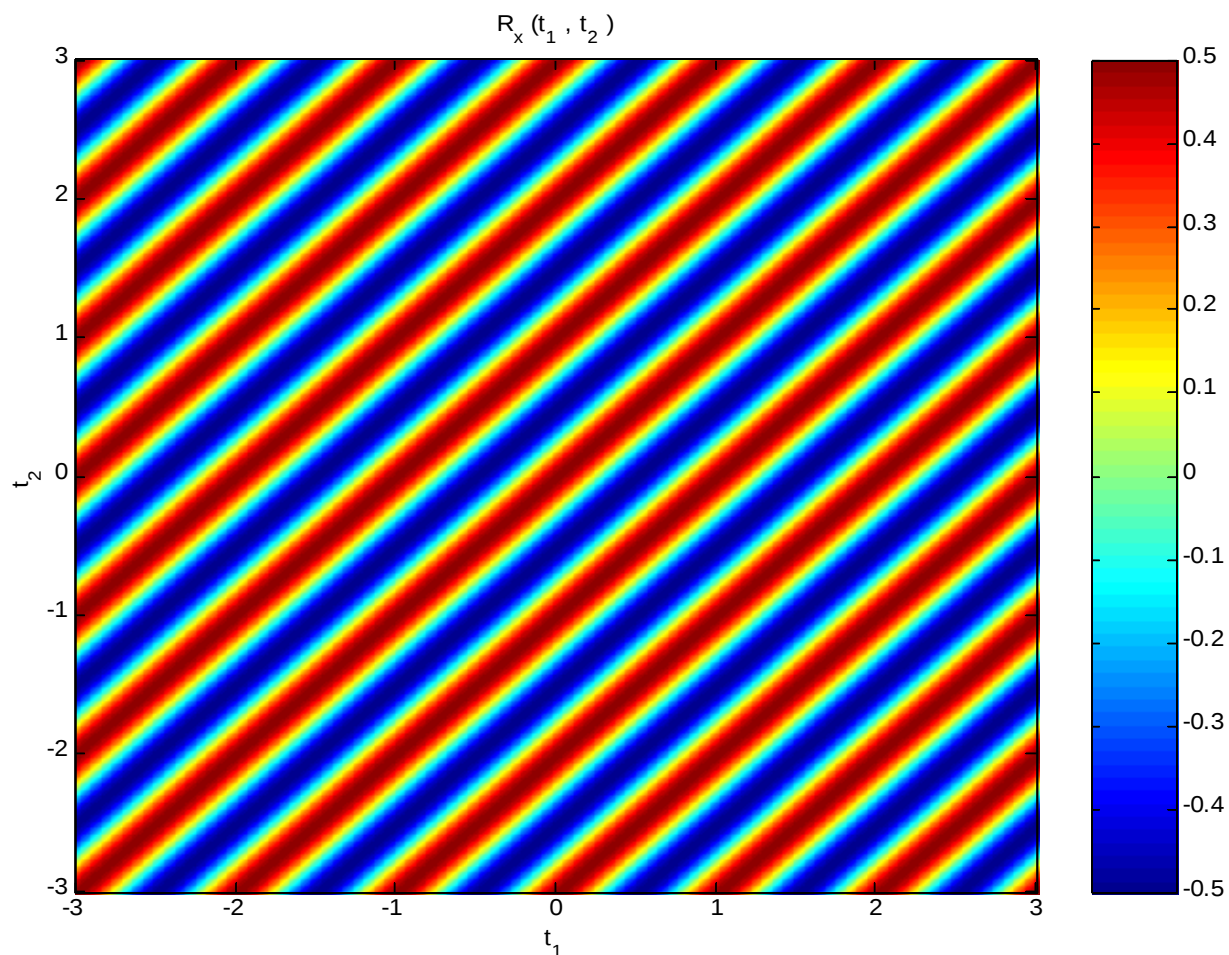
## Exemplo: senoide com fase aleatória

- Para o processo  $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta}) = A \cos(2 \pi f_0 t + \boldsymbol{\theta})$  :

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x(t)}(x; t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2 \pi f_0 t + \theta) f_{\theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} A \cos(2 \pi f_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

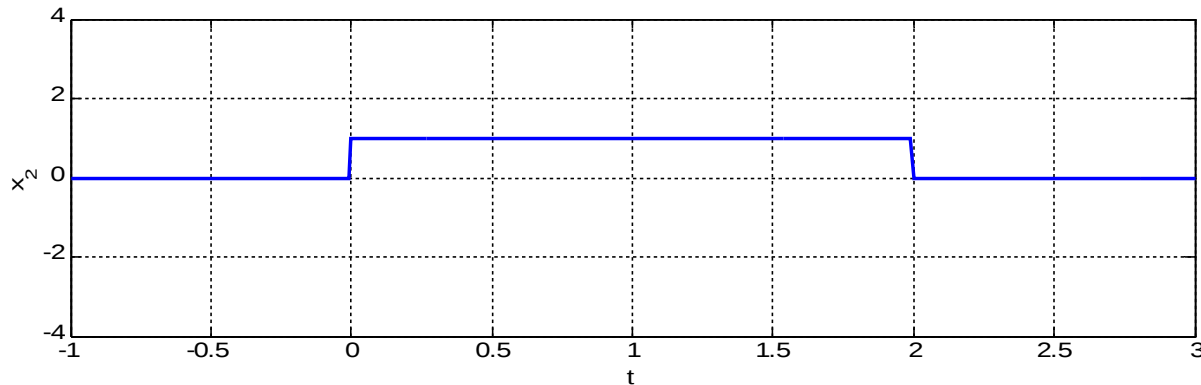
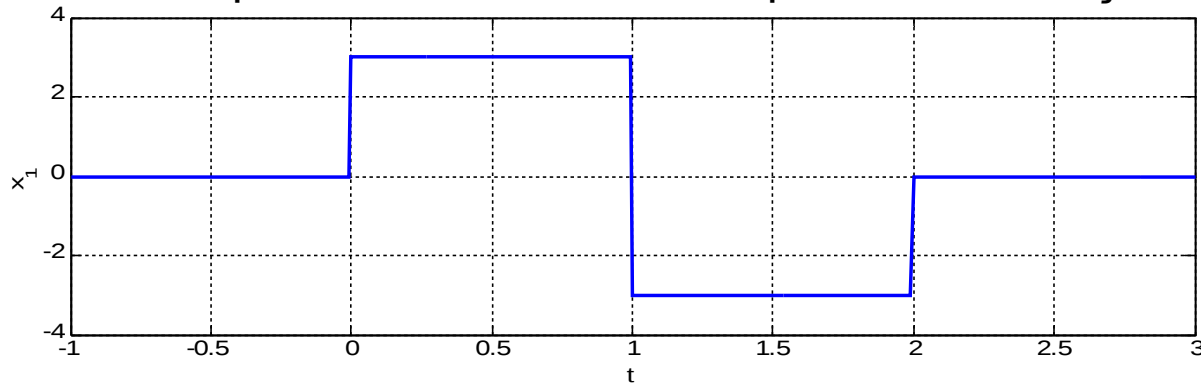
$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2 \pi f_0 t_1 + \theta) A \cos(2 \pi f_0 t_2 + \theta) f_{\theta}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[2 \pi f_0(t_1 - t_2)] + \cos[2 \pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta]}{2} d\theta = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos[2 \pi f_0(t_2 - t_1)] \end{aligned}$$

## Exemplo: senóide com fase aleatória



## Exemplo: processo com duas funções amostra:

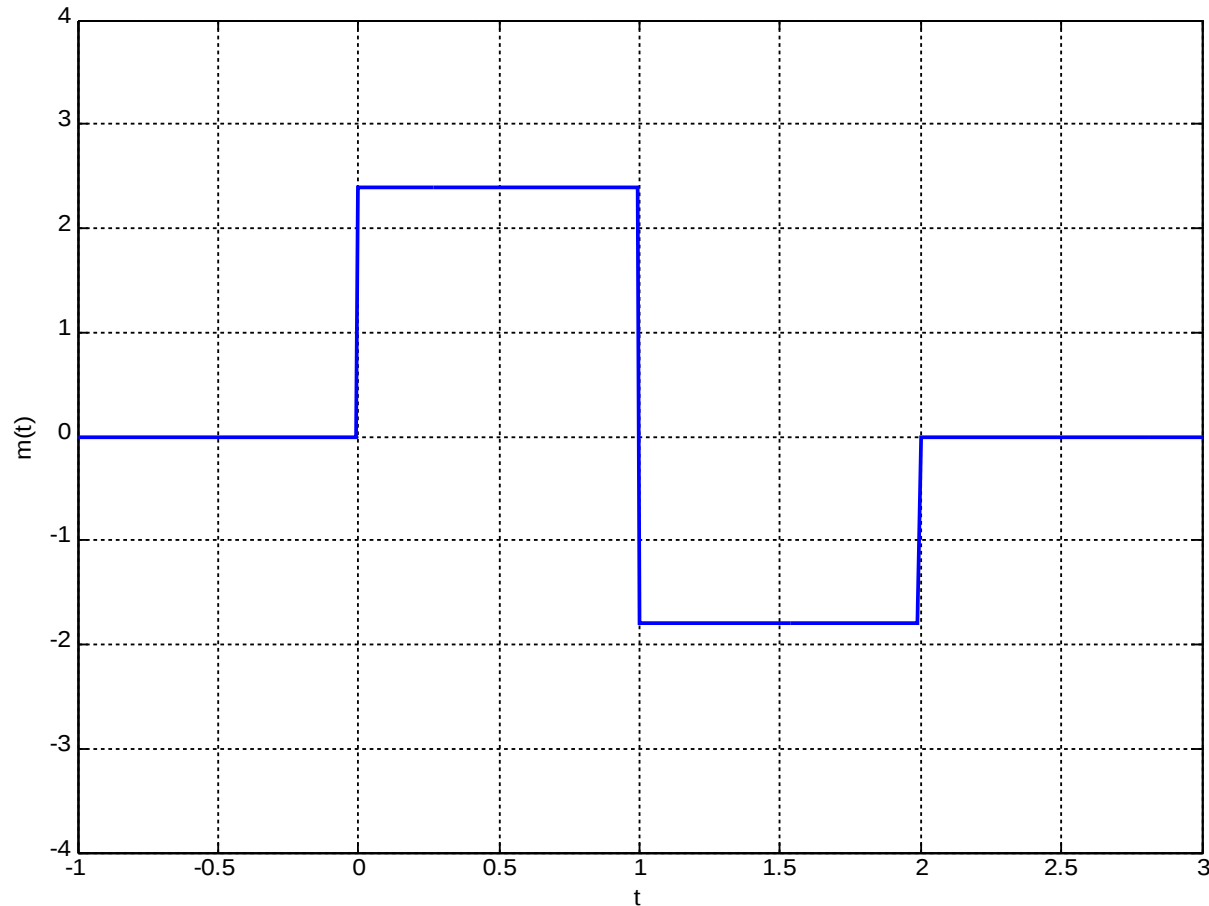
- Considere um processo aleatório com apenas duas funções amostra:



