moda é comprar *flats* e quando são vendidos sobram alguns, em outro momento são as ações e na venda sobram algumas, em outra é comprar telefones, galpões industriais etc. Temos aqui uma carteira de investimentos feita de sobras, que merece uma boa análise risco-retorno. Outras carteiras são montadas compulsoriamente. As fundações, fundos de pensão e congêneres, até há pouco tempo deviam manter em seus portifólios percentuais mínimos ou máximos, conforme o caso, em ações, imóveis e títulos federais, sem mencionar títulos do tipo OFND (Obrigações do Fundo Nacional de Desenvolvimento), CP (Certificados de Privatização) e outros, oriundos de planos heterodoxos.

Naturalmente, existem as carteiras bem administradas que procuram por meio da diversificação a melhor relação entre risco e retorno.

Nosso objetivo é a análise do risco-retorno de uma carteira de investimentos, o que passamos a examinar.

5.5 ANÁLISE DA DIVERSIFICAÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA COM DOIS ATIVOS

5.5.1 Introdução

Consideremos uma carteira de investimentos composta dos ativos A_1 e A_2, respectivamente nas proporções ω e $(1 - \omega)$.

Fixando um período de tempo para análise, indiquemos por I_1 e I_2 as respectivas variáveis aleatórias que indicam as taxas de retorno no período, dos ativos. Admitamos como conhecidas as distribuições de probabilidades de I_1 e I_2, ou seja, são dados:

$$I_1 : D\left(I_{\mu_1}, I_{S_1}\right) \text{ e } I_2 : D\left(I_{\mu_2}, I_{S_2}\right).$$

Nosso problema será a determinação da taxa de retorno da carteira, que indicaremos por I_C, dada por:

$$I_C = \omega I_1 + (1 - \omega) I_2.$$

Naturalmente, a questão é determinar a distribuição de probabilidades da variável aleatória I_C, sua média e desvio, o que nos informará sobre o risco da carteira.

A distribuição de probabilidades da taxa de retorno da carteira I_C é dada pelos pares $(I_C, P(I_C))$, onde cada valor de I_C é dado por:

$$I_C = \omega I_1 + (1 - \omega) I_2,$$

substituindo-se todas as combinações das distribuições de probabilidades de I_1 e I_2.

Quanto a $P(I_C)$, é dada por:

$$P(I_C) = P(I_1, I_2) = P(I_1).P(I_2 / I_1)$$

e, neste caso, temos um sério complicador quando as variáveis I_1 e I_2 são dependentes, o que muitas vezes ocorre. Caso I_1 e I_2 sejam independentes, teremos $P(I_C) = P(I_1).P(I_2)$, o que muito facilitará nossos cálculos.

Naturalmente, obtidos os pares $(I_C, P(I_C))$, será imediato o cálculo da média e do desvio da taxa de retorno da carteira.

5.5.2 Cálculo da Média e do Desvio da Taxa de Retorno da Carteira

Procuremos um cálculo direto do retorno da carteira e do risco (desvio) a partir da média e risco dos ativos que compõem a carteira.

Dados $I_1 : D\left(I_{\mu_1}, I_{S_1}\right)$, $I_2 : D\left(I_{\mu_2}, I_{S_2}\right)$, e sabendo que

$$I_C = \omega I_1 + (1 - \omega) I_2,$$

teremos:

A) CÁLCULO DO RETORNO MÉDIO DA CARTEIRA

$$I_{\mu_C} = E\left[I_C\right] = E\left[\omega I_1 + (1 - \omega) I_2\right] =$$

$$= \omega E\left[I_1\right] + (1 - \omega)\, E\left[I_2\right]$$

ou

$$I_{\mu_c} = \omega I_{\mu_1} + (1 - \omega) I_{\mu_2}$$

B) CÁLCULO DO DESVIO DO RETORNO DA CARTEIRA

$$I_{S_C} = S(I_C) = \sqrt{S^2\left(\omega I_1 + (1 - \omega) I_2\right)}$$

$$I_{S_C} = \sqrt{S^2(\omega I_1) + S^2\left((1 - \omega) I_2\right) + 2\operatorname{cov}\left(\omega I_1, (1 - \omega) I_2\right)}$$

$$I_{S_C} = \sqrt{\omega^2 S^2(I_1) + (1 - \omega)^2 S^2(I_2) + 2\omega(1 - \omega)\operatorname{cov}(I_1, I_2)}$$

ou

$$I_{S_C} = \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1 - \omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1 - \omega)\operatorname{cov}(I_1, I_2)}$$

onde:

— se I_1 e I_2 são independentes, então cov $(I_1, I_2) = 0$;

— se I_1 e I_2 são dependentes devemos calcular a cov (I_1, I_2), que dependerá do cálculo das probabilidades conjuntas $P(I_1, I_2)$.

5.5.3 Composição da Carteira de Risco Mínimo

Sendo o risco da carteira dado pelo desvio da taxa de retorno da carteira, queremos determinar a composição de ativos $(\omega; (1-\omega))$ que nos dê o risco/desvio mínimo.

Como o risco é dado por

$$I_{S_C} = \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + (1-\omega)^2 I_{S_2}^2 + 2\omega(1-\omega)\operatorname{cov}(I_1, I_2)},$$

a condição de mínimo ocorrerá para:

$$\frac{\partial I_{S_C}}{\partial \omega} = 0.$$

Antes de partirmos para a derivada parcial da função desvio, vamos desenvolver a expressão do desvio da carteira e reagrupá-la em função de ω, como segue:

$$I_{S_C} = \sqrt{\omega^2 I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\omega I_{S_2}^2 + \omega^2 I_{S_2}^2 + 2\omega \operatorname{cov}(I_1, I_2) - 2\omega^2 \operatorname{cov}(I_1, I_2)}$$

ou

$$I_{S_C} = \sqrt{\left(I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)\right)\omega^2 - 2\left(I_{S_2}^2 - \operatorname{cov}(I_1, I_2)\right)\omega + I_{S_2}^2}\,.$$

Indiquemos:

$$I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2) = A$$

e

$$I_{S_2}^2 - \operatorname{cov}(I_1, I_2) = B,$$

então

$$I_{S_C} = \sqrt{A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2}\,.$$

Calculando a derivada parcial, teremos:

$$\frac{\partial I_{S_C}}{\partial \omega} = \frac{2A\omega - 2B}{2\sqrt{A\omega^2 - 2B\omega + I_{S_2}^2}}$$

Para que $\frac{\partial I_{S_C}}{\partial \omega} = 0$ basta que $2A\omega - 2B = 0$; daí, o mínimo de I_{S_C} ocorrerá para $\omega = \frac{B}{A}$.

Substituindo $\omega = \frac{B}{A}$. na equação de I_{S_C} , obteremos o valor do risco/desvio mínimo. Assim:

$$I_{S_{C_{min}}} = \sqrt{A.\frac{B^2}{A^2} - 2B.\frac{B}{A} + I_{S_2}^2}$$

ou

$$I_{S_{C_{min}}} = \sqrt{I_{S_2}^2 - \frac{B^2}{A}}.$$

Conclusão

A condição de risco mínimo da carteira ocorrerá para a composição

$$(\omega; 1 - \omega),$$

onde:

$$\omega = \frac{B}{A}$$

e o risco mínimo será:

$$I_{S_{C_{min}}} = \sqrt{I_{S_2}^2 - \frac{B^2}{A}}.$$

5.5.4 Curva Risco-Retorno da Carteira

Como $I_{\mu_C} = \omega I_1 + (1 - \omega) I_{\mu_2}$, então, tirando o valor de ω, temos:

$$I_{\mu_C} = \left(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}\right)\omega + I_{\mu_2} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{I_{\mu_C} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}.$$

Substituindo o valor de ω na equação que nos dá o valor de I_{S_C} , teremos:

$$I_{S_C} = \sqrt{A\left(\frac{I_{\mu_C} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}\right)^2 - 2B\frac{I_{\mu_C} - I_{\mu_2}}{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}} + I_{S_2}^2}$$

ou, ainda,

$$l_{S_C}^2 = \frac{A\left(l_{\mu_C} - l_{\mu_2}\right)^2 - 2B\left(l_{\mu_C} - l_{\mu_2}\right)\left(l_{\mu_1} - l_{\mu_2}\right)}{\left(l_{\mu_1} - l_{\mu_2}\right)^2} + l_{S_2}^2 .$$

Fazendo:

$$l_{\mu_1} - l_{\mu_2} = R$$

e

$$l_{\mu_C} - l_{\mu_2} = Z,$$

o que equivale a uma translação em relação ao eixo dos riscos, de maneira que a curva a ser obtida não modifica sua forma, teremos:

$$l_{S_C}^2 = \frac{AZ^2 - 2BZR}{R^2} + l_{S_2}^2$$

ou

$$l_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - l_{S_2}^2 = 0.$$

Discussão da Curva Risco-Retorno de uma Carteira com Dois Ativos

Nosso problema é obter a forma da curva risco-retorno definida pela equação acima, nas variáveis l_{S_C}, risco da carteira, e $Z = l_{\mu_C} - l_{\mu_2}$, que relaciona o retorno médio da carteira l_{μ_C}.

Lembremo-nos que dada uma equação na forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

devemos calcular os determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se $D_1 \neq 0$, então, a equação representará:

— uma elipse, se $D_2 > 0$;
— uma hipérbole, se $D_2 < 0$;
— uma parábola, se $D_2 = 0$.

Escrevendo nossa equação na forma geral dada, teremos:

$$1.I^2_{S_C} + \left(-\frac{A}{R^2}\right)Z^2 + 2.0.I_{S_C}.Z + 2.0.I_{S_C} + 2.\frac{B}{R}.Z + \left(-I^2_{S_2}\right) = 0.$$

Assim, os determinantes serão dados por:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} & \frac{B}{R} \\ 0 & \frac{B}{R} & -I^2_{S_2} \end{vmatrix} = \frac{A}{R^2}.I^2_{S_2} - \frac{B^2}{R^2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} \end{vmatrix} = -\frac{A}{R^2}$$

Caso a:

$D_1 = 0$

Se $D_1 = 0$, então $\frac{A}{R^2}.I^2_{S_2} = \frac{B^2}{R^2}$

ou $A.I^2_{S_2} = B^2$, com $R = I_{\mu_1} - I_{\mu_2} \neq 0$.

Substituindo os valores de A e B, teremos:

$$\left[I^2_{S_1} + I^2_{S_2} - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)\right]I^2_{S_2} = \left[I^2_{S_2} - \operatorname{cov}(I_1, I_2)\right]^2,$$

então

$$I^2_{S_1}.\,I^2_{S_2} + I^4_{S_2} - 2.I^2_{S_2}\operatorname{cov}(I_1, I_2) = I^4_{S_2} - 2I^2_{S_2}\operatorname{cov}(I_1, I_2) + \operatorname{cov}^2(I_1, I_2)$$

ou

$$I^2_{S_1}.\,I^2_{S_2}\ \operatorname{cov}^2(I_1, I_2)$$

e daí

$$\operatorname{cov}(I_1, I_2) = \pm I_{S_1}.\,I_{S_2},$$

o que ocorrerá caso os ativos considerados tenham correlação linear perfeita, positiva ou negativa.

Nestas condições, teremos:

$$A = I^2_{S_1} + I^2_{S_2} - 2\left(\pm I_{S_1} I_{S_2}\right) = \left(I_{S_2} \mp I_{S_1}\right)^2 = U^2$$

$$B = I^2_{S_2} - \left(\pm I_{S_1} I_{S_2}\right) = I_{S_2}\left(I_{S_2} \mp I_{S_1}\right) = I_{S_2}.U.$$

A partir da equação

$$l_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - l_{S_2}^2 = 0,$$

substituindo os valores de A e B, vem:

$$\frac{U^2}{R^2}Z^2 - 2\frac{l_{S_2}U}{R}Z + l_{S_2}^2 - l_{S_C}^2 = 0.$$

O discriminante da equação em Z será:

$$d = \frac{4l_{S_2}^2U^2}{R^2} - 4.\frac{U^2}{R^2}.\left(l_{S_2}^2 - l_{S_C}^2\right) = 4.\frac{U^2}{R^2}.l_{S_C}^2;$$

logo,

$$Z = \frac{\frac{2l_{S_2}U}{R} \pm \frac{2Ul_{S_C}}{R}}{\frac{2U^2}{R^2}} = \frac{l_{S_2} \pm l_{S_C}}{\frac{U}{R}} = \frac{R}{U}\left(l_{S_2} \pm l_{S_C}\right).$$

Assim, fatorando a equação de segundo grau, obteremos as equações das retas:

$$Z - \frac{R}{U}\left(l_{S_2} + l_{S_C}\right) = 0 \text{ e } Z - \frac{R}{U}\left(l_{S_2} - l_{S_C}\right) = 0.$$

Substituindo os valores de Z, R e U, teremos as retas:

$$r_1 : l_{\mu_C} = \frac{l_{\mu_1} - l_{\mu_2}}{l_{S_2} \mp l_{S_1}} l_{S_C} + \frac{l_{\mu_1} - l_{\mu_2}}{l_{S_2} \mp l_{S_1}} l_{S_2} + l_{\mu_2}$$

e

$$r_2 : l_{\mu_C} = -\frac{l_{\mu_1} - l_{\mu_2}}{l_{S_2} \mp l_{S_1}} l_{S_C} + \frac{l_{\mu_1} - l_{\mu_2}}{l_{S_2} \mp l_{S_1}} l_{S_2} + l_{\mu_2},$$

onde utilizamos $l_{S_2} - l_{S_1}$, no caso de correlação positiva, e $l_{S_2} + l_{S_1}$ no caso de correlação negativa. Em qualquer dos casos, as retas serão perpendiculares.

