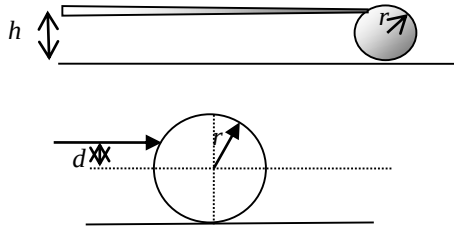


Problema 11 lista 3. (Tipler Cap 9, E 103) Uma bola de bilhar, de raio r , está inicialmente em repouso sobre a mesa horizontal, como mostra a figura ao lado. Esta bola é atingida por uma tacada horizontal, que proporciona uma força de módulo F_0 durante um intervalo de tempo muito pequeno Δt . O taco atinge a bola a uma altura h acima do ponto de contato com a mesa. a) Mostrar que a velocidade angular inicial da bola ω_0 está relacionada com a velocidade linear inicial do centro de massa v_0 por $\omega_0 = 5v_0(h-r)/2r^2$.



Se o taco atingir a bola a uma altura igual à do CM, $x = 0$, fazendo coincidir a origem de coordenadas com o CM da bola, esta se moverá inicialmente com um movimento de translação, sem rotação. Se o taco atingir a

bola abaixo do CM, haverá inicialmente uma rotação para trás. Com um certo valor de d , a bola recebe um impulso ocasionando uma quantidade de movimento para se transladar e um torque para girar e, que satisfazem a condição de rolamento sem escorregamento. O valor de d determina o torque exercido sobre a bola, e assim, a aceleração angular α que é fornecida no momento do golpe. A aceleração linear considerando unicamente a força da tacada é: $a = F/m$ que resulta independente de d . A força de atrito é muito menor que a força de colisão da tacada e pode ser desprezada.

Para que a bola role sem escorregar, desde o início do movimento, deve-se cumprir a relação: $s = \theta R$; $v = \omega R$; $a = \alpha R$. O peso e a força normal atuam numa reta que passa pelo centro de massa e, portanto, não contribuem com torques em torno desse ponto.

Vou escolher os seguintes sistemas de referência:

- Para a rotação, positivo de acordo a regra da mão direita;
- Para a translação, positivo para a esquerda.

Isso nos fornece a relação $s = \theta R$ isto é: se a força está aplicada para a esquerda, ela é negativa e o seu torque, ao estar acima do CM, também será negativo.

Assim, aplicando a 2ª lei de Newton à translação do CM,

$$\sum F = ma \rightarrow \vec{F}_0 = m\vec{a}_{CM} \quad (1)$$

$$\therefore -F_0 = ma_{CM}$$

Desde o ponto de vista da rotação: $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, (2) e para que haja rolamento sem escorregamento, $s = \theta R$; $v = \omega R$; $a = \alpha R$ (3).

Chamando: v_i = velocidade inicial antes da tacada = 0

v_0 = velocidade imediatamente após a tacada

e sabendo que o produto de uma força pelo intervalo de tempo em que ela é aplicada é: $F \cdot \Delta t = \Delta p = m(v_0 - v_i)$ (4). Como inicialmente a bola estava em

repouso e a força aplicada foi F_0 , a expressão (4) fica: $F_0 \cdot \Delta t = mv_{0,CM}$, onde desprezamos a força de atrito durante a colisão.

Da expressão (2), como a tacada é realizada a uma distância $(h-R)$ do CM,

$$F_0(h-R) = -I\alpha,$$

desprezando o torque causado pelo atrito durante a colisão. Multiplicando

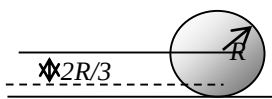
ambos os membros por Δt , $F_0 \Delta t (h-R) = -I\alpha \Delta t$. Substituindo a inércia

rotacional de uma esfera maciça na expressão:

$$mv_{0,CM}(h-R) = -\frac{2}{5}mR^2\omega \Rightarrow \omega = -\frac{5v_{0,CM}(h-R)}{2R^2}.$$

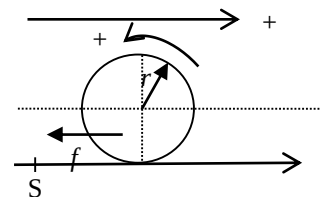
Onde o sinal estará dado pela escolha do referencial de translação. Se para a translação o positivo estiver para a esquerda, a velocidade inicial será $-v_0$, nesse caso ω e v_0 terão o mesmo sinal.

