MA22 - Unidade 2 - Resumo 1

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Operações com Limites Finitos

Proposição

Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = K$. Então,

a) $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \ = \ L + K$;

b) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \ = \ L \cdot K$;

c) Se $y_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $K \neq 0$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} \ = \ \frac{1}{K}$.

Combinando os dois últimos itens, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \ = \ \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \ = \ \frac{L}{K},$$

desde que $y_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $K \neq 0$.

Exemplo

Vamos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2-n+2}.$$

Podemos escrever

$$\frac{n^2+3}{n^2-n+2} = \frac{\frac{n^2+3}{n^2}}{\frac{n^2-n+2}{n^2}} = \frac{1+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$

Limite do numerador: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right) = 1+0 = 1.$

Limite do denominador: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = 1+0+0 = 1.$

Limite do quociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2-n+2} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 1.$$

Limite de Polinômio

Proposição

Seja $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Então,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p(x_n) = p(\lim_{n\to\infty} x_n) = p(L).$$

Limites e Desigualdades

Proposição

Se (x_n) é uma sequência convergente satisfazendo $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$ (respectivamente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$).

Demonstração.

Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e suponha, por absurdo, que $L > b$. Tomemos $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que $L - r > b$. Por definição de limite de uma sequência, existe um inteiro positivo n_0 tal que, para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n \in (L - r, L + r)$. Mas isso significa que, para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > b$, contradizendo a hipótese $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos, portanto, que $L \leq b$. $\square$

Propriedade do Anulamento

Proposição

Se (x_n) e (y_n) são sequências tais que (x_n) é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Demonstração.

De fato, seja $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, dado $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $|y_n| < \dfrac{r}{c}$. Obtemos, portanto, que para todo $n > n_0$, $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < c\,\dfrac{r}{c} = r$. $\square$

Exemplo

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \;=\; 0$, apesar de a sequência $\left(\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right)$ não convergir. Isto se deve a proposição anterior, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left|\left(\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1$.

Teorema do Confronto

Teorema

Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) três sequências satisfazendo $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$.

Demonstração.

Como (x_n) e (z_n) convergem para L, temos que dado $r > 0$, existem inteiros positivos $n_1,\ n_2$ tais que para todo $n > n_1$ tem-se que $x_n \in (L - r, L + r)$ e para todo $n > n_2$ tem-se que $z_n \in (L - r, L + r)$. Assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_0$ temos que $x_n, z_n \in (L - r, L + r)$. Agora, como $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que $y_n \in (L - r, L + r)$ para todo $n > n_0$. $\square$