Caso b: $D_1 \neq 0$ e $D_2 = 0$.

Se $D_1 \neq 0$, devemos examinar o determinante D_2, onde $D_2 = -\frac{A}{R^2}$. Substituindo o valor de A teremos:

$$D_2 = -\frac{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)}{R^2}.$$

Se $D_2 \geq 0$, teremos:

$$-\left(I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2\right) + 2\operatorname{cov}(I_1, I_2) \geq 0$$

$$I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2) \leq 0$$

ou

$$I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 \leq 2\operatorname{cov}(I_1, I_2).$$

Sabemos que:

$$-1 \leq \frac{\operatorname{cov}(I_1, I_2)}{I_{S_1}\, I_{S_2}} \leq 1$$

ou

$$-I_{S_1}\, I_{S_2} \leq \operatorname{cov}(I_1, I_2) \leq I_{S_1}\, I_{S_2};$$

logo,

$$I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 \leq 2\operatorname{cov}(I_1, I_2) \leq 2 I_{S_1}\, I_{S_2},$$

então,

$$I_{S_1}^2 - 2 I_{S_1}\, I_{S_2} + I_{S_2}^2 \leq 0$$

ou

$$\left(I_{S_1} - I_{S_2}\right)^2 \leq 0,$$

o que será válido apenas para $I_{S_1} - I_{S_2} = 0$, ou seja, $I_{S_1} = I_{S_2}$.

Assim, se $I_1 = I_2$, teremos:

$$2 I_{S_1}^2 = 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)$$

ou

$$\operatorname{cov}(I_1, I_2) = I_{S_1}^2 = I_{S_2}^2.$$

Mas isto só será possível caso

$$\frac{\operatorname{cov}(I_1, I_2)}{I_{S_1}\, I_{S_2}} = 1,$$

ou seja, se houver perfeita correlação linear positiva.

Assim, $\operatorname{cov}(I_1, I_2) = I_{S_1}^2 = I_{S_2}^2 = S^2$; substituindo na equação da carteira, dada por:

$$I_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - I_{S_2}^2 = 0$$

onde

$$A = 2S^2 - 2S^2 = 0 \ \text{ e } \ B = S^2 - S^2 = 0,$$

temos:

$$I_{S_C}^2 - S^2 = 0 \ \text{ ou } \ I_{S_C} = S,$$

o que nos dá a equação de uma reta paralela ao eixo dos retornos da carteira; ou seja, a carteira terá sempre o mesmo risco, para qualquer composição da mesma.

Caso c:

Finalmente, podemos concluir que, em geral, $D_1 \neq 0$ e $D_2 < 0$, exceto nos casos de correlação perfeita entre os retornos dos ativos que compõem a carteira. Assim, a curva representativa do retorno médio de uma carteira em função do risco, será uma hipérbole; menos nos casos citados onde a representação gráfica é a da reta.

5.5.5 Equação Reduzida da Hipérbole, correspondente ao Risco-retorno de uma Carteira com dois ativos

Partindo da equação

$$I_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - I_{S_2}^2 = 0,$$

podemos escrevê-la na forma:

$$I_{S_C}^2 - \left[\left(\frac{\sqrt{A}\,Z}{R}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{A}\,Z}{R}\frac{B}{\sqrt{A}} + \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2\right] + \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 - I_{S_2}^2 = 0$$

ou

$$I_{S_C}^2 - \left(\frac{\sqrt{A}\,Z}{R} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 + \left[\left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 - I_{S_2}^2\right] = 0$$

$$I_{S_C}^2 - \frac{\left(Z - \frac{RB}{A}\right)^2}{\frac{R^2}{A}} = I_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2$$

Daí, substituindo $Z = I_{\mu_C} - I_{\mu_2}$, temos:

$$\frac{\left(I_{S_C} - 0\right)^2}{I_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2} - \frac{\left(I_{\mu_C} - \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right)\right)^2}{\frac{R^2}{A}\left[I_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2\right]} = 1,$$

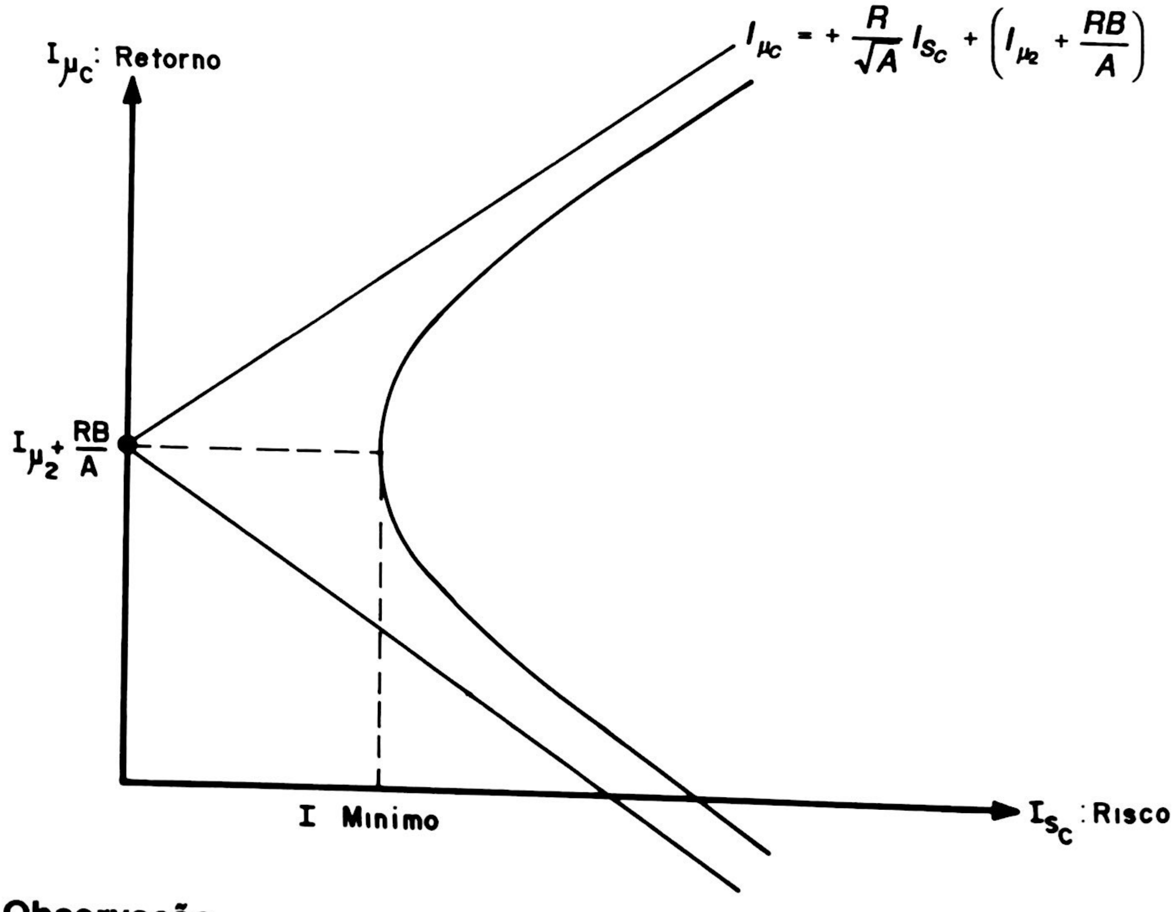
o que nos dá a equação reduzida da hipérbole de centro

$$\left(I_{S_C}; I_{\mu_C}\right)_{\text{centro}} = \left(0; I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right);$$

com assíntotas:

$$I_{\mu_C} = \pm \frac{R}{\sqrt{A}} I_{S_C} + \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right).$$

O gráfico será dado por:



Observação

Lembrando que a equação reduzida da hipérbole, de centro $(h;k)$, é dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

então, as assíntotas são dadas por:

$$y = \frac{b}{a}(x - h) + k,$$

a de inclinação para a direita, e

$$y = -\frac{b}{a}(x - h) + k,$$

a de inclinação para a esquerda.

Em nosso caso, as assíntotas serão dadas por:

$$I_{\mu_C} = \pm\frac{R}{\sqrt{A}} I_{S_C} + \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right),$$

ou substituindo R, B e A teremos:

$$I_{\mu_C} = \pm\frac{\left(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}\right)}{\sqrt{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)}} I_{S_C} + I_{\mu_2} + \frac{\left(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}\right)\left(I_{S_2}^2 - \operatorname{cov}(I_1, I_2)\right)}{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)}.$$

Exemplo 1 — Cálculo do Risco e Retorno de uma Carteira

Consideremos que três investidores estudem a possibilidade de aplicar em ouro, ações ou CDB por um prazo de 180 dias. O primeiro passo será estabelecer as distribuições de probabilidade dos vários ativos. Isto será feito com base no histórico das aplicações e em fatores que os investidores julguem importantes para o futuro das aplicações. Em termos de economia brasileira é interessante trabalharmos com retornos previstos, expurgados os efeitos inflacionários. Deste modo, o efeito da inflação será captado como um risco sistemático devido à conjuntura a que o ativo está sujeito. Em geral, denominamos o retorno previsto, expurgada a inflação, de retorno real, embora saibamos que as componentes de risco próprio do ativo estarão embutidas nesta taxa.

Para efeito do exemplo que queremos elaborar, vamos admitir as distribuições de probabilidades dos ativos, segundo as tabelas abaixo:

Retorno — OURO		
ao mês	no período (180 dias)	Probabilidade
0,01	0,0615	0,50
0,02	0,1262	0,20
-0,01	-0,0585	0,30

Retorno — AÇÕES		
do mês	do período (180 dias)	Probabilidade
0,01	0,0615	0,40
0,03	0,1941	0,40
0,04	0,2653	0,10
-0,06	-0,3101	0,10

Retorno — CDB		
ao mês	no período	Probabilidade
0,005	0,0304	0,40
0,015	0,0934	0,60

A) CÁLCULO DAS MÉDIAS E DESVIOS (RISCOS) DOS ATIVOS

Para cada ativo fixado podemos estabelecer a média e o desvio (risco), como segue:

1. Ouro

$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0615 \times 0{,}50 + 0{,}1262 \times 0{,}20 + (-0{,}0585) \times 0{,}30 = \\ = 0{,}0384$$

Assim, o retorno médio do ouro será:

$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0384 = 3{,}84\% \text{ a.s.}$$

$$E^2_{ouro} = (0{,}0615)^2 \times 0{,}50 + (0{,}1262)^2 \times 0{,}20 + (-0{,}0585)^2 \times 0{,}30 = \\ = 0{,}0061,$$

então,

$$I_{s_{ouro}} = \sqrt{0{,}0061 - (0{,}0384)^2} = 0{,}0680.$$

$E^2 - I_\mu^2$

Logo, o desvio será:

$$I_{s_{ouro}} = 0{,}0680 = 6{,}80\% \text{ a.s.}$$

2. Ações

$$I_{\mu_{ações}} = 0{,}0615 \times 0{,}40 + 0{,}1941 \times 0{,}40 + \\ + 0{,}2653 \times 0{,}10 + (-0{,}3101) \times 0{,}10 \\ = 0{,}0978$$

Desta forma, o retorno médio das ações será:

$$I_{\mu_{ações}} = 0{,}0978 = 9{,}78\% \text{ a.s.}$$

$$\begin{aligned} E^2_{ações} &= (0{,}0615)^2 \times 0{,}40 + (0{,}1941)^2 \times 0{,}40 + \\ &+ (0{,}2653)^2 \times 0{,}10 + (-0{,}3101)^2 \times 0{,}10 = \\ &= 0{,}0332, \end{aligned}$$

então,

$$I_{S_{ações}} = \sqrt{0{,}0332 - (0{,}0978)^2} = 0{,}1539.$$

$E^2 - I_\mu{}^2$

Logo, o desvio será:

$$I_{S_{ações}} = 0{,}1539 = 15{,}39\% \text{ a.s.}$$

3. CDB

$$I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0304 \times 0{,}40 + 0{,}0934 \times 0{,}60 = 0{,}0682$$

Então, o retorno médio do CDB será:

$$I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0682 = 6{,}82\% \text{ a.s.}$$

$$E^2_{CDB} = (0{,}0304)^2 \times 0{,}40 + (0{,}0934)^2 \times 0{,}60 = 0{,}0056,$$

então,

$$I_{S_{CDB}} = \sqrt{0{,}0056 - (0{,}0682)^2} = 0{,}0309.$$

Logo, o desvio será:

$$I_{S_{CDB}} = 0{,}0309 = 3{,}09\% \text{ a.s.}$$

B) COMPOSIÇÃO DAS CARTEIRAS

Fixadas as distribuições de probabilidades dos vários ativos, consideremos que os três investidores componham suas carteiras da seguinte forma:

Investidor	Composição da Carteira (%)		
	Ouro	Ações	CDB
A	40	—	60
B	65	35	—
C	30	20	50

O passo seguinte será calcular o risco e o retorno de cada carteira.