- Que ocorrem com probabilidades 0,7 e 0,3 respectivamente

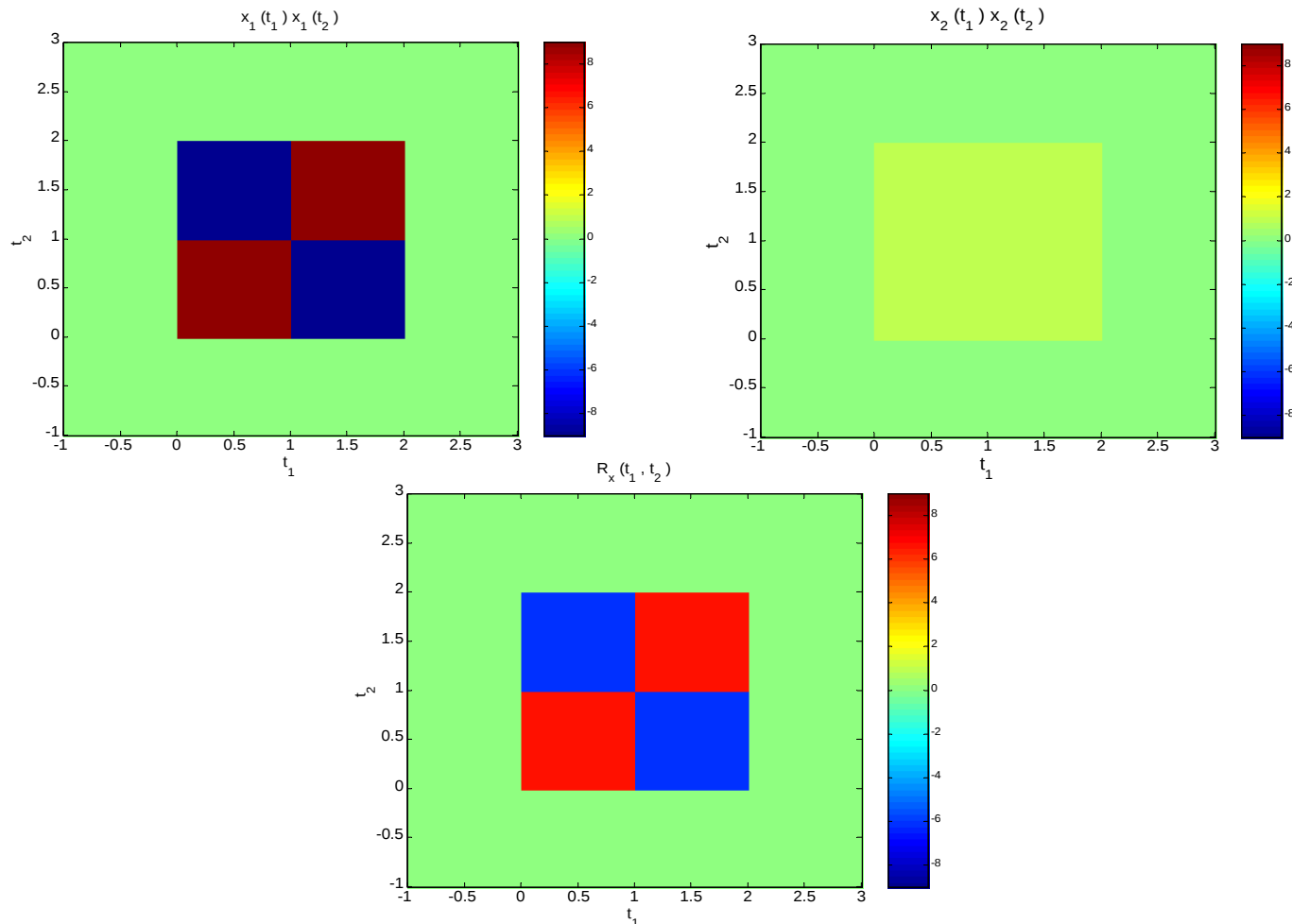
## Exemplo: processo com duas funções amostra

- Média:  $m(t) = 0,7 x_1(t) + 0,3 x_2(t)$



# Exemplo: processo com duas funções amostra

- Autocorrelação:  $R(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2)\} = 0,7 x_1(t_1) x_1(t_2) + 0,3 x_2(t_1) x_2(t_2)$



# Processos não correlacionados e independentes

- Dois processos,  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , são ditos não correlacionados se, para quaisquer  $t_1$  e  $t_2$ , tem-se

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = m_{\mathbf{x}}(t_1) \cdot m_{\mathbf{y}}(t_2),$$

ou seja,

$$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0.$$

- Eles são ditos ortogonais se

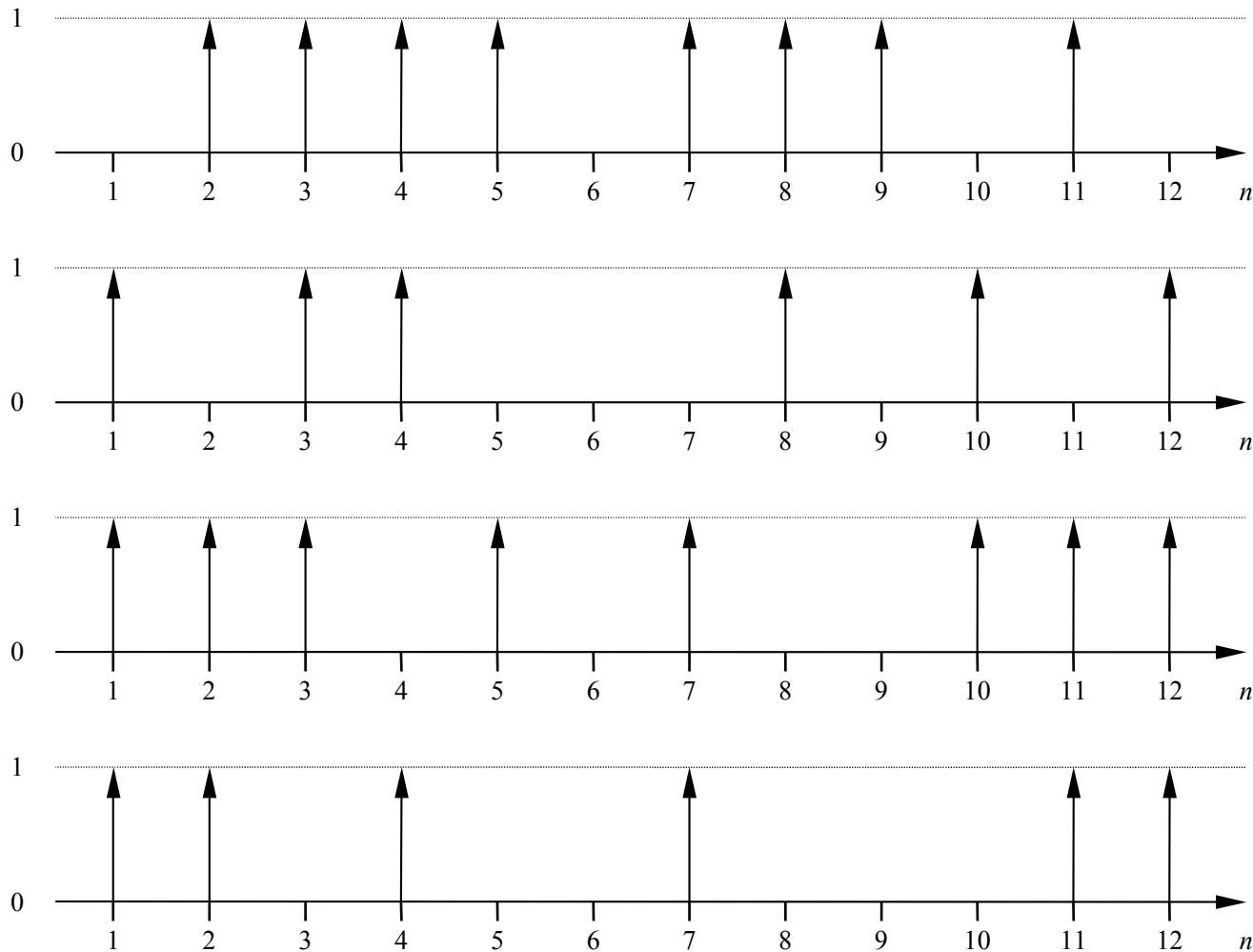
$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0,$$

- e são independentes se o grupo  $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$  for independente do grupo  $\mathbf{y}(t'_1), \dots, \mathbf{y}(t'_m)$  para quaisquer  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m$ .