14ª aula 08/04/19



12. (Tipler Cap 9, E 107) Uma bola de bilhar inicialmente em repouso, recebe um golpe seco do taco. A força aplicada é horizontal e está à distância $2R/3$ abaixo da linha central, como mostra a figura ao lado. A velocidade inicial da bola é v_0 e o coeficiente de atrito cinético é μ_k . a) Qual é a velocidade angular inicial ω_0 ? b) Que velocidade tem a bola no instante em que principia a rolar sem escorregar? c) Qual a energia cinética inicial da bola? d) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa? a) Utilizaremos a solução do problema anterior, sabendo que a velocidade inicial é v_0 . Por comparação com o problema anterior, sendo h a distância do solo até a posição onde bate o taco, e sendo a distância fornecida a partir do centro da bola, $h = R - 2R/3 = R/3$.

$$\omega_0 = -\frac{5v_0(\frac{R}{3} - R)}{2R^2} = -\frac{v_0}{R} \frac{5(\frac{R-3R}{3})}{2R} = \frac{5v_0}{R} \frac{3}{2R} = \frac{5v_0}{3R}$$



b) As forças que atuam sobre a bola são: o peso, a normal e a força de atrito.

Aplicando a 2ª lei de Newton à translação do CM no referencial solo após a tacada, onde a única força que atua na direção do deslocamento é a de atrito, cujo módulo é: $f = \mu mg$

$$\sum F = ma_{CM} \rightarrow (-f) = ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{(-f)}{m}. \quad (1)$$

Desde o ponto de vista da rotação que é acelerado:

$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow (-f)R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{(-f)R}{I} = \frac{(-f)R}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5(-f)}{2mR}, \quad (2)$$

As velocidades linear e angular enquanto o tempo $t < t_r$ (tempo de rolamento sem escorregamento) dependerão das acelerações correspondentes, assim:

$$v_{CM(S)} = v_0 + a_{CM}t = v_0 + \frac{(-f)}{m}t \quad (3),$$

$$\text{e } \omega_{b(CM)} = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5}{2} \frac{(-f)}{mR}t \quad (4)$$

As expressões (3) e (4) relacionam v e ω para tempos iguais.

$$\text{Assim de (3) e (1) } v - v_0 = \frac{(-f)}{m}t \Rightarrow t = \frac{(v - v_0)m}{(-f)} \quad (5),$$

que substituindo em (4),

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5}{2} \frac{(-f)}{mR} \frac{(v - v_0)m}{(-f)} = \frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5}{2} \frac{(v - v_0)}{R} = \\ &= \frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5v}{2R} - \frac{5v_0}{2R} = \frac{v_0}{R} \frac{10 - 15}{6} + \frac{5v}{2R} = -\frac{5}{6} \frac{v_0}{R} + \frac{5v}{2R} = \frac{5}{2R} \left(v - \frac{1}{3}v_0 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Relação que vale para qualquer t entre 0 e t_r . Onde t_r é o tempo do início do rolamento sem escorregamento.