C) CÁLCULO DO RISCO E RETORNO DE CADA CARTEIRA

1. Investidor A

A partir das fórmulas para o cálculo das médias e riscos das carteiras, teremos:

— Retorno médio da carteira A:

$$I_{\mu_A} = 0{,}40 \times I_{\mu_{ouro}} + 0{,}60 \times I_{\mu_{CDB}}$$
$$I_{\mu_A} = 0{,}40 \times 0{,}0384 + 0{,}60 \times 0{,}0682$$
$$I_{\mu_A} = 0{,}0563 = 5{,}63\% \text{ a.s.}$$

— Desvio (risco) da carteira A: I_{S_A}

$$I_{S_A} = \sqrt{0{,}40^2\, I^2_{S_{ouro}} + 0{,}60^2\, I^2_{S_{ouro}} + 2.0{,}40.0{,}60.\operatorname{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)},$$

onde

$$I_{S_{ouro}} = 0{,}0680 \text{ e } I_{S_{CDB}} = 0{,}0309.$$

Nosso problema é calcular a covariância entre os retornos do ouro e do CDB, indicada por $\operatorname{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)$.

Para o cálculo da covariância, devemos conhecer a distribuição conjunta de probabilidades, dos retornos do ouro e CDB, como segue:

		OURO			
		0,0615	0,1262	-0,0585	Probab. CDB
CDB	0,0304	0,20	0,15	0,05	0,40
	0,0934	0,30	0,05	0,25	0,60
	Probab. Ouro	0,50	0,20	0,30	

onde as probabilidades conjuntas, consideradas como dados neste exemplo, podem ser obtidas por freqüência relativa ou probabilidades subjetivas.

Assim, a covariância será dada por:

$$\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) =$$

$$\sum_{I_{ouro}} \sum_{I_{CDB}} \left(I_{ouro} - I_{\mu ouro}\right)\left(I_{CDB} - I_{\mu CDB}\right).P\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= (0{,}0615 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0687).0{,}20 + \\
&+ (0{,}0615 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}30 + \\
&+ (0{,}1262 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0682).0{,}15 + \\
&+ (0{,}1262 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}05 + \\
&+ (-0{,}0585 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0682).0{,}05 + \\
&+ (-0{,}0585 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(I_{ouro} \cdot I_{CDB}) &= (0{,}0231) \times (-0{,}0378) \times 0{,}20 = \\
&+ (0{,}0231) \times (0{,}0252) \times 0{,}30 + \\
&+ (0{,}0878) \times (-0{,}0378) \times 0{,}15 + \\
&+ (0{,}0878) \times (0{,}0252) \times 0{,}05 + \\
&+ (-0{,}0969) \times (-0{,}0378) \times 0{,}05 + \\
&+ (-0{,}0969) \times (0{,}0252) \times 0{,}25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= (-0{,}0002) + (0{,}0002) + (-0{,}0005) + \\
&+ (0{,}0001) + (0{,}0002) + (-0{,}0006)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) = -0{,}0008$$

Calculando o desvio da carteira A, teremos:

$$I_{S_A} = \sqrt{0{,}40^2.0{,}0680^2 + 0{,}60^2.0{,}0309^2 + 2.0{,}40.0{,}60.(-0{,}0008)}$$

daí,

$$I_{S_A} = 0{,}0264 = 2{,}64\%\ \text{a.s.}$$

Conclusão

Carteira A:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 40%; CDB = 60%

RETORNO MÉDIO = 5,63% a.s.

RISCO (DESVIO) = 2,64% a.s.

2. Investidor B

Procedendo da mesma forma que para o investidor A, teremos:

— Retorno médio da carteira B:

$$I_{\mu_B} = 0{,}65 \times I_{\mu_{ouro}} + 0{,}35 \times I_{\mu_{ações}}$$
$$I_{\mu_B} = 0{,}65 \times 0{,}0384 + 0{,}35 \times 0{,}0978$$
$$I_{\mu_B} = 0{,}0592 = 5{,}92\% \text{ a.s.}$$

— Desvio (risco) da carteira B: I_{S_B}

$$I_{S_B} = \sqrt{0{,}65^2 . I^2_{S_{ouro}} + 0{,}35^2 . I^2_{S_{ações}} + 2.0{,}65.0{,}35.\text{cov}\left(I_{ouro}, I_{ações}\right)},$$

onde

$$I_{S_{ouro}} = 0{,}0680 \text{ e } I_{S_{ações}} = 0{,}1539.$$

Novamente, a questão é calcular $\text{cov}\left(I_{ouro}, I_{ações}\right)$.

Como no caso anterior, vamos considerar como conhecida a distribuição conjunta de probabilidades dos retornos por meio da tabela:

		OURO			
		0,0615	0,1262	-0,0585	Prob. Ações
AÇÕES	0,0615	0,20	0,10	0,10	0,40
	0,1941	0,18	0,07	0,15	0,40
	0,2653	0,05	0	0,05	0,10
	-0,3101	0,07	0,03	0	0,10
	Prob. Ouro	0,50	0,20	0,30	

Assim,

$$\text{cov}\left(I_{ouro}, I_{ações}\right) =$$
$$= \sum_{I_{ouro}} \sum_{I_{ações}} \left(I_{ouro} - I_{\mu_{ouro}}\right)\left(I_{ações} - I_{\mu_{ações}}\right) . p\left(I_{ouro}, I_{ações}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(I_{ouro}, I_{ações}\right) = \; & (0{,}0615 - 0{,}0384)\big[(0{,}0615 - 0{,}0978).0{,}20 + \\ & + (0{,}1941 - 0{,}0978).0{,}18 + \\ & + (0{,}2653 - 0{,}0978).0{,}05 + \\ & + (-0{,}3101 - 0{,}0978).0{,}07\big] + \end{aligned}$$

$$+ (0{,}1262 - 0{,}0384)\big[(0{,}0615 - 0{,}0978).0{,}10 +$$
$$+ (0{,}1941 - 0{,}0978).0{,}07 +$$
$$+ (0{,}2653 - 0{,}0978).0 +$$
$$+ (-0{,}3101 - 0{,}0978).0{,}03\big] +$$

$$+ (-0{,}0585 - 0{,}0384)\big[(0{,}0615 - 0{,}0978).0{,}10 +$$
$$+ (0{,}1941 - 0{,}0978).0{,}07 +$$
$$+ (0{,}2653 - 0{,}0978).0{,}05 +$$
$$+ (-0{,}3101 - 0{,}0978).0{,}03\big]$$

Logo, $\mathrm{cov}\left(I_{\text{ouro}}, I_{\text{ações}}\right) = -0{,}0010.$

Calculando o desvio da carteira B, teremos:

$$I_{S_B} = \sqrt{0{,}65^2.0{,}0680^2 + 0{,}35^2.0{,}1539^2 + 2.0{,}65.0{,}35.(-0{,}0010)},$$

assim,

$$I_{S_B} = 0{,}0663 = 6{,}63\%\ \text{a.s.}$$

Conclusão

Carteira B:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 65%; Ações = 35%

RETORNO MÉDIO = 5,92% a.s.

RISCO (DESVIO) = 6,63%

3. Investidor C

Neste caso, temos uma carteira composta de três ativos e devemos examinar a forma de obter o retorno médio da carteira e o desvio. Os cálculos serão análogos aos desenvolvidos, como segue.

— Média da Carteira

$$I_C = 0{,}30.I_{\text{ouro}} + 0{,}20.I_{\text{ações}} + 0{,}50.I_{\text{CDB}}$$

então, a média será

$$I_{\mu_C} = E\left[I_C\right] = E\left[0{,}30.I_{\text{ouro}} + 0{,}20.I_{\text{ações}} + 0{,}50.I_{\text{CDB}}\right]$$
$$I_{\mu_C} = 0{,}30.I_{\mu\text{ouro}} + 0{,}20.I_{\mu\text{ações}} + 0{,}50.I_{\mu\text{CDB}}$$

ou

$$I_{\mu_C} = 0{,}30 \times 0{,}0384 + 0{,}20 \times 0{,}0978 + 0{,}50 \times 0{,}0682 = 0{,}0652.$$

Assim, o retorno médio da carteira C será:

$$I_{\mu_C} = 0,0652 = 6,52\% \text{ a.s.}$$

— Desvio (risco) da carteira

$$I^2_{S_C} = S^2(I_C) = S^2(0,30.I_{ouro} + 0,20.I_{ações} + 0,50.I_{CDB})$$

$$I^2_{S_C} = 0,30^2.I^2_{S_{ouro}} + 0,20^2.I^2_{S_{ações}} + 0,50^2.I^2_{S_{CDB}} +$$

$$+ 2 \times 0,30 \times 0,20 \times \text{cov}(I_{ouro}, I_{ações})$$

$$+ 2 \times 0,30 \times 0,50 \times \text{cov}(I_{ouro}, I_{CDB})$$

$$+ 2 \times 0,20 \times 0,50 \times \text{cov}(I_{ações}, I_{CDB})$$

onde $I_{S_{ouro}} = 0,0680$, $I_{S_{ações}} = 0,1530$ e $I_{S_{CDB}} = 0,0309$.