## Processo de Bernoulli

- Seja o processo de tempo discreto  $\mathbf{x}(n)$ , assumindo apenas os valores 0 e 1.
- Seja  $p$  a probabilidade de  $\mathbf{x}(n)=1$
- Sejam as variáveis aleatórias  $\mathbf{x}(n)$  e  $\mathbf{x}(m)$  independentes para quaisquer  $m \neq n$  (como numa sequência de jogos de *cara* ou *coroa*, sendo  $p$  a probabilidade de a moeda cair com a *cara* - valor 1 - para cima).
- Esse processo é denominado processo de Bernoulli.

# Processo de Bernoulli



# Processo de Bernoulli

- Para esse processo temos,

$$m_x(n) = E\{\mathbf{x}(n)\} = 1 \times P\{\mathbf{x}(n)=1\} + 0 \times P\{\mathbf{x}(n)=0\} = p;$$

$$R_x(n_1, n_2) = E\{\mathbf{x}(n_1)\mathbf{x}(n_2)\} = \begin{cases} E\{\mathbf{x}^2(n_1)\} = 1^2 p + 0^2(1-p) = p & n_1 - n_2 = 0 \\ E\{\mathbf{x}(n_1)\} E\{\mathbf{x}(n_2)\} = p^2 & n_1 - n_2 \neq 0 \end{cases}$$

e

$$C_x(n_1, n_2) = R_x(n_1, n_2) - m_x(n_1)m_x(n_2) = \begin{cases} p(1-p) & n_1 - n_2 = 0 \\ 0 & n_1 - n_2 \neq 0 \end{cases}$$

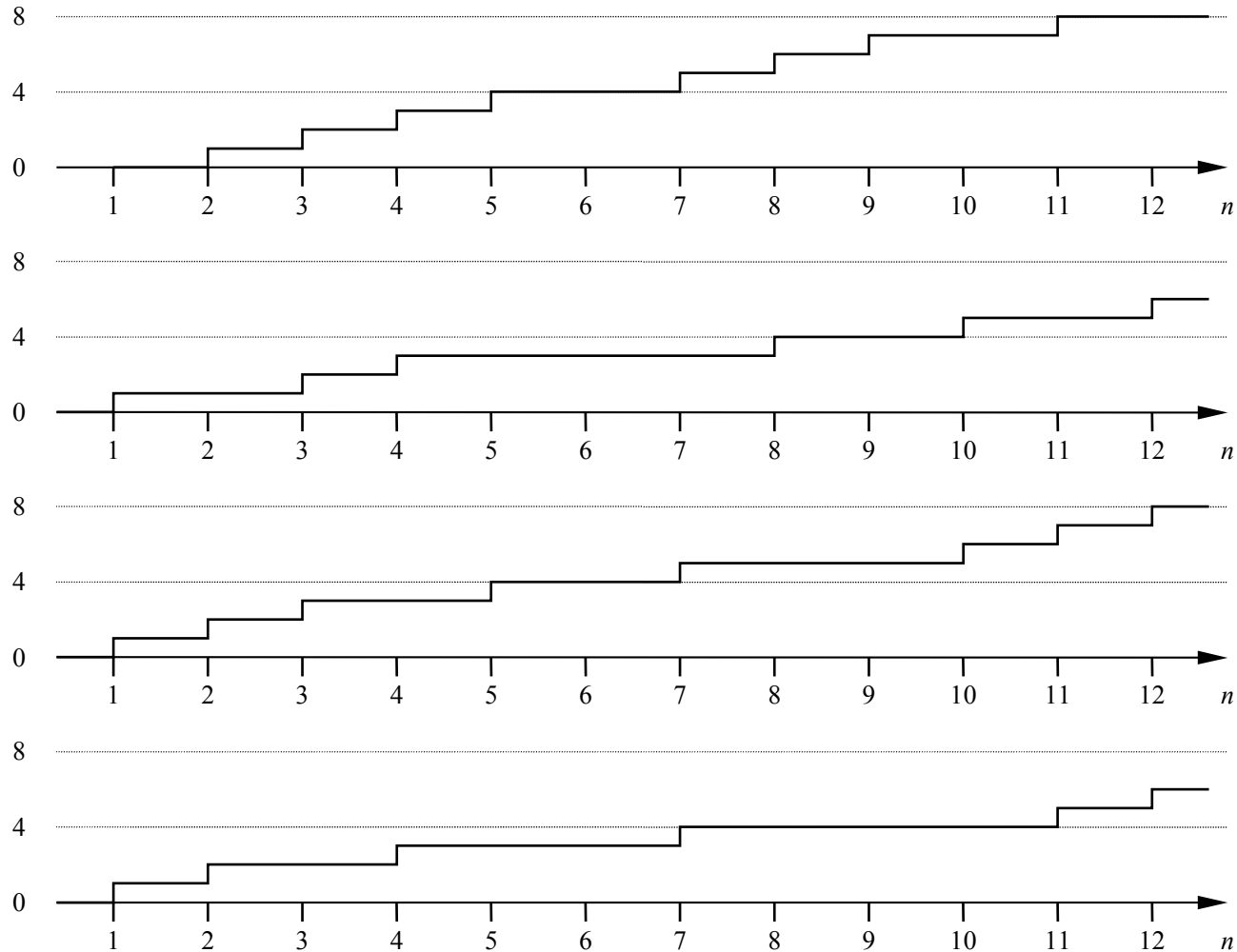
- Essa função mostra que os valores do processo em dois instantes distintos são não correlacionados.

# Processo de contagem binomial

- Seja o processo de contagem do número de ocorrências de 1's no processo anterior (contar quantas *caras* ocorreram até a  $n$ -ésima jogada).
- Esse processo é denominado de contagem binomial e pode ser representado por

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}(i)$$

# Processo de contagem binomial



# Processo de contagem binomial

- Para esse processo temos

$$m_y(n) = E\{y(n)\} = \sum_{i=1}^n E\{x(i)\} = n p$$

$$\begin{aligned} R_y(n_1, n_2) &= E\{y(n_1) y(n_2)\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n_1} x(i) \sum_{j=1}^{n_2} x(j)\right\} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E\{x(i) x(j)\} = \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} E\{x^2(i)\} + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_2} E\{x(i)\} E\{x(j)\} = n_1 p + n_1(n_2 - 1) p^2 & n_1 \leq n_2 \\ \sum_{j=1}^{n_2} E\{x^2(j)\} + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_1} E\{x(i)\} E\{x(j)\} = n_2 p + n_2(n_1 - 1) p^2 & n_1 > n_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$C_y(n_1, n_2) = R_y(n_1, n_2) - m_y(n_1) m_y(n_2) = \begin{cases} n_1 p - n_1 p^2 & n_1 \leq n_2 \\ n_2 p - n_2 p^2 & n_1 > n_2 \end{cases} = p(1 - p) \min(n_1, n_2)$$

# Processo de contagem binomial

- E também:

$$P\{y(n)=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Note que:

$$r_{n_1, n_2} = \frac{C_y(n_1, n_2)}{\sqrt{C_y(n_1, n_1) C_y(n_2, n_2)}} = \frac{p(1-p) \min(n_1, n_2)}{p(1-p) \sqrt{n_1 n_2}} = \frac{\min(n_1, n_2)}{\sqrt{n_1 n_2}}$$

$$\lim_{\substack{n_2 \rightarrow \infty \\ n_1 \text{ finito}}} r_{n_1, n_2} = \lim_{\substack{n_2 \rightarrow \infty \\ n_1 \text{ finito}}} \frac{n_1}{\sqrt{n_1 n_2}} = \lim_{\substack{n_2 \rightarrow \infty \\ n_1 \text{ finito}}} \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} = 0$$