A condição de rolamento sem escorregamento, respeitando os sinais dos

$$s_{CM(S)} = -\theta_{b(CM)}R;$$

$$\text{referenciais adotados, } v_{CM(S)} = -\omega_{b(CM)}R \quad (7). \text{ So para } t \geq t_r.$$

$$a_{CM(S)} = -\alpha_{b(CM)}R$$

No instante em que principia a rodar sem escorregar $v_r = -\omega_r R$. Substituindo ω obtido da expressão (6),

$$\begin{aligned} v_r &= -\left[-\frac{5}{6} \frac{v_0}{R} + \frac{5v_r}{2R} \right] R = \frac{5}{6} v_0 - \frac{5}{2} v_r = -\frac{5}{2} v_r + \frac{5v_0}{6} \\ v_r \left(1 + \frac{5}{2} \right) &= +\frac{5}{6} v_0 \Rightarrow v_r \left(\frac{7}{2} \right) = \frac{5}{6} v_0 \Rightarrow v_r = \frac{5}{6} \frac{2}{7} v_0 = \frac{5}{21} v_0 \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo o valor da velocidade de translação v pelo valor da velocidade de translação no rolamento, v_r , na expressão (6).

$$\omega_r = \frac{5}{2R} \left(v_r - \frac{1}{3} v_0 \right) = \frac{5}{2R} \left(\frac{5}{21} v_0 - \frac{1}{3} v_0 \right) = -\frac{5v_0}{2R} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{21} \right) = -\frac{5v_0}{2R} \left(\frac{2}{21} \right) = -\frac{5v_0}{21R}$$

(9) Observem as expressões (8) e (9) que valem $v_r = -\omega_r R$.

Que era de esperar por ser $\omega_{b(CM)} = -\frac{v_{CM(S)}}{R}$

Com esses dados podemos encontrar o tempo de rolamento:

$$t_r = \frac{(v_r - v_0)m}{(-f)} = \frac{\left(\frac{5}{21} v_0 - v_0 \right) m}{(-f)} = -\frac{16}{21} \frac{v_0 m}{(-f)} \quad (10)$$

c) Qual a energia cinética inicial da bola?

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \left(\frac{5 v_0}{3 R} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{5} m v_0^2 \frac{25}{9} = \frac{1}{2} m v_0^2 + m v_0^2 \frac{5}{9} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{10}{9} \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{9+10}{9} \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{19}{9} \right) = \frac{19}{18} m v_0^2 = \frac{19}{2 \cdot 9} m v_0^2 = 1,05556 m v_0^2$$

a) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa?

$$W_f = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} I \omega_r^2 = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \left(\frac{v_r}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_r^2 \left(1 + \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{2} m v_r^2 \left(\frac{7}{5} \right)$$

$$K_f = \frac{1}{2} m \left(\frac{5}{21} v_0 \right)^2 \left(\frac{7}{5} \right) = \frac{1}{2} m \frac{25}{21 \cdot 21} \frac{7}{5} v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{5}{21 \cdot 3} v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{5}{63} v_0^2 = \frac{5}{126} m v_0^2 = 0,0396 m v_0^2$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} m \frac{5}{63} v_0^2 - \frac{19}{2 \cdot 9} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{9} \left(\frac{5}{7} - 19 \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{9} \left(\frac{5 - 7 \cdot 19}{7} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{9} m v_0^2 \left(\frac{5 - 133}{7} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{9} m v_0^2 \left(\frac{128}{7} \right) = -\frac{128}{63} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 \right) = -1,0159 m v_0^2$$

Outra forma de obter o trabalho do atrito e realizar o produto de $w_f =$

$\vec{f} \cdot \vec{d} = -f d$ porque a velocidade de translação é positiva o tempo todo.

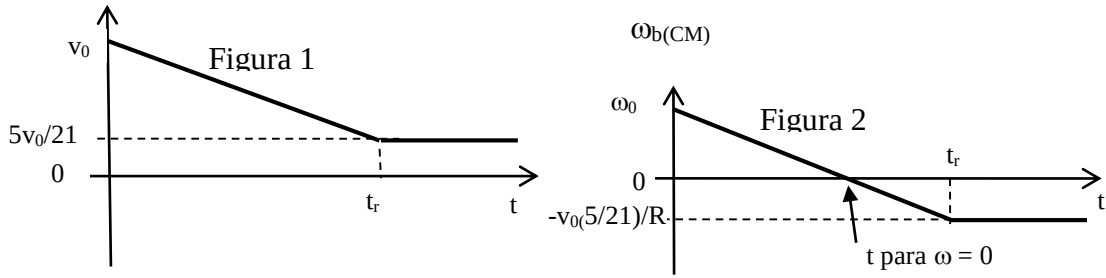
Como podemos verificar a distância percorrida num movimento uniformemente acelerado?