Devemos calcular a $\text{cov}(I_{ações}, I_{CDB})$ visto que as demais covariâncias já foram calculadas nos casos "a" e "b". Como nos casos anteriores, vamos admitir como conhecida a distribuição conjunta de probabilidades dos retornos das ações e CDB, como segue:

		CDB		
		0,0304	0,0934	Prob. Ações
AÇÕES	0,0615	0,05	0,35	0,40
	0,1941	0,30	0,10	0,40
	0,2653	0,05	0,05	0,10
	-0,3101	0	0,10	0,10
	Prob. CDB	0,40	0,60	

Então,

$$\text{cov}(I_{CDB}, I_{ações}) =$$

$$= \sum_{I_{CDB}} \sum_{I_{ações}} (I_{CDB} - I_{\mu_{CDB}})(I_{ações} - I_{\mu_{ações}}).P(I_{CDB}, I_{ações}).$$

Assim:

$$\text{cov}(I_{CDB}, I_{ações}) = (0,0304 - 0,0682)[(0,0615 - 0,0978).0,05 +$$
$$+ (0,1941 - 0,0978).0,30 +$$
$$+ (0,2653 - 0,0978).0,05 +$$
$$+ (-0,3101 - 0,0978).0] +$$

$$
\begin{aligned}
&+ (0,0934 - 0,0682)\big[(0,0615 - 0,0978).0,35 + \\
&+ (0,1941 - 0,0978).0,10 + \\
&+ (0,2653 - 0,0978).0,05 + \\
&+ (-0,3101 - 0,0978).0,10\big]
\end{aligned}
$$

$$\text{cov}\left(l_{CDB}, l_{ações}\right) = -0,0022$$

Calculando o desvio da carteira C, teremos:

$$
\begin{aligned}
l^2_{S_C} = \; & 0,30^2 \times 0,0680^2 + 0,20^2 \times 0,1539^2 + 0,50^2 \times 0,0309^2 + \\
& + 2 \times 0,30 \times 0,20 \times (-0,0010) + \\
& + 2 \times 0,30 \times 0,50 \times (-0,0008) + \\
& + 2 \times 0,20 \times 0,50 \times (-0,0022),
\end{aligned}
$$

assim,

$$l_{S_C} = 0,0283 = 2,83\% \text{ a.s.}$$

Conclusão

Carteira C:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 30%; Ações = 20%; CDB = 50%
RETORNO MÉDIO = 6,52%
RISCO (DESVIO) = 2,83%

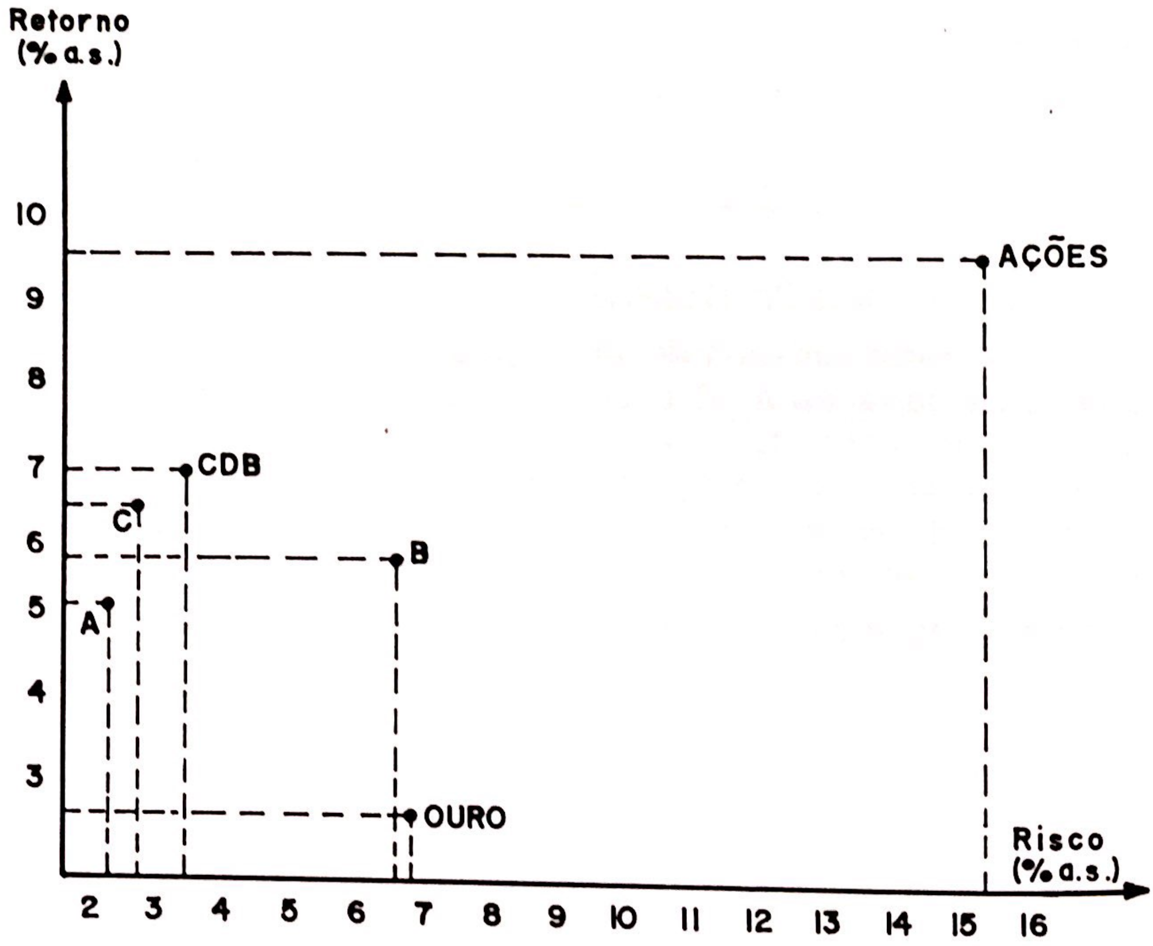
D) COMPARAÇÃO DAS CARTEIRAS

Vamos elaborar um quadro onde poderemos examinar de forma comparativa as carteiras A, B e C e, ainda, carteiras formadas de um único ativo. Acompanhando o exemplo, teríamos carteiras formadas apenas de ouro, ou somente de ações ou de CDB. O efeito diversificação é observado quando conseguimos diminuir o risco da carteira, mantendo ou melhorando o retorno.

A tabela a seguir sintetiza os resultados obtidos no exemplo:

Carteira	Composição da carteira (%)			Retorno Médio % a.s.	Risco-Desvio % a.s.
	Ouro	Ações	CDB		
1. Ouro	100	—	—	3,84	6,80
2. Ações	—	100	—	9,78	15,39
3. CDB	—	—	100	6,82	3,09
4. A	40	—	60	5,63	2,64
5. B	65	35	—	5,92	6,63
6. C	30	20	50	6,52	2,83

Podemos colocá-los em um gráfico risco-retorno:



Exemplo 2 — Curva Risco-Retorno de uma carteira com dois ativos

Já vimos que o retorno médio de uma carteira e seu risco definem uma curva representada por uma hipérbole, em que os pontos da hipérbole são obtidos conforme variamos a composição dos dois ativos que fazem parte da carteira.

Consideremos, com base no exemplo anterior, as carteiras compostas dos ativos ouro e CDB. Teremos uma família de carteiras ouro-CDB, conforme a composição ω de ouro e $(1 - \omega)$ de CDB, da qual a carteira A, com 40% de ouro e 60% de CDB, é um dos membros.

Sabemos que a família de carteiras ouro-CDB apresenta retorno médio e risco dados por:

Retorno médio da carteira ouro-CDB:

$$I_\mu = \omega . I_{\mu_{ouro}} + (1 - \omega) I_{\mu_{CDB}},$$

e risco (desvio) da carteira ouro-CDB:

$$I_S = \sqrt{\omega^2 . I^2_{S_{ouro}} + (1 - \omega)^2 . I^2_{S_{CDB}} + 2\omega(1 - \omega)\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB})},$$

onde

$$I_{S_{ouro}} = 0{,}0680; \quad I_{S_{CDB}} = 0{,}0309,$$

$$\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) = -0{,}0008,$$

$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0384 \text{ e } I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0682,$$

dados obtidos no éxemplo anterior.

A) A CARTEIRA OURO-CDB, COM COMPOSIÇÃO DE RISCO MÍNIMO

Conforme expressão obtida, a composição da carteira que nos dá o ponto de risco mínimo será:

$$\omega_{min} = \frac{I^2_{S_{CDB}} - \operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB})}{I^2_{S_{ouro}} + I^2_{S_{CDB}} - 2\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB})},$$

assim,

$$\omega_{min} = \frac{(0{,}0309)^2 - (-0{,}0008)^2}{(0{,}0680)^2 + (0{,}0309)^2 - 2(-0{,}0008)} = 0{,}2444.$$

Desta forma, a carteira ouro-CDB de risco mínimo apresenta a composição:

Ouro: 24,44%
CDB: 75,56%.

Seu retorno médio será

$$I_\mu = 0{,}2444 . 0{,}0384 + 0{,}7556 . 0{,}0682 = 0{,}0609 = 6{,}09\% \text{ a.s.}$$

e risco (desvio)

$$I_S^2 = (0{,}2444)^2 . (0{,}0680)^2 + (0{,}7556)^2 . (0{,}0309)^2 + 2 . 0{,}2444 . 0{,}7556 . (-0{,}0008)$$

ou seja,

$$I_S = 0{,}0229$$

ou

$$I_{S\text{mínimo}} = 2{,}29\% \text{ a.s.},$$

que nos dá o risco mínimo da família de carteiras ouro-CDB.

B) CURVA RISCO-RETORNO DAS CARTEIRAS OURO-CDB

Escrevendo as equações do retorno médio e do risco das carteiras ouro-CDB, com os dados conhecidos, teremos:

$$I_\mu = \omega . 0{,}0384 + (1 - \omega) . 0{,}0682$$

ou

$$I_\mu = -0{,}0298\omega + 0{,}0682.$$

Então,

$$\omega = -33{,}5570 I_\mu + 2{,}2886.$$

Em relação ao desvio teremos:

$$I_S = \sqrt{\omega^2 . 0{,}0680^2 + (1 - \omega)^2 . 0{,}0309^2 + 2\omega(1 - \omega)(-0{,}0008)}$$

ou

$$I_S^2 = 0{,}0072\,\omega^2 - 0{,}0035\,\omega + 0{,}0010.$$

Nota: Observe-se que da equação acima, parábola em ω, podemos tirar a composição da carteira com I_S^2 de valor mínimo, o que corresponde ao risco mínimo. Para tanto, basta calcular a abscissa ω do ponto de mínimo, assim:

$$\omega_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-0{,}0035)}{2.0{,}0072} = 0{,}2438,$$

o que, a menos de aproximações, é o valor obtido no item a, deste exemplo.

Substituindo o valor de ω na equação de I_S^2, teremos:

$$I_S^2 = 0{,}0072\left(-33{,}5570 I_\mu + 2{,}2886\right)^2 - 0{,}0035\left(-33{,}5570 I_\mu + 2{,}2886\right) + 0{,}0010,$$

assim,

$$I_S^2 = 8{,}08385 I_\mu^2 - 0{,}98519 I_\mu + 0{,}03059.$$

Compondo os quadrados podemos obter a equação reduzida da hipérbole, como segue:

$$I_S^2 - 8{,}08385\left[\left(I_\mu - 0{,}06093\right)^2 + 0{,}00007\right] = 0$$

ou

$$\frac{(I_S - 0)^2}{0{,}00051} - \frac{\left(I_\mu - 0{,}06093\right)^2}{0{,}00007} = 1$$

Nota: Os cálculos foram desenvolvidos com nove casas decimais e posteriormente arredondados.

A equação obtida corresponde a uma hipérbole de centro (0 ; 0,06093) e parâmetros $\sqrt{0{,}00051}$ e $\sqrt{0{,}00007}$.

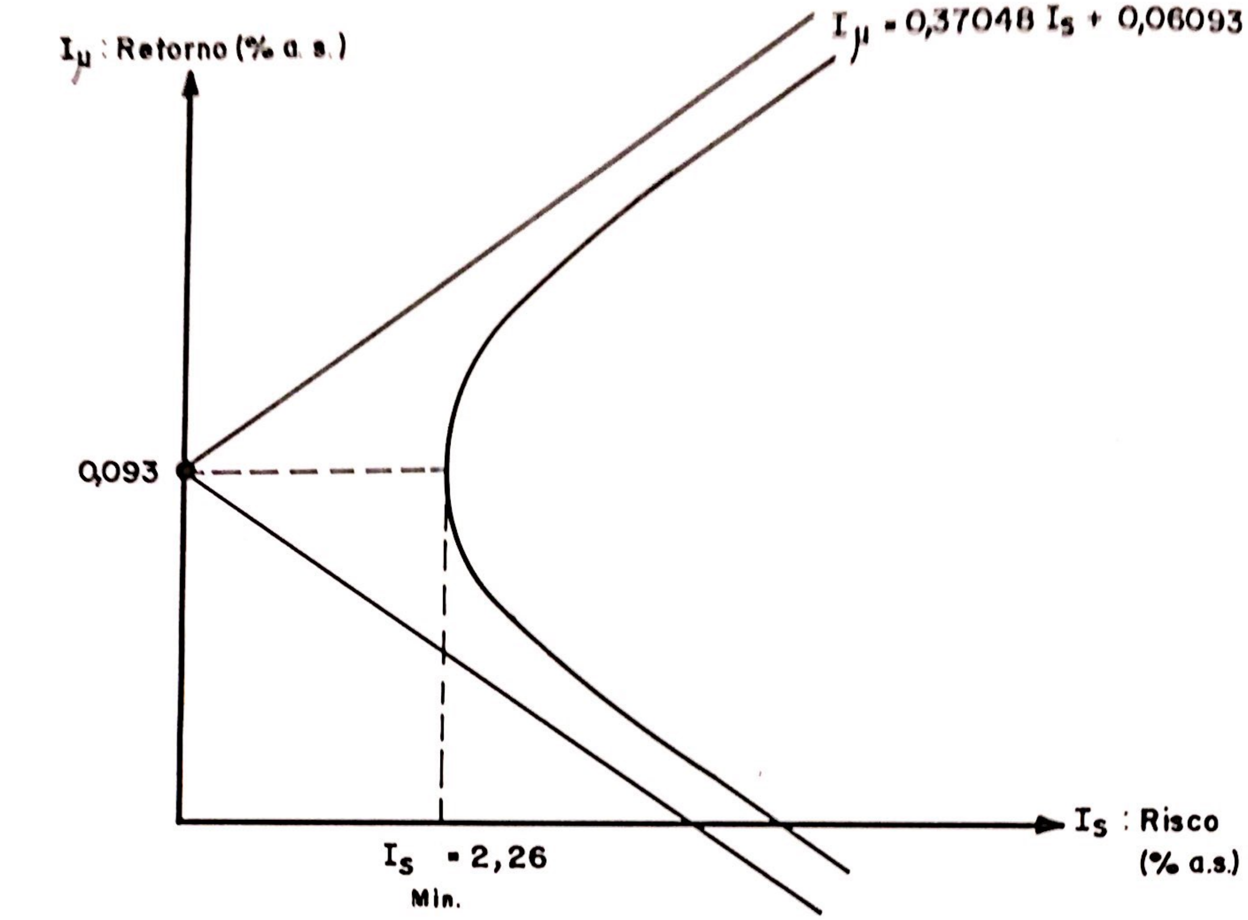
As assíntotas serão dadas por

$$\frac{I_S}{\sqrt{0{,}00051}} \pm \frac{I_\mu - 0{,}06093}{\sqrt{0{,}00007}} = 0;$$