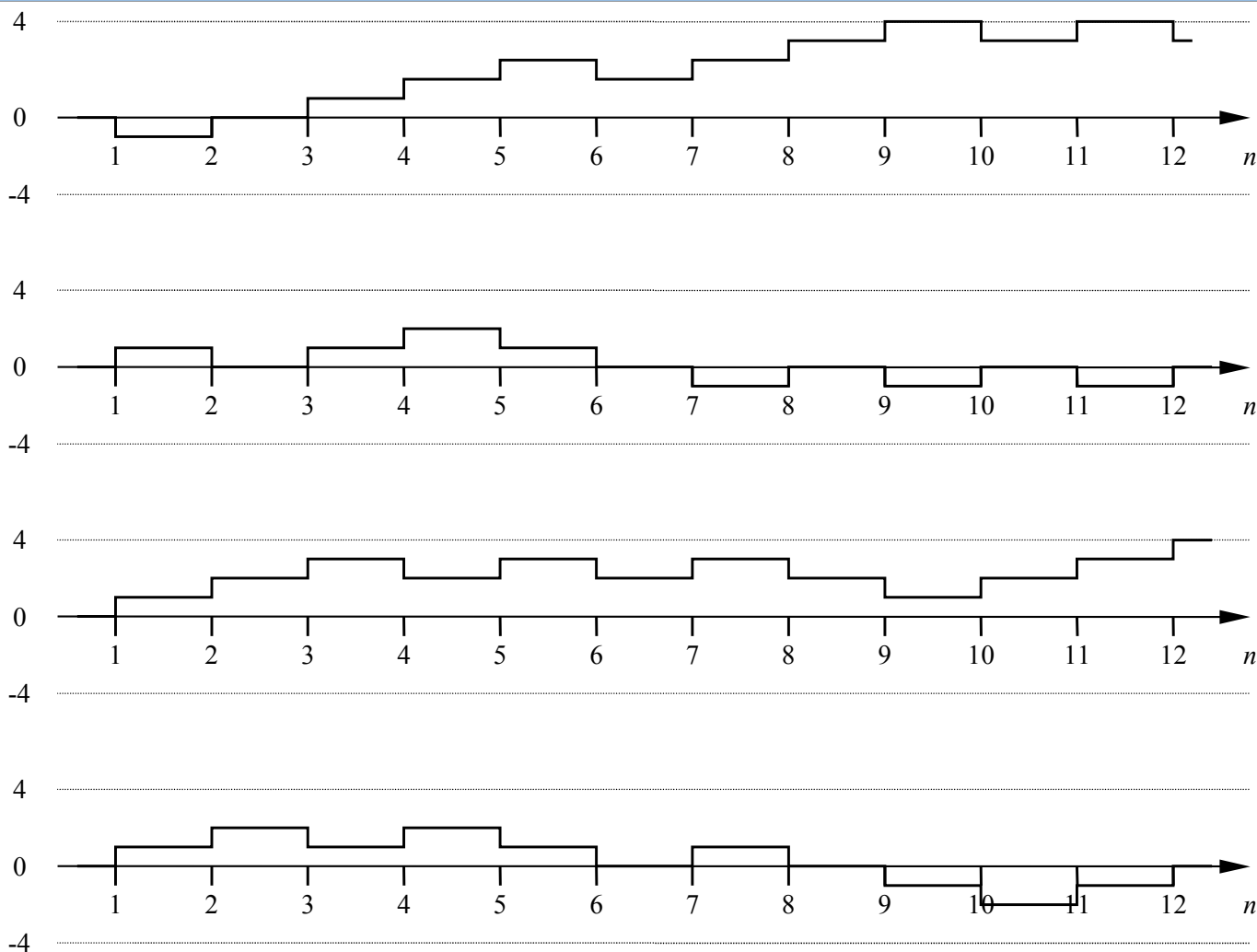
# Processo Caminho Randômico

- Seja o processo de tempo discreto  $z(n)$ , assumindo apenas os valores -1 e 1.
- Seja  $p$  a probabilidade de  $z(n)=1$ ,
- E considere as variáveis aleatórias  $z(n)$  e  $z(m)$  independentes para quaisquer  $m \neq n$  (como numa sequência de jogos de *cara* ou *coroa*, sendo  $p$  a probabilidade de a moeda cair com a *cara* - valor 1 - para cima).
- Claramente,  $z(n) = 2 x(n) - 1$ .
- Vamos definir então, a partir desse processo, um outro processo que será a soma acumulada de  $z(n)$ :

$$w(n) = \sum_{i=1}^n z(i)$$

- Esse processo é denominado caminho randômico unidimensional.

# Processo Caminho Randômico



# Processo Caminho Randômico

- Notando que  $\mathbf{w}(n) = 2 \mathbf{y}(n) - n$ , temos que,

$$m_{\mathbf{w}}(n) = 2m_{\mathbf{y}}(n) - n = 2np - n = n(2p - 1)$$

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{w}}(n_1, n_2) &= E\{\mathbf{w}(n_1)\mathbf{w}(n_2)\} = E\{4\mathbf{y}(n_1)\mathbf{y}(n_2) - 2(n_1\mathbf{y}(n_2) + n_2\mathbf{y}(n_1)) + n_1n_2\} = \\ &= 4R_{\mathbf{y}}(n_1, n_2) - 2[n_1m_{\mathbf{y}}(n_2) + n_2m_{\mathbf{y}}(n_1)] + n_1n_2 \end{aligned}$$

- portanto,

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{w}}(n_1, n_2) &= R_{\mathbf{w}}(n_1, n_2) - m_{\mathbf{w}}(n_1)m_{\mathbf{w}}(n_2) = \\ &= R_{\mathbf{w}}(n_1, n_2) - 4m_{\mathbf{y}}(n_1)m_{\mathbf{y}}(n_2) + 2[n_1m_{\mathbf{y}}(n_2) + n_2m_{\mathbf{y}}(n_1)] - n_1n_2 = 4C_{\mathbf{y}}(n_1, n_2) = \\ &= 4p(1 - p) \min(n_1, n_2) \end{aligned}$$

- Note que como  $\mathbf{z}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}(n-1)$  são variáveis aleatórias independentes, o processo caminho randômico  $\mathbf{w}(n)$  é dito um processo de incrementos independentes

# Processo de Poisson

- Seja o seguinte experimento: distribui-se  $n$  pontos no intervalo  $(0, T)$ , de forma que os instantes  $t_i$  onde esses pontos se localizarão, são variáveis aleatórias independentes, distribuídas uniformemente nesse intervalo, ou seja,  $P\{t_i \leq t\} = t / T = p$ .
- Dessa forma, a probabilidade de  $k$  desses pontos acharem-se dentro de um certo intervalo de largura  $t$ , contido em  $(0, T)$  é dada por

$$P\{k \text{ pontos no intervalo } t\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Definindo-se  $\lambda = n/T$ , e fazendo-se o limite quando  $T \rightarrow \infty$ , mantendo-se  $\lambda$  constante, temos que  $np = \lambda t$

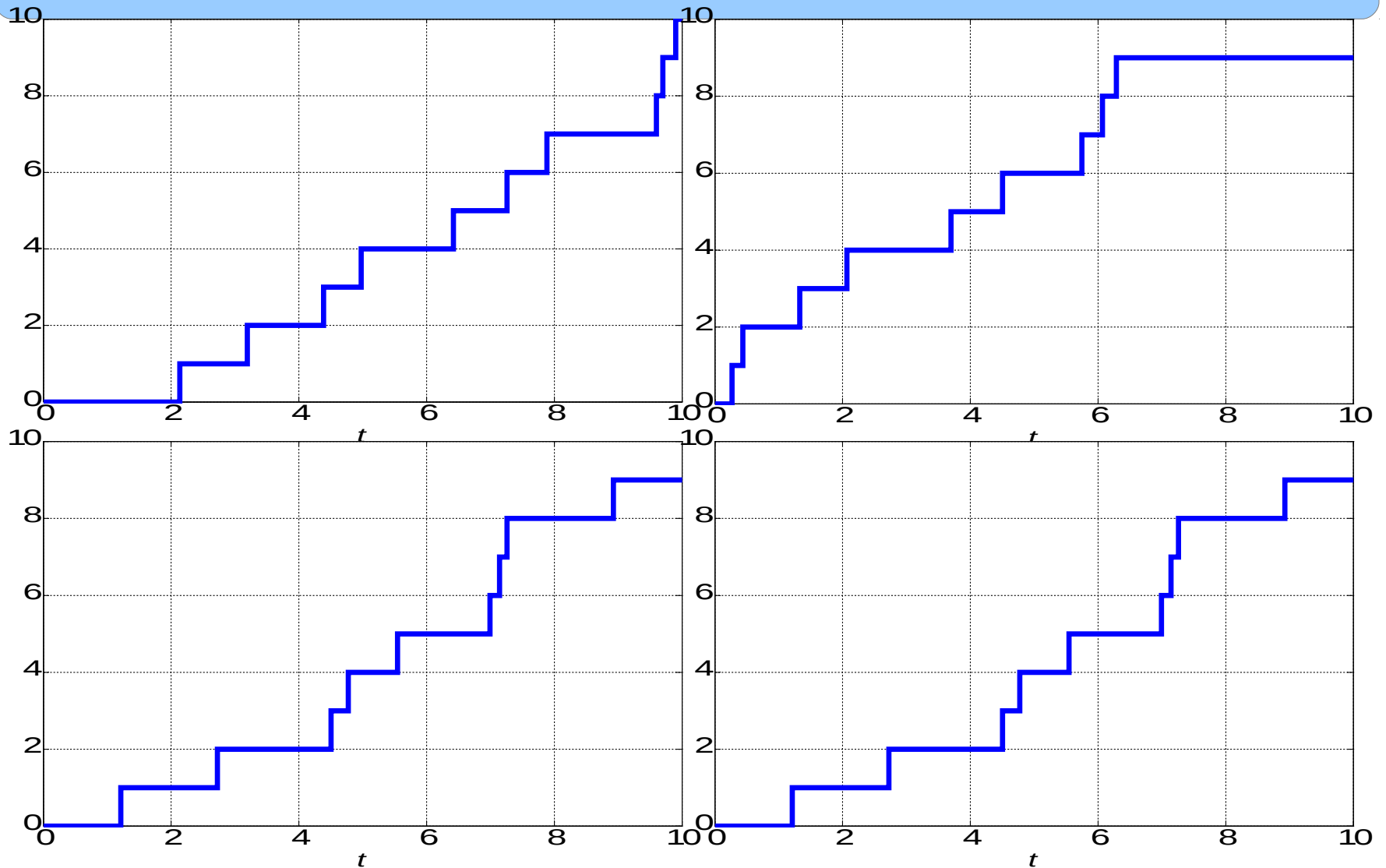
# Processo de Poisson

- Assim:

$$\begin{aligned}
 P\{k \text{ pontos no intervalo } t\} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
 &= \left[ n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) p^k \right] \frac{(1-p)^{n-k}}{k!} \simeq \left[ (np)^k \right] \frac{(1-p)^{n-k}}{k!} = \\
 &= \frac{(np)^k}{k!} e^{(n-k)\ln(1-p)} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-(n-k) \sum_{m=1}^{\infty} p^m / m} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-(np - k p + (n-k)p^2/2 + (n-k)p^3/3 + \dots)} \simeq \\
 &\simeq (np)^k \frac{e^{-np}}{k!} = (\lambda t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!}
 \end{aligned}$$

- que é a distribuição de Poisson.
- Vamos definir, agora, o processo  $x(t)$  da seguinte forma:  $x(0)=0$ ,  $x(t_2) - x(t_1)$  = número de pontos no intervalo  $(t_1, t_2)$  - ou número de clientes que chegaram à fila nesse intervalo. Cada função amostra desse processo tem a forma de uma escada.

