

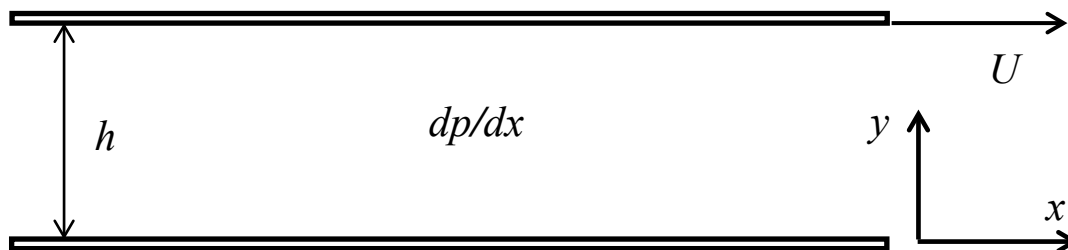
1. (5 pontos) Um líquido escoar em regime laminar sob cisalhamento com velocidade U entre uma placa fixa e outra móvel separadas uma distância h , como mostrado na figura. A gravidade é desprezada e o escoamento é completamente desenvolvido (não há variação da velocidade com x). Supondo viscosidade μ conhecida, queremos encontrar o gradiente de pressão $\frac{dp}{dx}$ necessário para que a tensão de cisalhamento

viscosa seja nula na placa inferior. Neste caso, quanto vale a velocidade média $\bar{u}$ e a vazão volumétrica por unidade de comprimento na direção normal Q . Resolver o exercício seguindo os seguintes passos:

- Determinar o perfil de velocidade na região $0 \leq y \leq h$ em função de U , $\frac{dp}{dx}$ e do resto dos parâmetros aplicando condições de contorno adequadas de velocidade nas paredes; (2 pontos)
- Encontrar $\frac{dp}{dx}$ em função de U e do resto dos parâmetros aplicando ao perfil de velocidade a condição adequada; (1.5 pontos)
- Encontrar o perfil de velocidade com a condição do ponto anterior, fazer um gráfico qualitativo e calcular $\bar{u}$ e Q . (1,5 pontos)

Equação de Navier-Stokes direção x :
$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Tensão de cisalhamento:
$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$



Solução:

- a) O perfil de velocidade para a região $0 \leq y \leq h$ surge de resolver:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + A \quad ; \quad u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + Ay + B$$

com condições de contorno:

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(h) = U \Rightarrow \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 + Ah = U \Rightarrow A = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h$$

O perfil de velocidade resulta:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) + U \frac{y}{h}$$

- b) A tensão de cisalhamento resulta:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \left(1 - 2 \frac{y}{h} \right) + \frac{\mu U}{h}$$

Para que a tensão de cisalhamento viscosa na placa inferior seja nula, deve ser:

$$\tau(0)=0 \Rightarrow -\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu U}{h} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2 \frac{\mu U}{h^2}$$

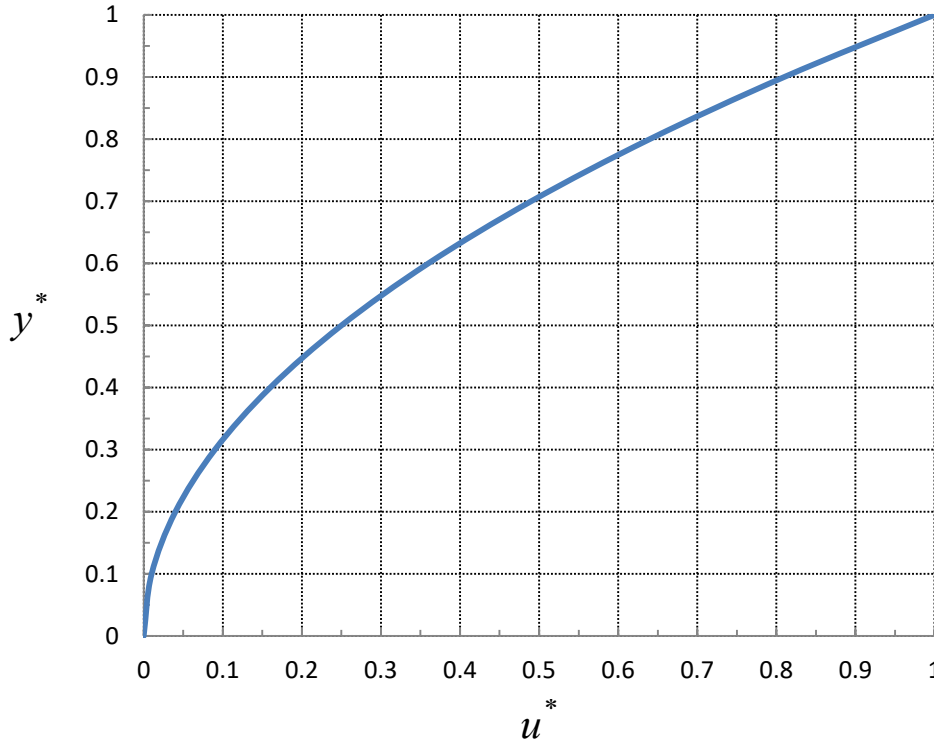
c) Substituindo o gradiente de pressão no perfil de velocidade, resulta:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \left(2 \frac{\mu U}{h^2} \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) + U \frac{y}{h} = -U \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) + U \frac{y}{h} = U \left(\frac{y}{h} \right)^2$$

A velocidade média e a vazão resultam:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = U \int_0^1 y^{*2} dy^* = U \left(\frac{1}{3} y^{*3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} U \quad ; \quad Q = \bar{u} h = \frac{1}{3} U h$$

O gráfico do perfil de velocidade resulta:



2. (5 pontos) Considere o escoamento permanente, incompressível, laminar e completamente desenvolvido de um fluido incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ , através de um ducto de raio a inclinado um ângulo θ positivo com a horizontal e em presença da gravidade g , como mostrado na figura.