assim, as assíntotas têm equações:

$$I_\mu = -0{,}37048\ I_S + 0{,}06093 \quad e \quad I_\mu = 0{,}37048\ I_S + 0{,}06093$$

O gráfico da hipérbole será:



Observações

a) Para I_μ = 0,06093 podemos obter o valor de $I_{S_{min}}$, como segue:

$$\frac{(I_S - 0)^2}{0{,}00051} - \frac{(0{,}06093 - 0{,}06093)^2}{0{,}00007} = 1$$

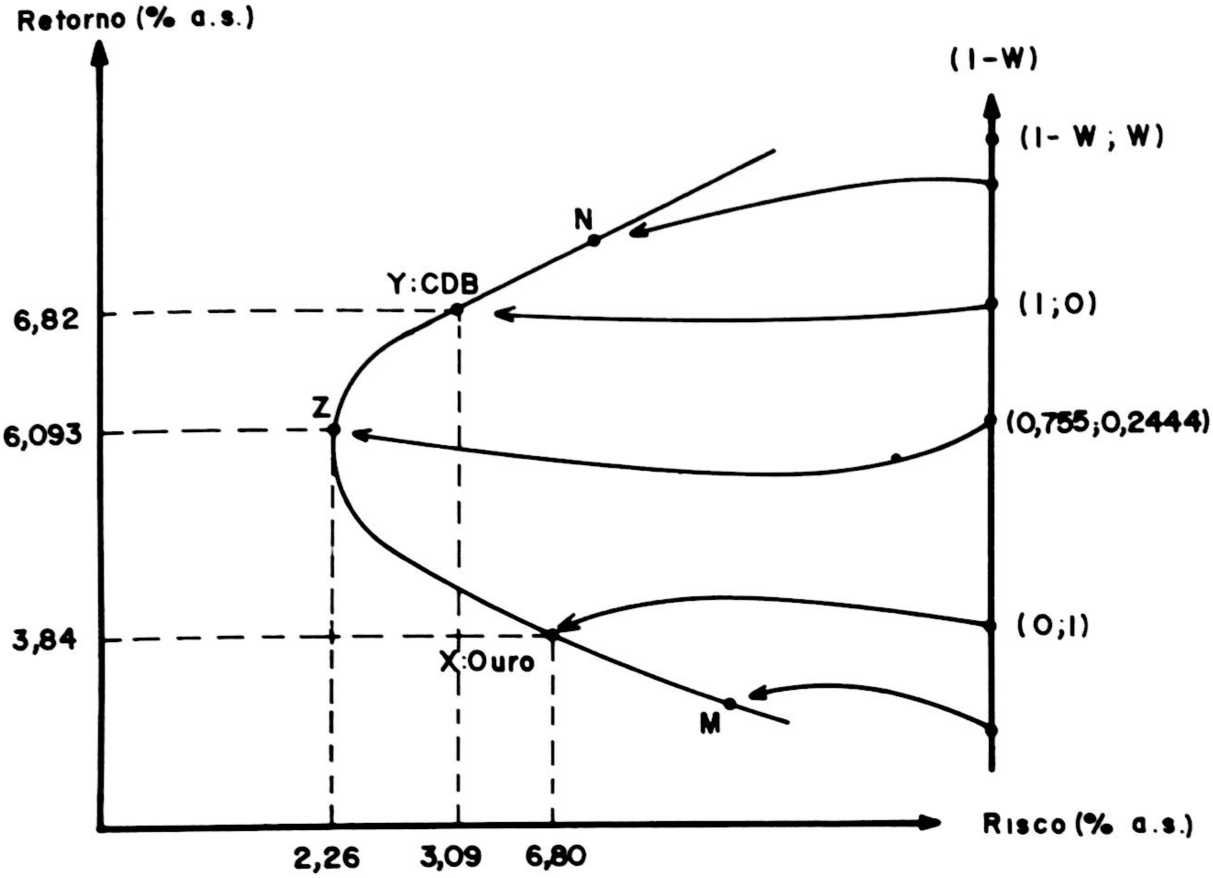
ou

$$I_S = \sqrt{0{,}00051} = 0{,}0226;$$

assim $I_{S_{min}}$ = 2,266% a.s.

Notemos que ocorre uma diferença, devido à aproximação no cálculo do desvio mínimo de 2,29% a.s. para 2,26% a.s.

b) Examinando a variação de composição da carteira, ω e $(1 - \omega)$, conforme o gráfico a seguir, teremos:



— Construímos um eixo orientado segundo os valores crescentes de $(1 - \omega)$ e indicamos os pares $(1 - \omega; \omega)$.

— O ponto X corresponde a uma carteira composta apenas de ouro e o ponto Y a uma carteira apenas de CDB.

— Caminhando do ponto X para o Y, segundo a hipérbole, obtemos pontos que correspondem às carteiras compostas de CDB e ouro, de forma a diversificar o risco. Estas carteiras apresentam retornos maiores que o investimento apenas em ouro e com risco menor.

— Caminhando do ponto Z para Y, sobre a hipérbole, obtemos as carteiras com melhores composições de ouro e CDB, em termos de retornos, com riscos menores que os dois ativos considerados separadamente. Perde-se alguma rentabilidade, comparativamente ao CDB, mas é possível obtermos uma carteira com menor risco comparativo. Por exemplo, uma carteira com 20% de ouro e 80% de CDB apresentará um retorno médio de 6,22% a.s. e risco de 2,43% a.s.

c) Os pontos sobre a hipérbole, complementares aos pontos entre X e Y, tais como M e N, não correspondem às carteiras na acepção do termo, mas nos permitem uma interpretação muito interessante.

— Consideremos, por exemplo, o ponto M, em que

$$\omega = 1{,}4 \text{ e } (1 - \omega) = -0{,}40.$$

Relaxando o conceito, isto corresponderia a uma carteira com 140% de ouro e – 40% de CDB. Podemos interpretar esta situação, considerando que aplicamos 100% dos recursos disponíveis em ouro e, ainda, tomamos recursos, nas condições do CDB, no volume de mais 40% que também foram aplicados em ouro.

— Como os recursos foram tomados a 6,82% a.s. com risco de 3,09% a.s., condições do CDB, e aplicados em ouro a 3,84% a.s., com risco de 6,80% a.s., é natural que nossa carteira, no ponto M, tenha menor retorno e maior risco. Efetuando os cálculos, obteremos para a operação um retorno médio de 2,65% a.s., com risco de 10,11% a.s.

— O ponto N é interpretado da mesma forma que o caso anterior, invertendo-se a aplicação e as condições de captação dos recursos. Assim, estaríamos captando recursos nas condições do ouro e aplicando-os em CDB. Em relação ao ponto Y, estaremos aumentando o retorno, mas aumentando o risco, em função das condições da captação. Como exemplo, consideremos um investimento de 140% em CDB, sendo 100% de recursos próprios e 40% captados nas condições do ouro, ou seja, a 3,84% a.s., com risco de 6,80% a.s. Assim, teremos que $\omega = -0{,}40$ e $(1 - \omega) = 1{,}40$. Fazendo os cálculos da operação, obteremos um retorno médio de 8,01% a.s., com risco de 5,96% a.s. As carteiras desse tipo são denominadas **carteiras alavancadas**.

5.5.6 Carteiras com mais de dois ativos de risco

Consideremos uma carteira formada pelos ativos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ com retornos aleatórios $I_1, I_2, \ldots, I_n$, respectivamente. Indiquemos por $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \ldots, I_{\mu_n}$ os retornos médios dos ativos e por $I_{S_1}, I_{S_2}, \ldots, I_{S_n}$ os desvios, respectivamente.

Sabemos que o retorno da carteira I_C, será dado por

$$I_C = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_n I_n.$$

Calculemos o retorno médio da carteira e seu desvio.

Média

$$I_{\mu_C} = E\left[I_C\right] = E\left[\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_n I_n\right] =$$
$$= \omega_1 E\left[I_1\right] + \omega_2 E\left[I_2\right] + \ldots + \omega_n E\left[I_n\right]$$

ou

$$I_{\mu_C} = \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \ldots + \omega_n I_{\mu_n} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j I_{\mu_j}$$

Desvio

$$I_{S_C}^2 = S^2(I_C) = S^2(\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_n I_n)$$

$$\begin{aligned} I_{S_C}^2 = {} & S^2(\omega_1 I_1) + S^2(\omega_2 I_2) + \ldots + S^2(\omega_n I_n) + \\ & + 2\operatorname{cov}(\omega_1 I_1, \omega_2 I_2) + 2\operatorname{cov}(\omega_1 I_1, \omega_3 I_3) + \ldots + 2\operatorname{cov}(\omega_1 I_1, \omega_n I_n) + \\ & + 2\operatorname{cov}(\omega_2 I_2, \omega_3 I_3) + \ldots + 2\operatorname{cov}(\omega_2 I_2, \omega_n I_n) + \\ & + \ldots + \\ & 2\operatorname{cov}(\omega_{n-1} I_{n-1}, \omega_n I_n) \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$S^2(a.x) = a^2.S^2(x); \quad a = \text{constante}$$

e

$$\operatorname{cov}(ax, by) = a.b.\operatorname{cov}(x, y); \quad a, b = \text{constante},$$

então,

$$\begin{aligned} I_{S_C}^2 = {} & \omega_1^2.S^2(I_1) + \omega_2^2.S^2(I_2) + \ldots + \omega_n^2.S^2(I_n) + \\ & + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(I_1, I_2) + 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(I_1, I_3) + \ldots + 2\omega_1\omega_n \operatorname{cov}(I_1, I_n) + \\ & + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(I_2, I_3) + \ldots + 2\omega_2\omega_n \operatorname{cov}(I_2, I_n) + \\ & + \ldots + \\ & + 2\omega_{n-1}\omega_n \operatorname{cov}(I_{n-1}, I_n). \end{aligned}$$

Como $S^2(I_j) = I_{S_j}^2$; $j = 1, n$, então teremos:

$$I_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2.I_{S_j}^2 + 2\sum_{j>k}^{n} \omega_j\omega_k \operatorname{cov}(I_j, I_k).$$

5.5.7 Curva Risco-Retorno para carteiras com mais de dois ativos

Consideremos, inicialmente, uma carteira composta por três ativos A_1, A_2, A_3, em que conhecemos as distribuições de probabilidades dos retornos I_1, I_2, I_3, para um período fixado.