# Processo de Poisson



# Processo de Poisson

- Para um dado  $t$ ,  $\mathbf{x}(t)$  é igual ao número de pontos no intervalo  $(0, t)$ , portanto  $\mathbf{x}(t)$  é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda t$ . Assim,

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{\mathbf{x}(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = e^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t$$

- e

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}^2(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{\mathbf{x}(t) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \\ &= e^{-\lambda t} \left\{ (\lambda t)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda t)^{k-2}}{k!} + (\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} \right\} = \\ &= (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

- Portanto:

$$\sigma_{\mathbf{x}(t)}^2 = \lambda t$$

# Processo de Poisson

- Para calcular a função de autocorrelação, podemos escrever, para  $t_1 < t_2$ ,

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_1) + \Delta \mathbf{x}$$

- onde  $\Delta \mathbf{x}$  é também uma variável aleatória, com distribuição de Poisson, independente de  $\mathbf{x}(t_1)$ , com parâmetro  $\lambda(t_2 - t_1)$ .
- Nessas condições,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2)\} = E\{\mathbf{x}(t_1) (\mathbf{x}(t_1) + \Delta \mathbf{x})\} = E\{\mathbf{x}^2(t_1) + \mathbf{x}(t_1) \Delta \mathbf{x}\} = \\ &= E\{\mathbf{x}^2(t_1)\} + E\{\mathbf{x}(t_1) \Delta \mathbf{x}\} = E\{\mathbf{x}^2(t_1)\} + E\{\mathbf{x}(t_1)\} E\{\Delta \mathbf{x}\} = \\ &= (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + (\lambda t_1) \lambda (t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 \end{aligned}$$

- Analogamente, para  $t_2 < t_1$ ,

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2$$

# Processo de Poisson

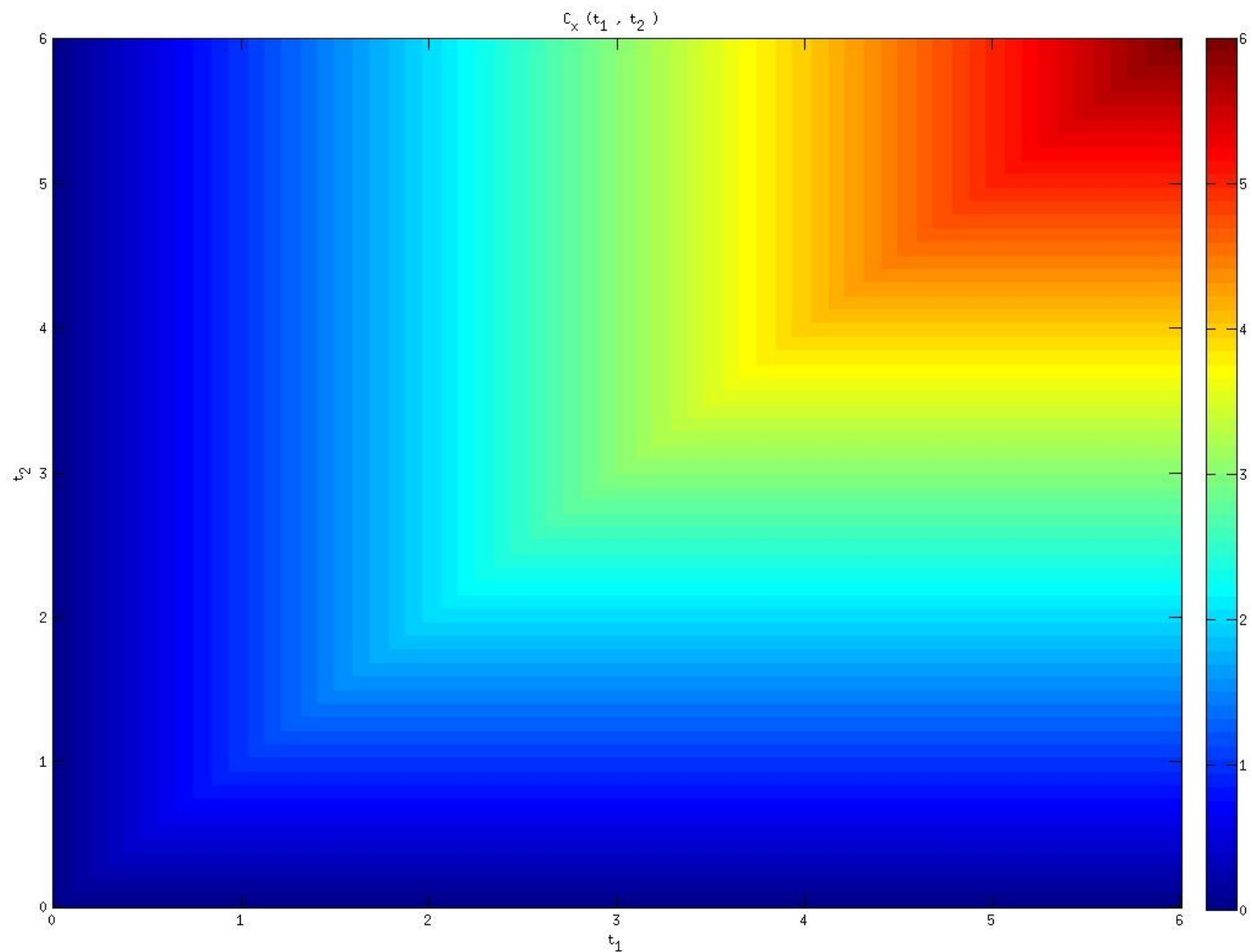
- Portanto,

$$R_x(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \begin{cases} \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1 & t_1 < t_2 \\ \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2 & t_2 < t_1 \end{cases} = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$$

- e,

$$C_x(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$$

# Processo de Poisson



# Processo de Poisson

- Note, também, que as probabilidades de ordem  $n$  desse processo podem ser “facilmente” determinadas, pois, para  $t_n > t_{n-1} > \dots > t_2 > t_1$

$$\begin{aligned}
 P\{\mathbf{x}(t_1) = k_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) = k_n\} &= \\
 &= P\{\mathbf{x}(t_n) = k_n \mid \mathbf{x}(t_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, \mathbf{x}(t_1) = k_1\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_{n-1}) = k_{n-1} \mid \mathbf{x}(t_{n-2}) = k_{n-2}, \dots, \mathbf{x}(t_1) = k_1\} \dots \\
 &\dots P\{\mathbf{x}(t_2) = k_2 \mid \mathbf{x}(t_1) = k_1\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_1) = k_1\} = \\
 &= P\{\mathbf{x}(t_n) = k_n \mid \mathbf{x}(t_{n-1}) = k_{n-1}\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_{n-1}) = k_{n-1} \mid \mathbf{x}(t_{n-2}) = k_{n-2}\} \dots \\
 &\dots P\{\mathbf{x}(t_2) = k_2 \mid \mathbf{x}(t_1) = k_1\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_1) = k_1\}
 \end{aligned}$$

- já que na determinação do número de clientes que chegaram até o instante  $t_i$  só é relevante saber quantos clientes haviam chegado no instante passado mais próximo,  $t_{i-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 P\{\mathbf{x}(t_1) = k_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) = k_n\} &= \\
 &= P\{\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_{n-1}) - \mathbf{x}(t_{n-2}) = k_{n-1} - k_{n-2}\} \dots \\
 &\dots P\{\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1) = k_2 - k_1\} \cdot P\{\mathbf{x}(t_1) = k_1\}
 \end{aligned}$$

# Processo de Poisson

- Essas probabilidades são todas distribuições de Poisson de parâmetro  $\lambda (t_i - t_j)$ .
- Portanto:

$$\begin{aligned} P \{ \mathbf{x}(t_1) = k_1, \dots, \mathbf{x}(t_n) = k_n \} = \\ = \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{(k_n - k_{n-1})}}{(k_n - k_{n-1})!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_{n-1} - t_{n-2})]^{(k_{n-1} - k_{n-2})}}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} e^{-\lambda(t_{n-1} - t_{n-2})} \dots \\ \dots \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{(k_2 - k_1)}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{[\lambda t_1]^{(k_1)}}{(k_1)!} e^{-\lambda t_1} \end{aligned}$$

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{n-1} \leq k_n$$

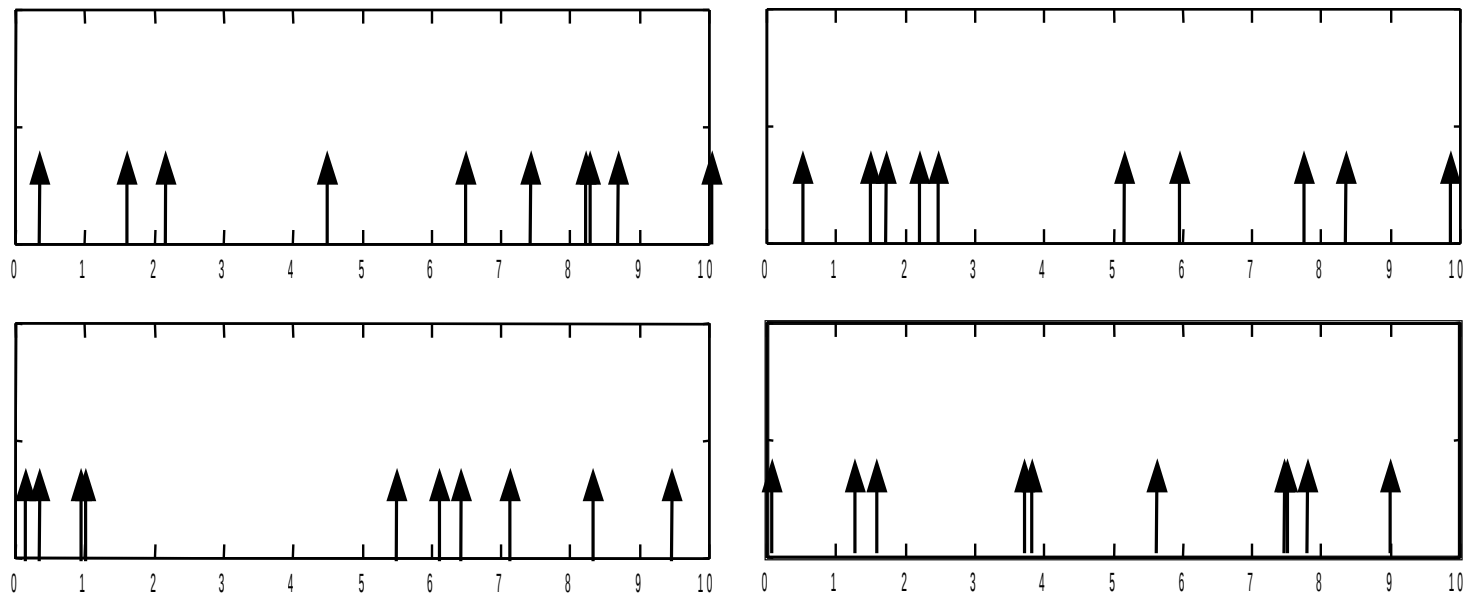
- O processo de Poisson tem grande importância no estudo de teoria das filas.