“Área entre a curva da velocidade em função do tempo, e o eixo do tempo”!!!

Desta maneira, para a distância percorrida pelo CM (fig 1)

ou para o ângulo descrito (fig 2)

v



Localizando dois referenciais, o do CM e o referencial solo, podemos observar que:

$$v_{p(S)} = v_{p(CM)} + v_{CM(S)}, \quad (11)$$

onde $v_{p(S)}$ é a velocidade do ponto de contato.

Quando roda sem escorregar, se deve satisfazer a relação:

$$v_{p(CM)} = \omega_{CM} R, \text{ como tínhamos expressado em}$$

(3), sendo ω_{CM} a velocidade de rotação da bola em relação ao CM. Substituindo (7) em (11),

$v_{p(S)} = \omega_{(CM)} R + v_{CM(S)}$, onde o primeiro somando é positivo porque o ω primeiro é positivo, depois zero e finalmente negativo antes de rolar sem escorregar, mas como estamos analisando o ponto p , a bola escorrega no sentido positivo do x

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx_{p(S)}}{dt} = \omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)} \Rightarrow dx_{p(S)} = (\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}) dt$$

Integrando a ambos lados da expressão anterior,

$$\Delta x_{p(S)} = \int (\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}) dt$$

Agora, sabemos que podemos obter o quanto se deslocou um corpo quando está uniformemente acelerado e se conhecem a velocidade inicial, a velocidade final e o tempo percorrido. Pode ser obtido como a área sob a

curva de $v(t)$, assim, da primeira figura e da equação $t = \frac{(v - v_0)m}{(-f)}$, para

$$t=t_r, \quad t_r = -\frac{16}{21} \frac{v_0 m}{(-f)} \text{ por (10)}$$

$$\Delta x_{CM(S)} = \left(\frac{\frac{5}{21}v_o + v_o}{2} \right) t_r = \left(\frac{\frac{5+21}{21}v_o}{2} \right) \left(-\frac{16}{21} \right) \frac{v_o m}{(-f)} =$$

$$= \left(\frac{26v_o}{2 \cdot 21} \right) \left(-\frac{16}{21} \right) v_o \frac{m}{(-f)} = -\frac{16 \cdot 13}{21^2} v_o^2 \frac{m}{(-f)}$$

Por outro lado, enquanto o corpo desliza na horizontal, a roda gira inicialmente com ω positivo, passa por zero e finaliza com ω negativo. Observando a figura 2, vemos que também se trata de um movimento uniformemente acelerado. Podemos calcular o ângulo descrito por:

$$\Delta \theta_{b(CM)} = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2} \right) \Delta t = \frac{-\frac{5}{21} \frac{v_o}{R} + \frac{5}{3} \frac{v_o}{R}}{2} \cdot t_r = \text{por (10)}$$

$$= \frac{-5 + 35}{2} \frac{v_o}{R} \left(-\frac{16}{21} \frac{v_o m}{(-f)} \right) = \frac{30v_o}{21 \cdot 2R} \cdot \left(-\frac{16}{21} \frac{v_o m}{(-f)} \right) =$$

$$= \frac{15v_o}{21R} \left(-\frac{16}{21} \frac{v_o m}{(-f)} \right) = -\frac{15 \cdot 16}{21 \cdot 21(-f)R} mv_o^2 = -\frac{5 \cdot 16}{21 \cdot 7(-f)R} mv_o^2$$

$$\Delta \theta_{b(CM)} = -\frac{80}{147} \frac{mv_o^2}{(-f)R} \quad \text{dado que } \Delta S_{p(S)} = \Delta \theta_{b(CM)} \cdot R,$$

$$\Delta S_{p(S)} = \Delta \theta_{b(CM)} R \Rightarrow \Delta S_{p(S)} = \left(-\frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{(-f)R} \right) R \Rightarrow \Delta S_{p(S)} = -\frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{(-f)}$$