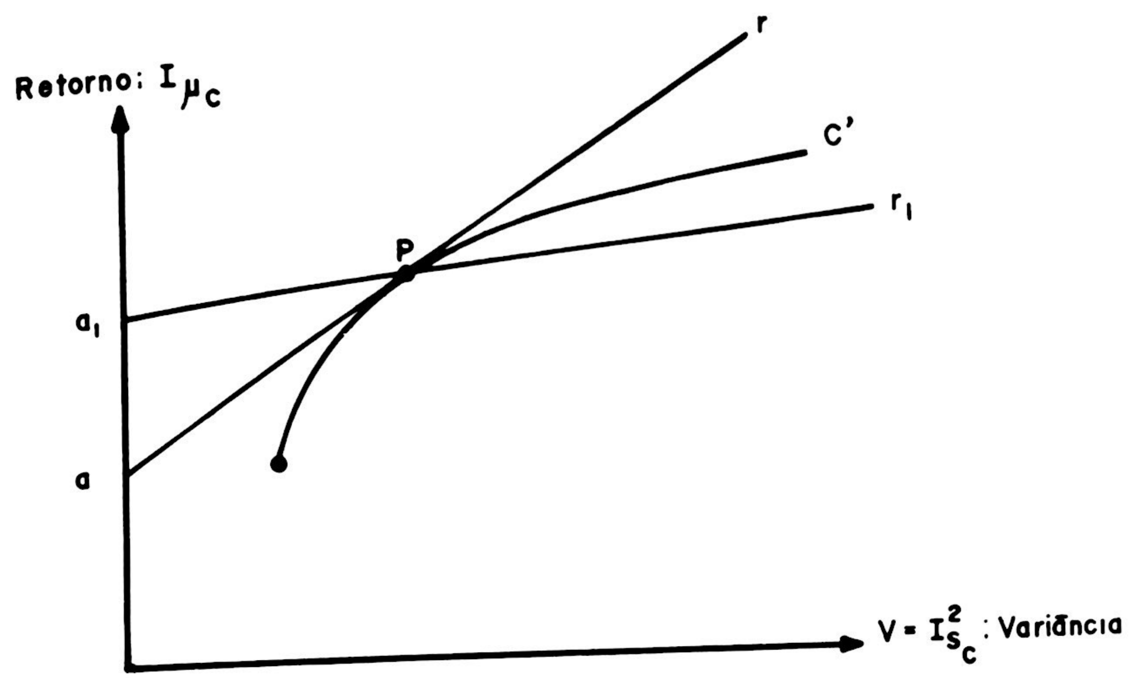
6

OS MODELOS DE MARKOWITZ E SHARPE — O CAPM

6.1 DETERMINAÇÃO DA "FRONTEIRA EFICIENTE DE ATIVOS COM RISCO" — O MODELO DE MARKOWITZ PARA TRÊS ATIVOS

Consideremos o problema da determinação da fronteira eficiente dos investimentos com risco a partir das carteiras formadas pela composição de três ativos. Para tanto, vamos considerar como dados os ativos A_1, A_2, A_3, em que são conhecidos os retornos médios $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, I_{\mu_3}$, bem como os desvios $I_{S_1}, I_{S_2}, I_{S_3}$, respectivamente. Admitamos, também, como estabelecidas as covariâncias dos retornos dos ativos, dados por: $\text{cov}(I_1, I_2)$, $\text{cov}(I_1, I_3)$ e $\text{cov}(I_2, I_3)$.

Uma das formas interessantes de obtermos os pontos da fronteira eficiente parte da análise das tangentes à curva representativa da fronteira eficiente de investimentos com risco. No plano risco-retorno esta curva deve ter o aspecto da curva-C, conforme o gráfico seguinte:



A equação da reta r_1 será dada por:

$$r_1 : I_{\mu_c} = a_1 + b_1 V .$$

Fixando o ponto P, consideremos as demais retas que passam pelo ponto P, em particular a reta r, tangente à curva-C', dada pela equação:

$$r : I_{\mu_c} = a + b_1 V .$$

O que caracteriza a reta tangente à curva-C', pelo ponto P, é que, dentre todas as retas que têm um único ponto em comum com a curva, a equação da reta tangente deverá ter o mínimo valor para o termo independente a.

Assim, partindo da reta r_1, com eixo no ponto P, e girando no sentido anti-horário, traçando as retas por P, teríamos que os termos independentes das equações destas retas seriam:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a$$

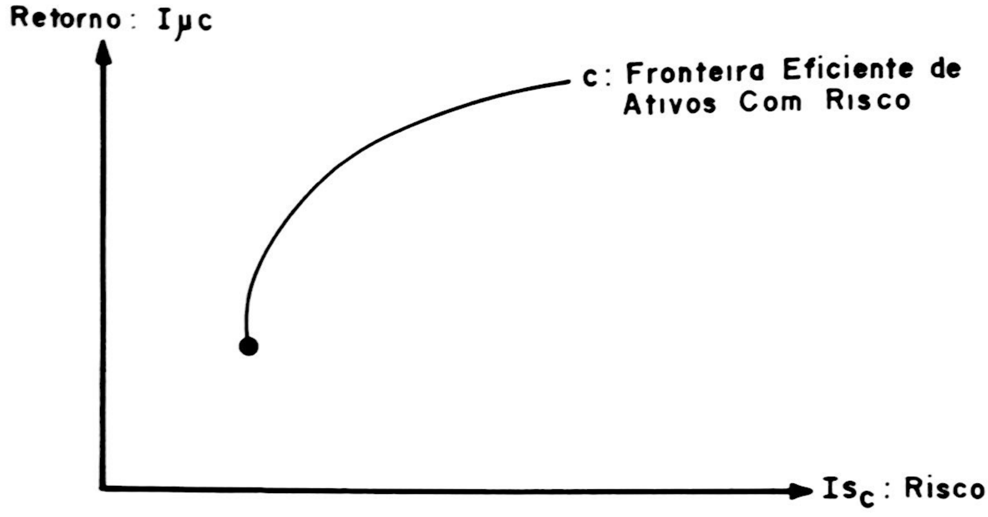
Observemos que, se continuarmos com o movimento de r_1 para r centrado em P, mesmo após a obtenção da reta tangente, as próximas retas, por P, terão dois pontos em comum com a curva-C'.

Assim, as equações das retas que passam por P são da forma:

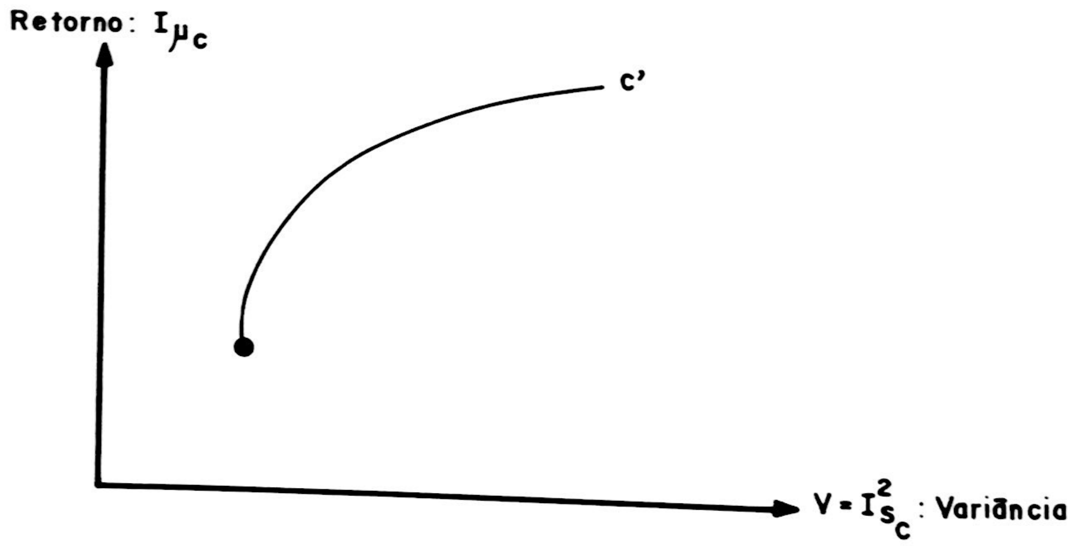
$$I_{\mu_c} = a_j + b_j V$$

e a condição para que a reta seja tangente à curva-C' será:

$$a = \text{mínimo}(a_j) = \min\left(I_{\mu_c} - bV\right)$$



Para facilitar a formulação do problema, consideremos a curva-C', obtida a partir dos pontos da curva-C, no plano variância-retorno. Lembrando que a variância é igual ao quadrado do desvio, então a concavidade da curva C' terá o mesmo aspecto que a curva-C. O gráfico seguinte representa a curva-C' no plano variância-retorno:



Consideremos um ponto P qualquer da curva-C' e tracemos a reta r_1 passando por P, conforme o gráfico a seguir:

Do exposto, podemos examinar quais são as condições para que um ponto P pertença à curva-C'.

Cada ponto P tem coordenadas $P = (V_P; I_{\mu_P})$, em termos de variância-retorno, ou coordenadas $P = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, em termos de composição da carteira.

Assim, o ponto P deverá satisfazer às condições seguintes:

$$I_{\mu_C} = \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3}$$

e

$$I_{S_C}^2 = V = \omega_1^2 I_{S_1}^2 + \omega_2^2 I_{S_2}^2 + \omega_3^2 I_{S_3}^2 + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(I_1, I_2) + \\ + 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(I_1, I_3) + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(I_2, I_3)$$

onde $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, com $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$, e a tangente à curva-C', por P, deve ser tal que:

$$a = \min(a_j) = \min(I_{\mu_C} - b.V),$$

o que completa as condições para P pertencer à curva-C'.

Notemos que, obtidos os pontos $P = (V_P = I_{S_C}^2 ; I_{\mu_P})$ da curva-C', podemos obter os pontos $P^* = (I_{S_C} ; I_{\mu_P})$, que serão os pontos da curva-C, ou seja, da **fronteira eficiente de investimentos dos ativos com risco**, ambos definidos pela mesma composição $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ das carteiras.

Para obtermos a composição das carteiras que nos dá os pontos do tipo P, pertencentes à curva-C', teremos que obter $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ tais que:

$$a = \min(I_{\mu_C} - b.V)$$

com $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ e $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$.

A solução desta questão é obtida pelo método do multiplicador de Lagrange.[1]

O método consiste em partirmos da função a ser minimizada:

$$a = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = I_{\mu_C} - b.V$$

submetida à restrição $g(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0$ e construirmos a **função objetivo**, dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \lambda.g(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

1. CHIANG, Alpha. *Matemática para economistas*. São Paulo: Edusp/McGraw-Hill, 1982.

O passo seguinte consiste em resolvermos o sistema:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega_3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_2} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

obtendo assim $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ que satisfazem as condições fixadas de mínimo e de soma unitária, significando que são pontos da curva-C'.

Calculando, teremos que a função objetivo será dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = \left(I_{\mu_C} - b.V\right) + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1),$$

onde, substituindo os valores de I_{μ_C} e $V = I_{S_C}^2$, teremos:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3} - b\left[\omega_1^2 I_{S_1}^2 + \omega_2^2 I_{S_2}^2 + \omega_3^2 I_{S_3}^2\right] +$$
$$- b\left[2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(I_1, I_2) + 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(I_1, I_3) + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(I_2, I_3)\right] +$$
$$+ \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1).$$

Derivando, teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = I_{\mu_1} - 2I_{S_1}^2\, b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)b\omega_2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_3)b\omega_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_2} = I_{\mu_2} - 2I_{S_2}^2\, b\omega_2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(I_2, I_3)b\omega_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_3} = I_{\mu_3} - 2I_{S_3}^2\, b\omega_3 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_3)b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(I_2, I_3)b\omega_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0$$

Reescrevendo o sistema, teremos:

$$2I_{S_1}^2.\omega_1 + 2\operatorname{cov}(I_1, I_2).\omega_2 + 2\operatorname{cov}(I_1, I_3).\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_1}}{b}$$

$$2\operatorname{cov}(I_1, I_2).\omega_1 + 2I_{S_2}^2.\omega_2 + 2\operatorname{cov}(I_2, I_3).\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_2}}{b}$$

$$2\operatorname{cov}(I_1, I_3).\omega_1 + 2\operatorname{cov}(I_2, I_3).\omega_2 + 2I_{S_3}^2.\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{I_{\mu_3}}{b}$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 0.\frac{\lambda}{b} = 1$$

sendo M dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2l_{S_1}^2 & 2\mathrm{cov}(l_1,l_2) & 2\mathrm{cov}(l_1,l_3) & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_1,l_n) & 1 \\ 2\mathrm{cov}(l_1,l_2) & 2l_{S_2}^2 & 2\mathrm{cov}(l_2,l_3) & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_2,l_n) & 1 \\ 2\mathrm{cov}(l_1,l_3) & 2\mathrm{cov}(l_2,l_3) & 2l_{S_3}^2 & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_3,l_n) & 1 \\ 2\mathrm{cov}(l_1,l_4) & 2\mathrm{cov}(l_2,l_4) & 2\mathrm{cov}(l_3,l_4) & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_4,l_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\mathrm{cov}(l_1,l_n) & 2\mathrm{cov}(l_2,l_n) & 2\mathrm{cov}(l_3,l_n) & \cdots & 2l_{S_n}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvida a equação matricial, obtemos o vetor W que nos dá a composição das carteiras que são pontos da fronteira eficiente de investimentos.