# Impulsos de Poisson

- Sendo  $t_i$  os instantes de tempo citados anteriormente, no processo de Poisson, forma-se o processo

$$z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

- ou seja, um trem de impulsos, ocorrendo em instantes aleatórios e independentes, com uma média de  $\lambda$  impulsos por unidade de tempo.



# Impulsos de Poisson

- É fácil ver que  $\mathbf{z}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$

- Assim, definindo-se um processo  $\mathbf{y}(t)$ , para um dado  $\varepsilon > 0$ , como

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{x}(t + \varepsilon) - \mathbf{x}(t)}{\varepsilon}$$

- temos que

$$\mathbf{z}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}(t)$$

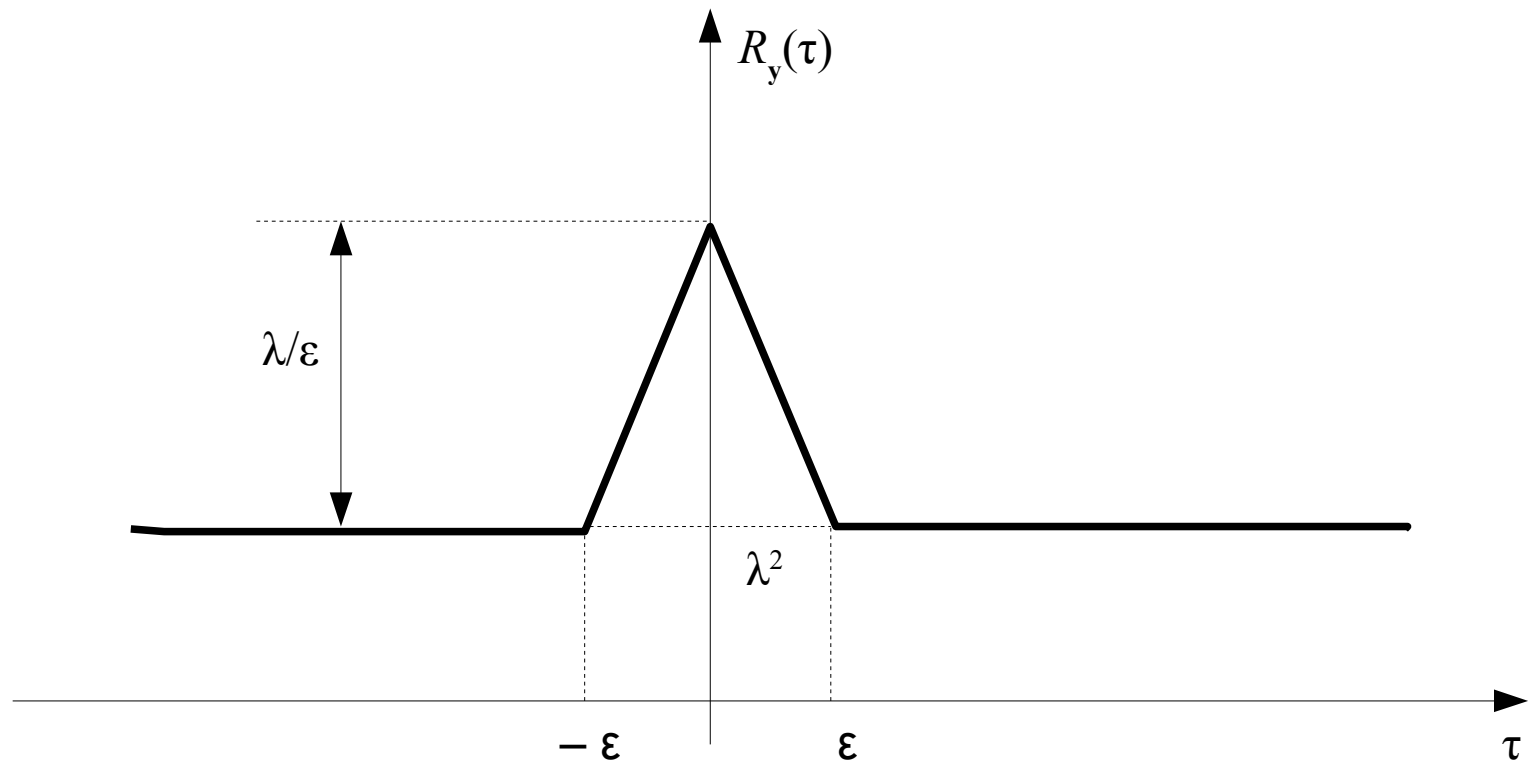
- Portanto,

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = \frac{E\{\mathbf{x}(t + \varepsilon)\} - E\{\mathbf{x}(t)\}}{\varepsilon} = \lambda \Rightarrow E\{\mathbf{z}(t)\} = \lambda$$

# Impulsos de Poisson

$$\begin{aligned}
 R_y(t_1, t_2) &= \frac{E\{\mathbf{x}(t_1 + \varepsilon)\mathbf{x}(t_2 + \varepsilon)\} + E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} - E\{\mathbf{x}(t_1 + \varepsilon)\mathbf{x}(t_2)\} - E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2 + \varepsilon)\}}{\varepsilon^2} = \\
 &= \frac{\lambda^2[(t_1 + \varepsilon)(t_2 + \varepsilon) + t_1 t_2 - (t_1 + \varepsilon)t_2 - t_1(t_2 + \varepsilon)]}{\varepsilon^2} + \\
 &+ \frac{\lambda[\min(t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon) + \min(t_1, t_2) - \min(t_1 + \varepsilon, t_2) - \min(t_1, t_2 + \varepsilon)]}{\varepsilon^2} = \\
 &= \begin{cases} \lambda^2 & t_2 + \varepsilon < t_1 \\ \lambda^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(1 + \frac{t_2 - t_1}{\varepsilon}\right) & t_2 < t_1 < t_2 + \varepsilon \\ \lambda^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(1 - \frac{t_2 - t_1}{\varepsilon}\right) & t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon \\ \lambda^2 & t_1 + \varepsilon < t_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

# Impulsos de Poisson



- Claramente, no limite, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , teremos

$$R_z(t_1, t_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_y(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda \delta(t_2 - t_1)$$

# Processo de Wiener-Levy

- Este processo, conhecido como movimento Browniano, pode ser visto como o limite do processo caminho randômico, como mostrado a seguir.
- A principal motivação para o processo de Wiener foi desenvolver um modelo para o movimento caótico das moléculas de gás.
- Modelando-se as colisões discretas como um caminho randômico, obtém-se esse processo quando um número infinito (muito grande) de moléculas interagem numa escala de tempo infinitesimal (muito pequena).
- Seja o processo de tempo contínuo  $\mathbf{w}_s(t)$  dado por:

$$\mathbf{w}_s(t) = s \mathbf{w}(n) \text{ para } nT \leq t < (n+1)T$$

- Onde  $\mathbf{w}(n)$  é o processo, de tempo discreto, caminho randômico, com probabilidade  $p=1/2$ .