Desta maneira, a distância percorrida pelos dois movimentos será:

$$d = \Delta x + \Delta S = -\frac{16 \cdot 13}{21^2} v_o^2 \frac{m}{(-f)} - \frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{(-f)} =$$

$$= \frac{-16 \cdot 13 - 80 \cdot 3}{21^2} \frac{v_o^2 m}{(-f)} = \frac{-208 - 240}{21^2} \frac{v_o^2 m}{f} =$$

$$= -\frac{448}{21^2} \frac{v_o^2 m}{(-f)} = -1,0159 \frac{v_o^2 m}{(-f)}$$

e o trabalho da força,

$$(-f) \cdot d = (-f) \cdot \left(-\frac{448}{21^2} \frac{m}{(-f)} v_o^2 \right) = -\frac{448}{21^2} mv_o^2 = -1,0159 mv_o^2$$

Outra forma de determinar a distância – utilizando o formalismo da integral.

Da equação já deduzida:

$$\Delta x_{p(S)} = \int (\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}) dt$$

E substituindo nela as expressões (3) e (4),

$$\Delta x_{p(S)} = \int (\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}) dt = \int [(\omega_0 + \alpha t) \cdot R + v_0 + a_{CM} t] dt$$

Substituindo a velocidade angular inicial e as acelerações linear e angular pelas expressões (1) e (2), a distância em que rola escorregando fica:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int \left[\left(\frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5}{2} \frac{(-f)}{mR} \right) \cdot R + v_0 + \frac{(-f)}{m} t \right] dt = \int \left(\frac{5}{3} \frac{v_0}{R} + \frac{5}{2} \frac{(-f)}{m} + v_0 + \frac{(-f)}{m} t \right) dt = \\ &= \int \left(v_0 \left(\frac{5}{3} + 1 \right) + \frac{(-f)}{m} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) t \right) dt = \int_0^{t_r} \left(v_0 \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{(-f)}{m} \left(\frac{7}{2} \right) t \right) dt = \left[\left(\frac{8}{3} \right) v_0 t + \frac{7}{2} \frac{(-f)}{m} \frac{t^2}{2} \right]_0^{t_r} \end{aligned}$$

Substituindo t_r pela expressão (10)

$$\begin{aligned} \Delta x &= \left[\left(\frac{8}{3} \right) v_0 t_r + \frac{7}{2} \frac{(-f)}{m} \frac{t_r^2}{2} \right] = \left[\left(\frac{8}{3} \right) v_0 \left(-\frac{16}{21} \frac{v_0}{(-f)} \right) + \frac{7}{2} \frac{(-f)}{m} \frac{\left(-\frac{16}{21} \frac{v_0}{(-f)} \right)^2}{2} \right] = \\ &= -\left(\frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 21} \right) \frac{v_0^2}{(-f)} + \frac{7 \cdot 16 \cdot 16}{2 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 2} \frac{v_0^2}{(-f)} = \frac{v_0^2}{(-f)} \left(-\frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 21} + \frac{4 \cdot 16}{3 \cdot 21} \right) = \frac{v_0^2}{(-f)} (-2,0317 + 1,0158) = \\ &= -\frac{v_0^2}{(-f)} 1,0159 \end{aligned}$$

e o trabalho da força,

$$(-f) \cdot d = (-f) * \left(-1,0159 \frac{m}{(-f)} v_0^2 \right) = -1,0159 m v_0^2$$