Exemplo — Fronteira eficiente para carteiras com três ativos — Modelo de Markowitz

Consideremos os ativos A_1, A_2, A_3 onde são dados os retornos médios, desvios e covariâncias, como segue:

$$\begin{array}{lll} l_{\mu_1} = 0{,}15; & l_{S_1} = 0{,}05; & \mathrm{cov}\,(l_1,l_2) = 0{,}00245 \\ l_{\mu_2} = 0{,}25; & l_{S_2} = 0{,}07; & \mathrm{cov}\,(l_1,l_3) = 0{,}00100 \\ l_{\mu_3} = 0{,}35; & l_{S_3} = 0{,}10; & \mathrm{cov}\,(l_2,l_3) = 0{,}00350 \end{array}$$

onde os retornos são dados para um prazo fixado.

Partimos da equação matricial $W = M^{-1}.U$, dada por:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2l_{S_1}^2 & 2\,\mathrm{cov}\,(l_1,l_2) & 2\,\mathrm{cov}\,(l_1,l_3) & 1 \\ 2\,\mathrm{cov}\,(l_1,l_2) & 2l_{S_2}^2 & 2\,\mathrm{cov}\,(l_2,l_3) & 1 \\ 2\,\mathrm{cov}\,(l_1,l_3) & 2\,\mathrm{cov}\,(l_2,l_3) & 2l_{S_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu 1}}{b} \\ \frac{l_{\mu 2}}{b} \\ \frac{l_{\mu 3}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo os dados na equação matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(0{,}05)^2 & 2\times0{,}00245 & 2\times0{,}00100 & 1 \\ 2\times0{,}00245 & 2\times(0{,}07)^2 & 2\times0{,}00350 & 1 \\ 2\times0{,}00100 & 2\times0{,}00350 & 2\times(0{,}10)^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \frac{0{,}15}{b} \\ \frac{0{,}25}{b} \\ \frac{0{,}35}{b} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

Que, escrito na forma matricial, nos dará

$$\begin{bmatrix} 2\,l_{S_1}^2 & 2\,\mathrm{cov}\,(l_1, l_2) & 2\,\mathrm{cov}\,(l_1, l_3) & 1 \\ 2\,\mathrm{cov}\,(l_1, l_2) & 2\,l_{S_2}^2 & 2\,\mathrm{cov}\,(l_2, l_3) & 1 \\ 2\,\mathrm{cov}\,(l_1, l_3) & 2\,\mathrm{cov}\,(l_2, l_3) & 2\,l_{S_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu 1}}{b} \\ \frac{l_{\mu 2}}{b} \\ \frac{l_{\mu 3}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou que indicaremos, na forma matricial, por:

$$M.W = U.$$

Resolvendo a equação matricial, virá:

$$W = M^{-1}.U$$

o que nos possibilitará obter $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ em função do coeficiente b.

Dando valores a b, obtemos todas as composições $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pelos pontos da curva-C' e portanto da curva-C, a menos da condição

$$0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1.$$

Assim, devemos verificar se esta condição está satisfeita; se não estiver devemos verificar a existência de ponto com tais condições que não tenha sido captado pelo presente método. A ocorrência deste fato é possível, pois a condição $0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1$ não foi implantada no desenvolvimento do problema.

6.2 MODELO DE MARKOWITZ — CASO GERAL — FRONTEIRA EFICIENTE DAS CARTEIRAS COM N ATIVOS

A operação matricial, no caso geral, será dada por:

$$W = M^{-1}.U$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu 1}}{b} \\ \frac{l_{\mu 2}}{b} \\ \vdots \\ \frac{l_{\mu n}}{b} \\ 1 \end{bmatrix},$$

Para invertermos a matriz, utilizamos um programa elementar, em BASIC, para microcomputador tipo *pocket*, conforme manual do fabricante.[2] O programa inverte a matriz por triangularização e não pode ter zeros na diagonal principal. Assim, reescrevemos o sistema e, portanto, a equação matricial de forma conveniente, como segue:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}0050 & 0{,}0049 & 0{,}0020 & 1 \\ 0{,}0049 & 0{,}0098 & 0{,}0070 & 1 \\ 0{,}002 & 0{,}0070 & 0{,}0200 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{0{,}15}{b} \\ \frac{0{,}25}{b} \\ \frac{0{,}35}{b} \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz, teremos:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9836 & 200{,}0253 & -201{,}2917 & 1{,}2659 \\ -0{,}1671 & -201{,}2913 & 265{,}8564 & -64{,}5651 \\ 0{,}1834 & 1{,}2659 & -64{,}5651 & 63{,}2991 \\ -0{,}0044 & 0{,}9836 & 0{,}1671 & 0{,}1834 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{0{,}15}{b} \\ \frac{0{,}25}{b} \\ \frac{0{,}35}{b} \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto das matrizes e igualando, teremos:

$$\omega_1 = 0{,}9836 - \frac{19{,}8760}{b}$$

$$\omega_2 = -0{,}1671 + \frac{13{,}6726}{b}$$

$$\omega_3 = 0{,}1835 + \frac{6{,}2034}{b}$$

$$\frac{\lambda}{b} = -0{,}0044 + \frac{0{,}1700}{b}.$$

Vejamos algumas observações que podemos fazer, obtidas as equações de ω_1, ω_2 e ω_3.

a) Verifiquemos que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Para tanto, basta somar as equações obtendo:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 + \frac{0}{b} = 1, \text{ com } b \neq 0.$$

b) Substituindo as equações de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ na equação do retorno médio da carteira, teremos:

a partir de $I_{\mu_C} = \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3}$, vem:

---

2. SHARP do Brasil S/A. *Manual de programação PC-1211 R/RP.*

$$l_{\mu_C} = \left(0{,}9836 - \frac{19{,}8760}{b}\right).0{,}15 + $$
$$+\left(-0{,}1671 + \frac{13{,}6726}{b}\right).0{,}25 + $$
$$+\left(0{,}1835 + \frac{6{,}2034}{b}\right).0{,}35,$$

assim,

$$l_{\mu_C} = 0{,}1700 + \frac{2{,}6079}{b}.$$

c) Substituindo as equações de ω_1, ω_2, ω_3 na equação do risco da carteira virá:

partindo de

$$l_{S_C}^2 = \omega_1^2 l_{S_1}^2 + \omega_2^2 l_{S_2}^2 + \omega_3^2 l_{S_3}^2 + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(l_1, l_2) + $$
$$+ 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(l_1, l_3) + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(l_2, l_3),$$

substituindo todos os dados, obteremos a seguinte equação:

$$l_{S_C}^2 = 0{,}002233 + 0{,}000013.\frac{1}{b} + 1{,}303977.\left(\frac{1}{b}\right)^2.$$

d) A partir da equação dos retornos, escrita em função de b, podemos obter:

$$\frac{1}{b} = \frac{l_{\mu_C} - 0{,}1700}{2{,}6079}.$$

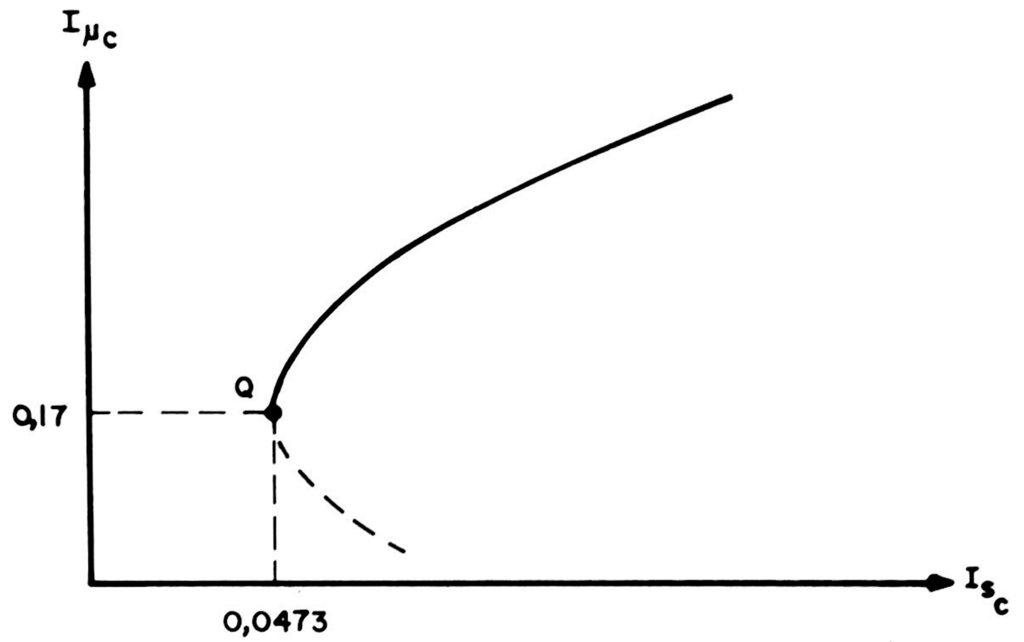
Substituindo na equação dos riscos, teremos:

$$l_{S_C}^2 = 0{,}191729 l_{\mu_C}^2 - 0{,}065183 l_{\mu_C} + 0{,}007773,$$

em que seus termos podem ser escritos, convenientemente, da seguinte forma:

$$\frac{\left(l_{S_C} - 0\right)^2}{(0{,}0473)^2} - \frac{\left(l_{\mu_C} - 0{,}1700\right)^2}{(0{,}1079)^2} = 1$$

o que nos dá a equação de uma hipérbole com centro (0 ; 0,1700), conforme o gráfico a seguir.



e) Lembrando que o coeficiente b representa o coeficiente angular das retas tangentes à curva-C', no plano variância-retorno, então, fazendo $b \to \infty$ obtemos o ponto de mínimo risco e mínimo retorno. Assim, na equação

$$I_{\mu_C} = 0{,}1700 + \frac{2{,}6079}{b},$$

para $b \to \infty$, teremos $I_{\mu_C} = 0{,}1700$.

Note-se que este ponto também corresponde ao vértice Q da hipérbole.

Podemos calcular o valor do desvio para a carteira com $I_{\mu_C} = 0{,}1700$, obtendo:

$$I^2_{S_C} = 0{,}002233 \rightarrow I_{S_C} = 0{,}0473.$$

Em relação à composição da carteira, basta fazer $b \to \infty$ nas equações de ω_1, ω_2, e ω_3, o que nos dará:

$$\omega_1 = 0{,}9836 \rightarrow 98{,}36\%$$

$$\omega_2 = -0{,}1671 \rightarrow -16{,}71\%$$

$$\omega_3 = 0{,}1835 \rightarrow 18{,}35\%,$$

obtendo assim uma carteira de composição alavancada, ou seja, para cada 100 de capital, tomamos emprestados 16,71% segundo as condições do ativo A_2. O total obtido de 116,71% é investido 98,36% no ativo A_1 e 18,35% no ativo A_3, o que nos dá a carteira com retorno $l_{\mu_C} = 0{,}17$ e risco $l_{S_C} = 0{,}0473$.

Ocorre que uma carteira deste tipo não satisfaz a condição:

$$0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1,$$

significando que a curva obtida não tem todos os seus pontos pertencentes à **fronteira eficiente de investimentos de ativos com risco**, no sentido em que esta foi definida. Assim, a curva obtida nos dá os pontos da fronteira eficiente no sentido amplo, onde são permitidas as carteiras alavancadas.

f) Determinemos os valores de b para os quais $0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1$. Obteremos assim os valores de b que nos dão pontos da fronteira eficiente.