# Processo de Wiener-Levy

- Temos, portanto, que

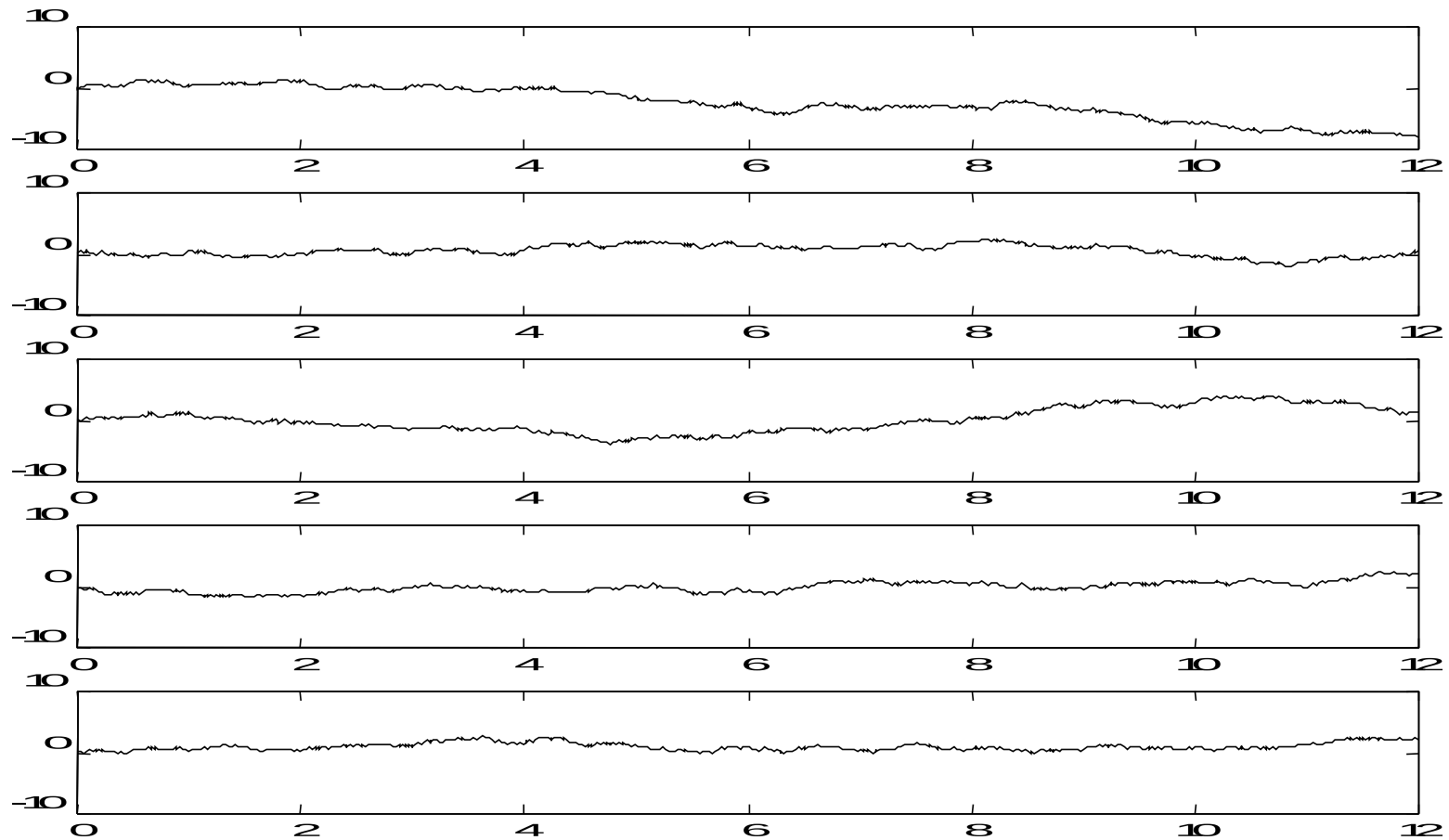
$$E\{\mathbf{w}_s(t)\} = 0 \quad \text{e} \quad R_{\mathbf{w}_s}(t_1, t_2) = \frac{s^2 \min(t_1, t_2)}{T}$$

- pois  $t_1/T \cong n_1$  e  $t_2/T \cong n_2$ .
- Fazendo-se, então,  $T$  tender a zero, mas de forma que  $s^2/T = \alpha$  permaneça constante, definimos o processo

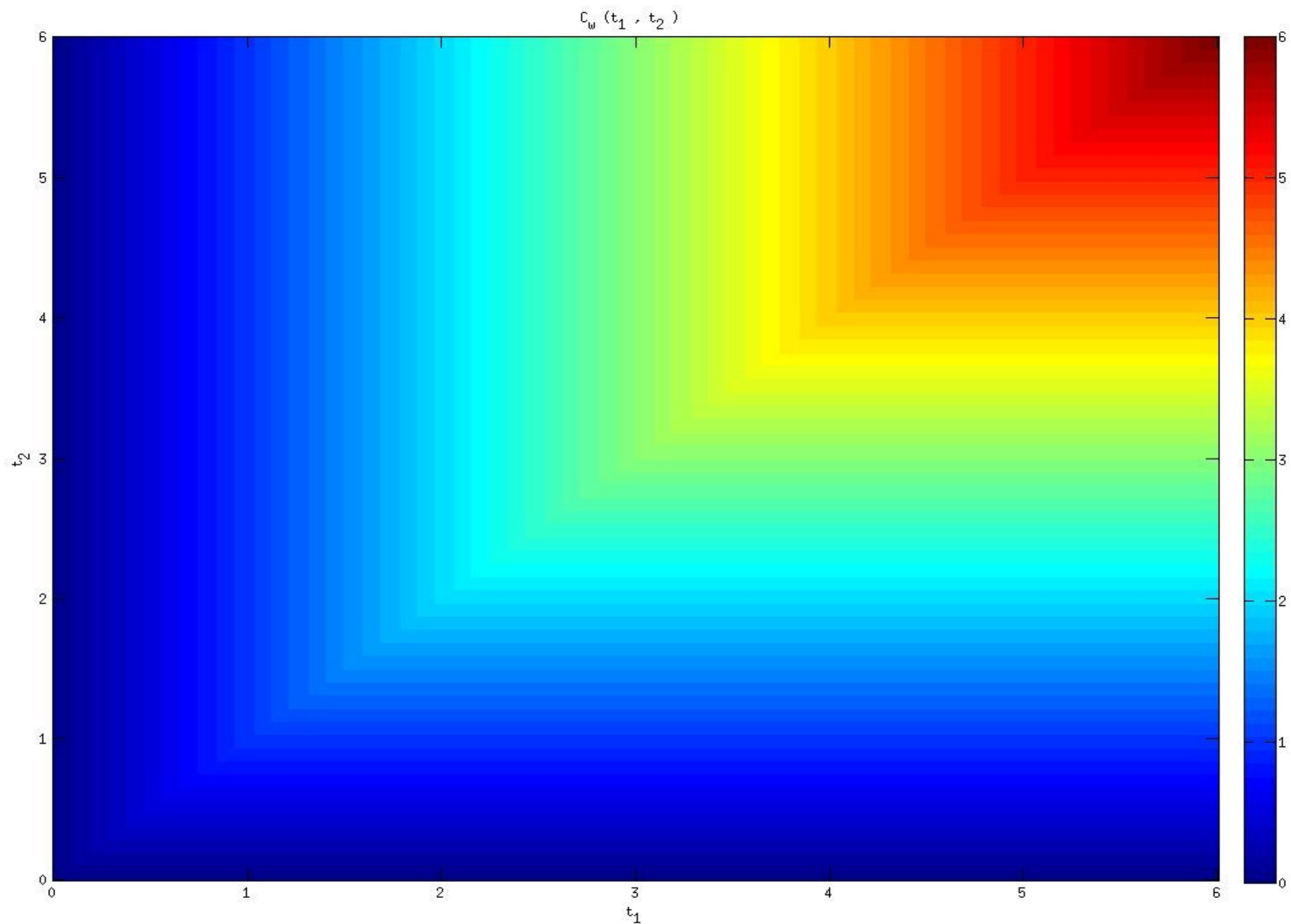
$$\mathbf{w}(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ \alpha = \text{cte}}} \mathbf{w}_s(t) \Rightarrow \begin{cases} E\{\mathbf{w}(t)\} = 0 \\ R_{\mathbf{w}}(t_1, t_2) = \alpha \min(t_1, t_2) \end{cases}$$

- que é denominado processo de Wiener.

# Processo de Wiener-Levy



# Processo de Wiener-Levy



# Processo de Wiener-Levy

- Como, para qualquer instante de tempo  $t > 0$ , a variável aleatória  $w(t)$  é a soma de infinitas variáveis aleatórias independentes, pode-se mostrar, pelo teorema do limite central, que ela é uma variável aleatória gaussiana, ou seja,

$$f_w(w; t) = \frac{\exp\left(-\frac{w^2}{2 \sigma^2 t}\right)}{\sqrt{2 \pi \sigma^2 t}}$$

- Também a variável aleatória  $\Delta_{ij} = w(t_j) - w(t_i)$ , para  $t_j > t_i$ , tem densidade de probabilidade gaussiana, dada por

$$f_{\Delta}(\delta; t_j - t_i) = \frac{\exp\left[-\frac{\delta^2}{2 \sigma^2 (t_j - t_i)}\right]}{\sqrt{2 \pi \sigma^2 (t_j - t_i)}}$$

- Sendo que  $\Delta_{ij}$  e  $\Delta_{mn}$  são independentes se os intervalos  $(t_i, t_j)$  e  $(t_m, t_n)$  forem disjuntos.

## Processo de Wiener-Levy

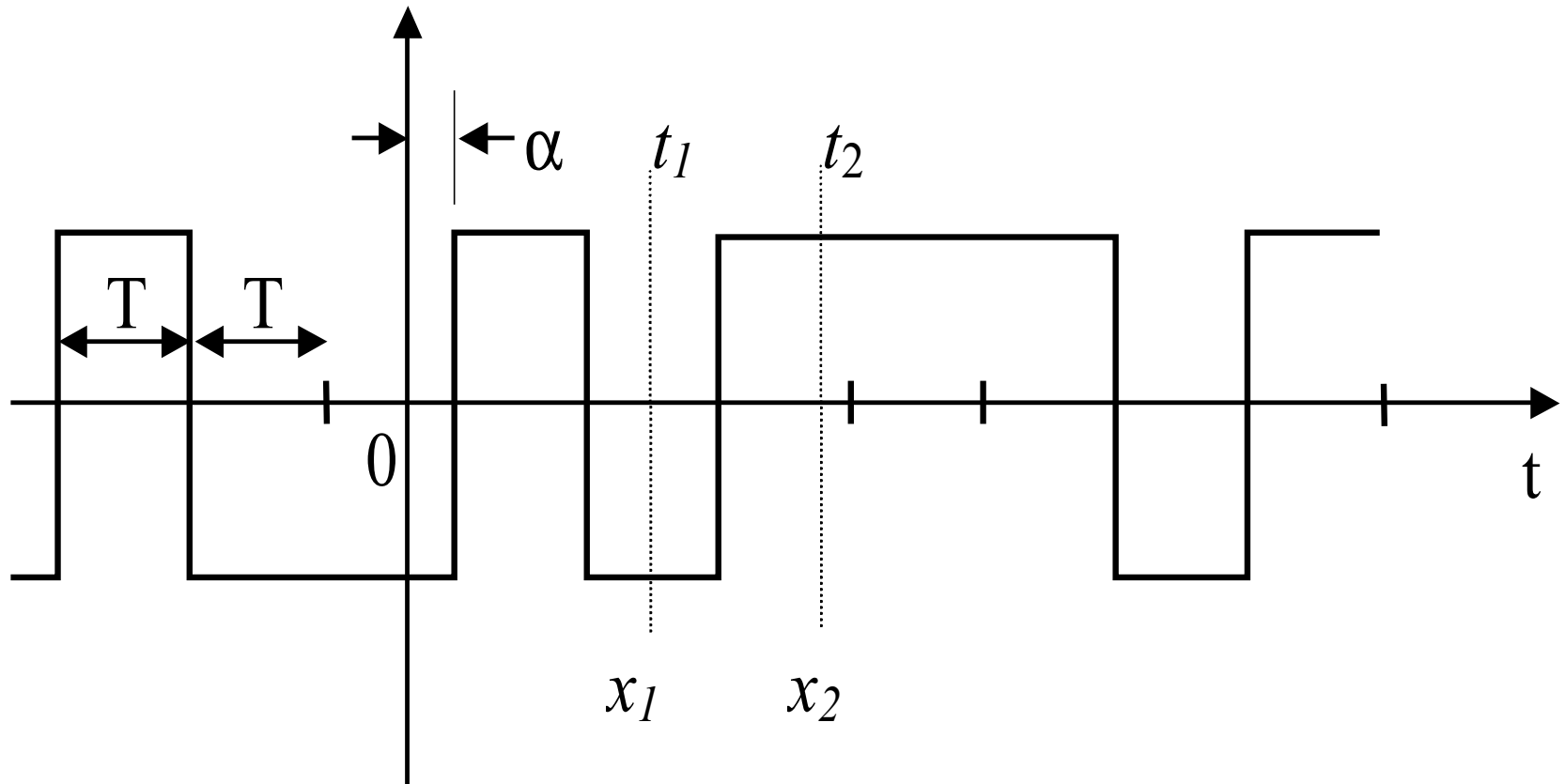
- Portanto, pode-se mostrar que as variáveis aleatórias  $w(t_1)$ ,  $w(t_2)$ , ...,  $w(t_n)$  são conjuntamente gaussianas (a prova fica como exercício) com densidade de probabilidade dada por

