

### 3ª Lista de Exercícios – Eletromagnetismo II

Data sugerida para completar esta lista: 20 de Abril

**2.1** — Uma onda eletromagnética se propaga na direção  $z$  dentro de uma guia de onda retangular. O guia possui largura  $a$  na direção  $x$  e largura  $b$  na direção  $y$ . Lembre-se que no modo TM o campo elétrico  $B_z$  é nulo, enquanto no modo TE é a componente  $E_z$  do campo elétrico que se anula.

- (a) Deduza a expressão mais geral possível para a componente  $z$  do campo elétrico,  $E_z$ , no modo TM. Justifique sua resposta.
- (b) Obtenha todas as outras componentes dos campos elétricos e magnéticos para um modo TM.
- (c) Mostre que os campos elétricos e magnéticos obedecem a *todas* as condições de contorno apropriadas ( $\vec{E}^{\parallel} = \vec{B}^{\perp} = 0$ ), desde que  $k_x = n\pi/a$  e  $k_y = m\pi/b$ .
- (d) Encontre a expressão para a relação de dispersão,  $\omega(k_z)$ .
- (e) Faça o mesmo para o modo TE (para os quais  $E_z = 0$ ). Compare os dois modos TE e TM com as mesmas frequências  $\omega_{mn}$ . Mostre que esses modos são “independentes” dentro do guia de onda.
- (f) Represente graficamente os campos elétricos e magnéticos transversais ( $E_{x,y}$  e  $B_{x,y}$ ) dentro do guia de onda, para os modos de frequência característica  $\omega_{mn}$  mais baixa possível (para os quais  $m$  e  $n$  tem os menores valores possíveis).
- (g) Compute as velocidades de fase e de grupo de um modo qualquer  $\{m,n\}$ .

**2.2** — Os fornos de microondas têm as seguintes dimensões aproximadas: 20 cm de altura, por 30 cm de largura, por 30 cm de profundidade. Sabendo que a frequência das microondas num forno doméstico é 2,45 GHz:

- (a) Mostre que, para um forno dessas dimensões, existem frequências ressonantes próximas dos 2,45 GHz – por exemplo, o modo  $m = 1$ ,  $n = 3$  e  $p = 2$  ( $m$ ,  $n$  e  $p$  são respectivamente os números de ocupação na largura, altura e profundidade) tem uma frequência próxima desse valor.
- (b) Calcule a energia total do campo eletromagnético dentro desse forno de microondas, nos dois casos (modo TM e modo TE).
- (c) O comprimento de onda dessa microondas é  $\lambda = c/(2,45 \text{ GHz}) \approx 12,5 \text{ cm}$ . Como é que uma onda dessas, oscilando no modo  $\nu_{132}$ , “cabe” dentro do forno?
- (d) Que outras dimensões um forno de microondas poderia ter? Sugira ao menos duas outras opções, justificando sua resposta – e não vale simplesmente trocar a altura por largura!

**2.3** — Considere um cabo coaxial, como o que vimos em sala de aula (raio do cabo interno  $R_1$ , raio do tubo externo  $R_2$ ).

- (a) Em sala de aula estudamos os modos TM desse cabo. Encontre a expressão para os modos TE que satisfazem as condições de contorno adequadas. (Para esse exercício você talvez queira consultar seu livro favorito de Física Matemática e ler mais a respeito das Funções de Bessel!)
- (b) Encontre as frequências fundamentais (ou seja, as frequências mais baixas possíveis para um dado  $k_z$ ) das ondas eletromagnéticas nos modos TM e TE nesse cabo coaxial. Elas são iguais?

**2.4** — Considere uma cavidade ressonante cilíndrica, ou seja, um cilindro de raio  $R$  e altura  $h$ , feito de um condutor perfeito e tampado tanto em cima quanto em baixo. Encontre as frequências fundamentais das ondas eletromagnéticas nessa cavidade, tanto nos modos TM quanto nos modos TE.

**2.5** — As cavidades ressonantes nunca são perfeitas – além das paredes não serem perfeitamente retas, sempre ocorrem perdas na intensidade dos campos, devido à absorção e dissipação pelo material que compõe as paredes. A quantidade que determina essas imperfeições e perdas é chamado “fator de qualidade”  $Q$ , que depende da frequência da onda e é definido por:

$$Q(\omega_0) = \omega_0 \frac{\text{Energia total armazenada}}{\text{Potencia dissipada}}$$

Em outras palavras, a energia do campo eletromagnético numa cavidade ressonante com fator de qualidade  $Q$  decai como:

$$U = U_0 e^{-\omega_0 t / Q}.$$

Mas se a energia total decai como indicado acima, isso significa que o campo elétrico também tem que decair,  $E \sim \exp[-\omega_0 t / (2Q)] \exp[-i\omega_0 t]$ , e portanto ele não pode corresponder a uma onda monocromática (que, por definição, oscila com uma frequência única e constante).

Nesse caso, a onda eletromagnética tem que ser uma superposição (linear) de ondas com frequências próximas da frequência de referência  $\omega_0$ :

$$E \rightarrow \int d\omega \frac{dE_0(\omega)}{d\omega} e^{-i\omega t},$$

com  $dE_0/d\omega$  máximo perto de  $\omega = \omega_0$  — e, claro, no caso de uma cavidade perfeita e uma onda monocromática, temos  $dE_0/d\omega \rightarrow \delta(\omega - \omega_0)$ .

Mostre que a amplitude do campo como função da frequência deve obedecer a relação:

$$\left| \frac{dE_0}{d\omega} \right|^2 = A^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left( \frac{\omega_0}{2Q} \right)^2}.$$

Faça um gráfico de  $|dE_0/d\omega|$ , indicando como esse gráfico muda como função de  $Q$ .

Uma última perguntinha: quais são as vantagens e desvantagens de um forno de microondas com fator de qualidade extremamente alto ou extremamente baixo?