Para tanto, devemos ter satisfeitas as seguintes condições:

$b > 0$; pois b é coeficiente da reta tangente com inclinação para a direita

$$0 \leq \omega_1 = 0{,}9836 - \frac{19{,}8760}{b} \leq 1$$

$$0 \leq \omega_2 = -0{,}1671 + \frac{13{,}6726}{b} \leq 1$$

e

$$0 \leq \omega_3 = -0{,}0044 + \frac{0{,}1700}{b} \leq 1$$

Resolvendo as inequações, teremos:

$$b > 0$$

$$b \geq -1211{,}9512 \text{ e } b \geq 20{,}2074$$

$$11{,}7150 \leq b \leq 81{,}8199$$

$$0{,}1693 \leq b \leq 38{,}6364$$

logo, os valores de b que satisfazem simultaneamente as inequações serão:

$$20{,}2074 \leq b \leq 38{,}6364.$$

Dentro destas condições, substituindo na equação dos retornos e dos desvios, obteremos:

para $b = 20{,}2074$, teremos $l_{\mu_C} = 0{,}2991$ e $l_{S_C} = 0{,}0737$;

para $b = 38{,}6364$, teremos $l_{\mu_C} = 0{,}2375$ e $l_{S_C} = 0{,}0557$.

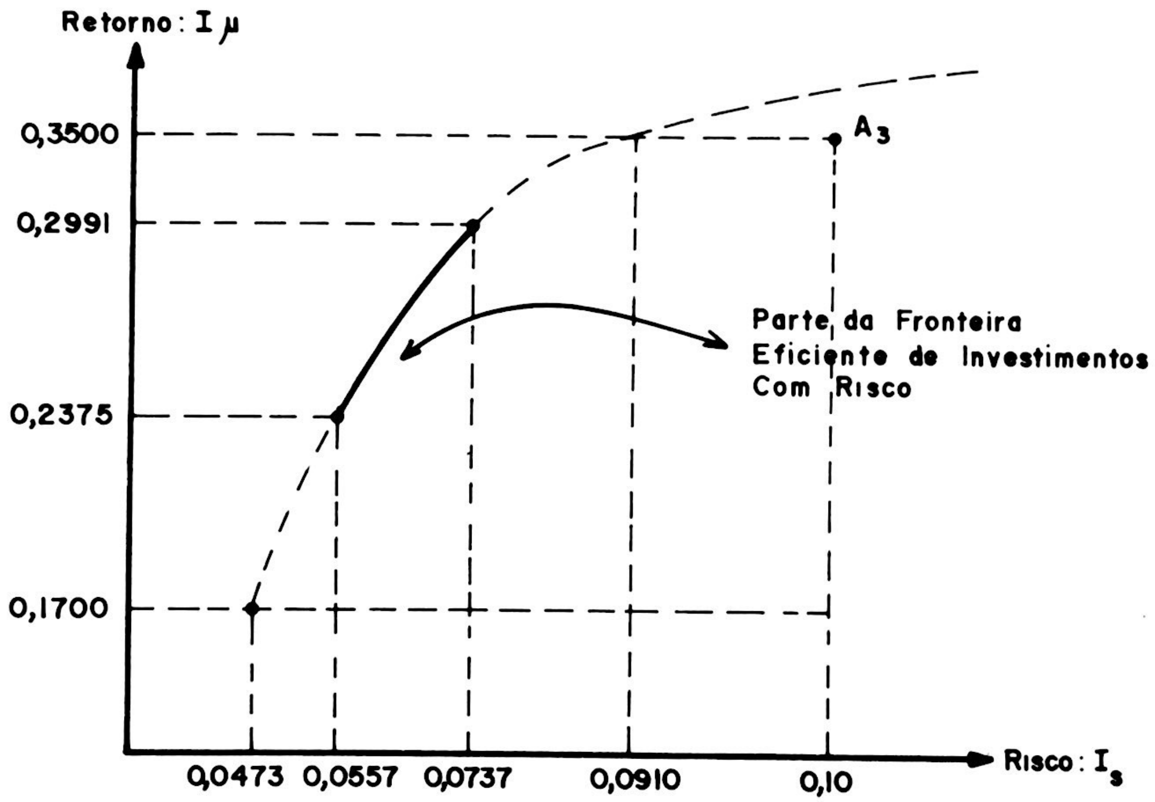
Assim, os pontos da curva definidos pela hipérbole, que pertencem à fronteira eficiente de investimentos com risco são os que satisfazem:

$$20{,}2074 \leq b \leq 38{,}6364 \text{ ou } 0{,}2375 \leq I_{\mu_C} \leq 0{,}2991$$

o que corresponde a

$$0{,}0557 \leq I_{S_C} \leq 0{,}0737.$$

O gráfico seguinte nos mostra a parte da hipérbole que nos dá carteiras da fronteira eficiente.



g) O fato é que existirão outros pontos, fora do intervalo

$$0{,}0557 \leq I_{S_C} \leq 0{,}0737,$$

que também pertencem à fronteira eficiente, com

$$0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1,$$

que não são captados pela curva obtida.

Um dos pontos que sempre pertence à fronteira eficiente é aquele formado pela carteira de um único ativo, dentre os ativos dados, definida pelo ativo de maior retorno e, dentre estes, o de menor risco. No caso do exemplo, trata-se do ativo A_3 com retorno $I_{\mu_3} = 0{,}35$ e risco $I_{S_3} = 0{,}10$; sendo a carteira formada pela composição $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 0$ e $\omega_3 = 1$.

Para o retorno $I_{\mu_C} = 0{,}35$, o valor de b será:

$$0{,}35 = 0{,}1700 + \frac{2{,}6079}{b},$$

ou seja:

$$b = 14{,}4883,$$

o que corresponde a uma posição alavancada onde:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -38{,}83 \\ \omega_2 &= 77{,}66 \\ \omega_3 &= 61{,}17, \end{aligned}$$

com $I_{S_C} = 0{,}919$.

Como se observa, a equação da hipérbole nos dá uma carteira alavancada com melhores condições que a carteira A_3, que pertence à fronteira eficiente de investimentos em seu conceito restrito.

h) **Fronteira eficiente geral de investimentos**

A partir dos dados do exemplo em questão, vamos admitir que o investimento livre de risco tenha retorno $I_F = 0{,}07$, para as mesmas condições do problema dado.

A **fronteira eficiente geral de investimentos** será dada pela reta tangente à **fronteira eficiente de investimentos com risco**, que passa pelo ponto correspondente ao investimento livre de risco, conforme o gráfico seguinte:

o que nos dá uma equação de segundo grau, onde a condição de tangência é obtida para o discriminante igual a zero, o que nos permite obter o valor de m. Assim, teremos:

$$0{,}001712\,m^4 - 0{,}016599\,m^2 = 0$$

ou

$$m^2\left(0{,}001712m^2 - 0{,}016599\right) = 0$$

ou, ainda,

$$0{,}001712\,m^2 = 0{,}016599\,.$$

Como $m > 0$, pois a reta tangente é inclinada para a direita, teremos:

$$m = 3{,}1138.$$

Logo, a equação da reta tangente será dada por:

$$l_\mu - 0{,}07 = 3{,}1138 l_S$$

ou

$$l_\mu - 3{,}1138 l_S + 0{,}07.$$

Devemos determinar as coordenadas do ponto C^* e verificar se não temos uma carteira alavancada.

Para tanto, basta substituir o valor de $m = 3{,}1138$ na equação:

$$\left(1 - 0{,}191729m^2\right)l_\mu^2 - \left(0{,}14 - 0{,}065183m^2\right)l_\mu + \left(0{,}0049 - 0{,}007773m^2\right) = 0$$

o que nos dará:

$$-0{,}858957 l_\mu^2 + 0{,}491998 l_\mu - 0{,}070465 = 0.$$

Lembrando que o discriminante é zero, então o retorno da carteira será:

$$l_\mu = \frac{-0{,}491998}{2 \times (-0{,}858957)} = 0{,}2864,$$

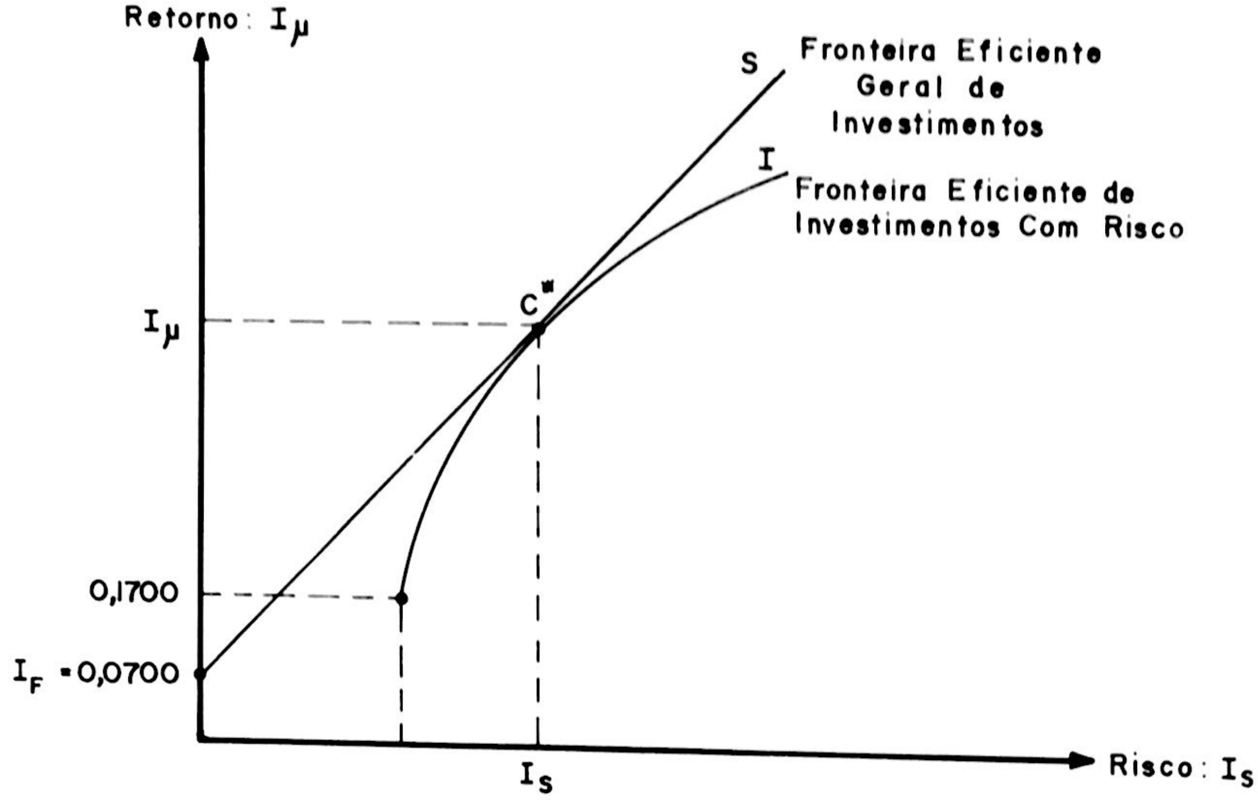
e o risco $l_S = 0{,}0695$.

Assim, $C^* = \left(l_S = 0{,}0695;\ l_\mu = 0{,}2864\right)$ é ponto da hipérbole e satisfaz as condições de ponto da fronteira eficiente de investimentos com risco.

Daí a equação da reta tangente à hipérbole pelo ponto C^*, passando pelo ponto correspondente ao ativo livre de risco, será dada por

$$l_\mu = 0{,}07 + 3{,}1138 l_S\,,$$

que é a equação da **fronteira eficiente geral de investimentos**.



A equação da reta s é dada por:

$$s \div I_\mu - 0{,}07 = m(I_S - 0).$$

Como $C^* = (I_S ; I_\mu)$ é ponto da reta e da hipérbole, teremos:

$$I_S = \frac{I_\mu - 0{,}07}{m}$$

que, substituído na equação da hipérbole, nos dará:

$$\frac{\left(\frac{I_\mu - 0{,}07}{m}\right)^2}{(0{,}0473)^2} - \frac{(I_\mu - 0{,}17)^2}{(0{,}1079)^2} = 1$$

ou

$$\left(\frac{I_\mu - 0{,}07}{m}\right)^2 = 0{,}191729 I_\mu^2 - 0{,}065183 I_\mu + 0{,}007773$$

$$I_\mu^2 - 0{,}14 I_\mu + 0{,}0049 = 0{,}191729 m^2 I_\mu^2 - 0{,}065183 m^2 I_\mu + 0{,}007773 m^2$$

que, simplificando, nos dará:

$$\left(1 - 0{,}191729 m^2\right) I_\mu^2 - \left(0{,}14 - 0{,}065183 m^2\right) I_\mu + \left(0{,}0049 - 0{,}007773 m^2\right) = 0,$$