$$f_w(w_1, w_2, \dots, w_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{(w_i - w_{i-1})^2}{2\alpha(t_i - t_{i-1})}\right]}{\sqrt{2\pi\alpha(t_i - t_{i-1})}}$$

- com  $w_0 = 0$  e  $t_0 = 0$ .
- Note que o processo de Wiener tem a mesma função variância que o processo de Poisson, apesar do fato deles serem dois processos dramaticamente diferentes.
- Enquanto o processo de Poisson consiste de saltos de amplitudes constantes, o processo de Wiener não apresenta saltos, e pode ser demonstrado que suas funções amostra são contínuas com probabilidade-1.

# Transmissão binária

- Considere o processo binário randômico, com amostra típica mostrada abaixo:



# Transmissão binária

- O sinal só pode assumir 2 estados (valores): +1 ou -1, com igual probabilidade.
- A transição de um estado para outro só pode ocorrer nos pontos de transição, denominados nós, que estão espaçados de  $T$  segundos.
- A probabilidade de transição de um estado para outro é 0,5. O primeiro nó pode estar situado em qualquer instante no intervalo  $(0, T)$ .
- Esse processo  $\mathbf{x}(t)$  pode ser representado analiticamente por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_n \mathbf{a}_n p(t - nT - \alpha)$$

- onde  $p(t)$  é um pulso básico (neste caso pulso retangular),  $\alpha$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $(0-T)$  e  $\mathbf{a}_n$  são variáveis aleatórias discretas que podem assumir os valores -1 ou +1 com igual probabilidade, sendo independentes umas das outras.

# Transmissão binária

- As amplitudes nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , representam as variáveis aleatórias  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , que são do tipo discreto, assumindo apenas os valores  $-1$  e  $+1$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= \overline{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) = \\ &= P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(1, 1) + P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(-1, -1) - P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(-1, 1) - P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(1, -1) \end{aligned}$$

- Por simetria, os 2 primeiros termos e os 2 últimos termos devem ser iguais, assim,

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= 2P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(1, 1) - 2P_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(1, -1) = 2P_{\mathbf{x}_1}(1) [P_{\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1}(1|1) - P_{\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1}(-1|1)] = \\ &= P_{\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1}(1|1) - P_{\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1}(-1|1) = 1 - 2P_{\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1}(-1|1) \end{aligned}$$

# Transmissão binária

- Vamos considerar, primeiramente, o caso em que  $|t_2 - t_1| \leq T$ , onde, no máximo, temos um ponto de transição no intervalo  $(t_1, t_2)$ .
- Nesse caso, a probabilidade de  $x_2$  ser  $-1$  dado que  $x_1$  é  $1$  é a probabilidade do evento conjunto: (há um nó nesse intervalo, o estado muda nesse nó), que são, por hipótese, independentes, assim:
  - $P_{x_2|x_1}(-1|1) = P(\text{há um nó nesse intervalo}) \cdot P(\text{há mudança de estado nesse nó}) = \frac{1}{2} P(\text{há um nó nesse intervalo})$
- Como o instante de tempo  $t$  é escolhido arbitrariamente em relação à origem, a probabilidade de haver um nó nesse intervalo deve ser proporcional à largura desse intervalo, assumindo valor unitário para  $|t_2 - t_1| = T$ .
- Dessa forma:

$$P_{x_2|x_1}(-1|1) = \frac{1}{2} \frac{|t_2 - t_1|}{T} \quad \text{e} \quad P_{x_2|x_1}(1|1) = 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{2T}$$

# Transmissão binária

- E portanto,

$$R_x(t_1, t_2) = 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T}, \quad |t_2 - t_1| < T$$

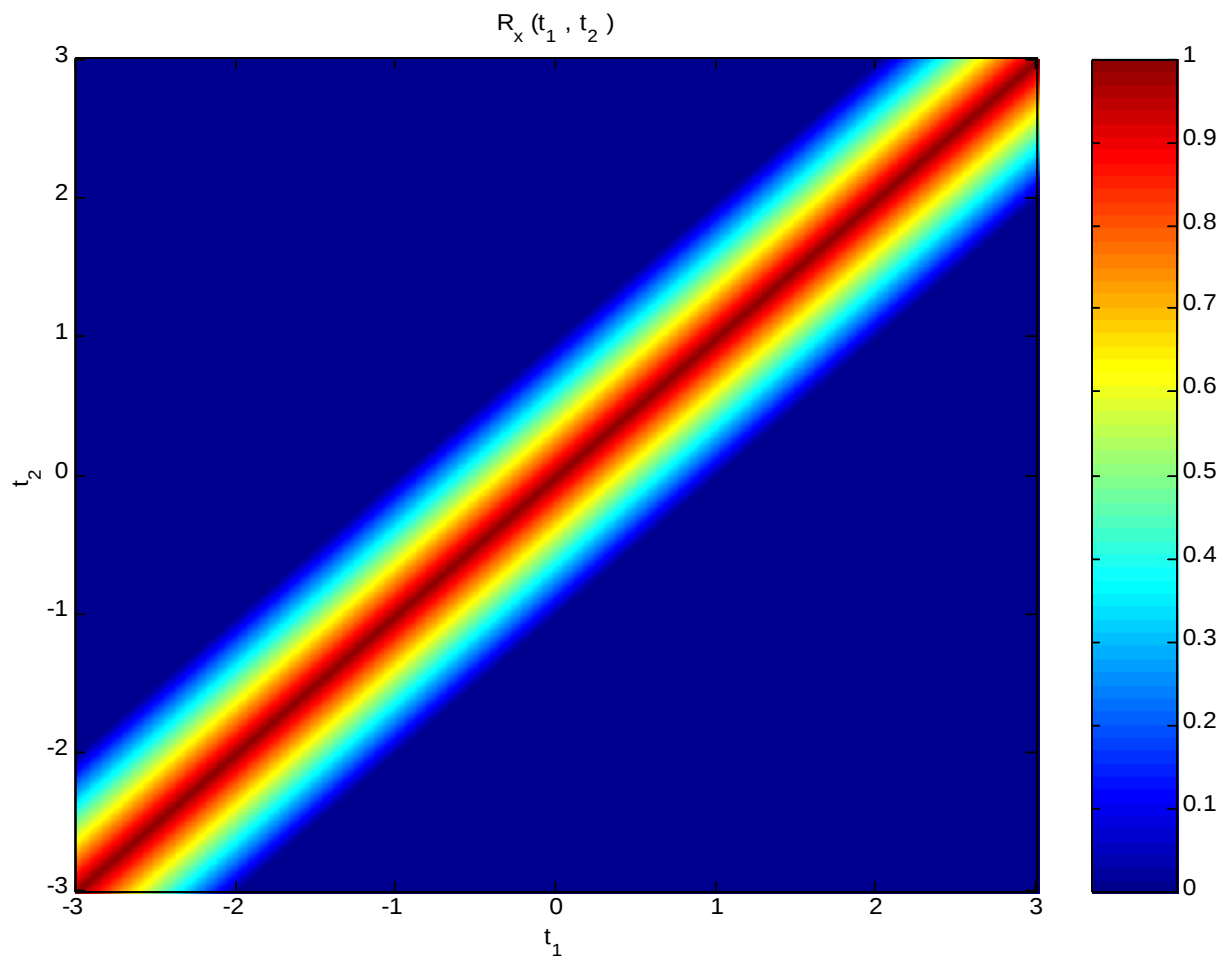
- Para  $|t_2 - t_1| > T$ , há pelo menos um nó entre os pontos  $t_1$  e  $t_2$ . Neste caso, então,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  tornam-se independentes e assim,

$$R_x(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2\} = E\{\mathbf{x}_1\} \cdot E\{\mathbf{x}_2\} = 0, \quad |t_2 - t_1| > T.$$

- Portanto,

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T} & |t_2 - t_1| \leq T \\ 0 & |t_2 - t_1| > T \end{cases}$$

# Transmissão binária



# Transmissão binária

- Função de autocorrelação do processo binário randômico