Para elevar uma vazão volumétrica Q é preciso estabelecer um gradiente de perda de pressão $\left(-\frac{dp}{dz} \right)$, que

pode ser considerado como a soma das contribuições gravitacionais $\left(-\frac{dp}{dz} \right)_G$ e de atrito $\left(-\frac{dp}{dz} \right)_A$:

$$\left(-\frac{dp}{dz} \right) = \left(-\frac{dp}{dz} \right)_G + \left(-\frac{dp}{dz} \right)_A$$

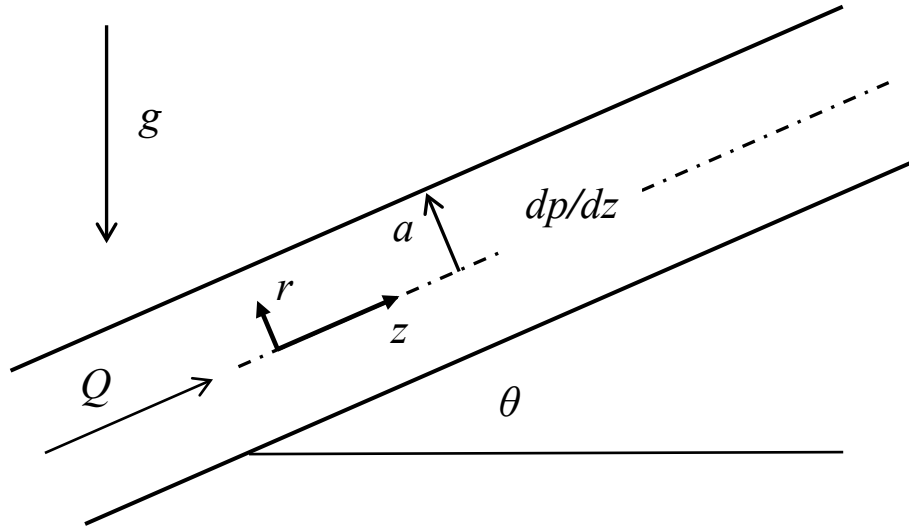
- Encontrar as contribuições gravitacional e de atrito, a partir da resolução do campo de velocidade; (4 pontos)
- Encontrar um parâmetro adimensional Π que represente a razão dos gradientes de perda de pressão por atrito e gravitacional:

$$\Pi = \frac{\left(-\frac{dp}{dz} \right)_A}{\left(-\frac{dp}{dz} \right)_G}$$

e determinar a vazão volumétrica máxima $Q_{\max}$ que pode ser transportada para que a razão seja menor que uma determinada fração α . (1 ponto)

Navier-Stokes, componente z :

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + G_z + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$



Solução:

- a) Considerando $u_z = u_z(r)$, $u_\theta = u_r = 0$, $G_z = -g \sin \theta$ e $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{cte}$, a equação de Navier-Stokes na direção z resulta:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \sin \theta + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \sin \theta = A = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Integrando em r obtemos:

$$\frac{Ar}{\mu} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) ; \quad r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{Ar^2}{2\mu} + B ; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{Ar}{2\mu} + \frac{B}{r} \Rightarrow u_z = \frac{Ar^2}{4\mu} + B \ln r + C$$

Como $u_z(0)$ é finita, $B = 0$; da condição de contorno $u_z(a) = 0$ resulta $C = -\frac{Aa^2}{4\mu}$; finalmente obtemos:

$$u_z = -\frac{Aa^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

Integrando na área de passagem obtemos a vazão volumétrica:

$$Q = \int_0^a u_z(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi A a^4}{2\mu} \int_0^1 (1 - r^{*2}) r^* dr^* = -\frac{\pi A a^4}{2\mu} \left(\frac{r^{*2}}{2} - \frac{r^{*4}}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{\pi A a^4}{8\mu} \Rightarrow -A = \frac{8\mu Q}{\pi a^4}$$

Substituindo: $-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \sin \theta = \frac{8\mu Q}{\pi a^4} \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \sin \theta + \frac{8\mu Q}{\pi a^4}$

Daqui resulta, por inspeção: $\left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_G = \rho g \sin \theta ; \quad \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_A = \frac{8\mu Q}{\pi a^4}$

b) O parâmetro adimensional resulta: $\Pi = \frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_A}{\left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_G} = \frac{8\mu Q}{\pi \rho g a^4 \sin \theta}$

Para a condição $\Pi = \frac{8\mu Q}{\pi \rho g a^4 \sin \theta} < \alpha$, deve ser $Q < \frac{\alpha \pi \rho g a^4 \sin \theta}{8\mu} = Q_{\max}$.