

Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)  
Gabarito Primeira Prova - 2017

1. (2 pontos) Considere um campo de velocidade estacionário e bidimensional cuja componente  $u$  da velocidade na direção  $x$  é dada por:

$$u = Ax + By + Cx^2 - Dxy$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes com dimensões apropriadas. Gere uma expressão para o componente  $v$  da velocidade na direção  $y$  e restrições nas constantes, de forma que o escoamento seja incompressível, irrotacional e tenha velocidade nula na origem de coordenadas.

$$\text{Divergente: } \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \text{rotacional: } \nabla \times \mathbf{V} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Solução:

$$\text{Da condição de incompressibilidade e bidimensionalidade, } \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -A - 2Cx + Dy; \text{ integrando parcialmente, resulta } v = -Ay - 2Cxy + \frac{1}{2}Dy^2 + f(x)$$

$$\text{Da condição de irrotacionalidade: } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; -2Cy + f'(x) = B - Dx \Rightarrow C = 0 \text{ e } f'(x) = B - Dx$$

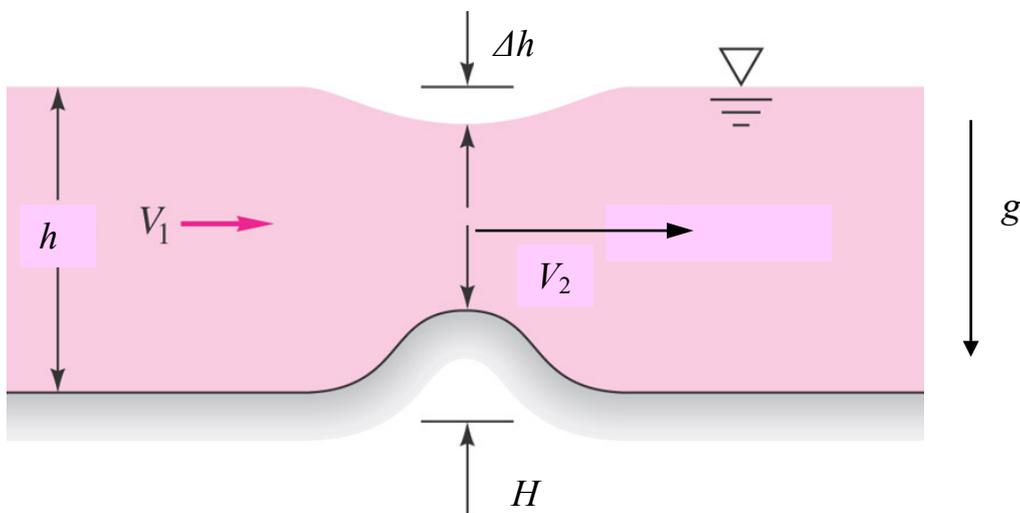
Integrando, resulta:  $f(x) = Bx - \frac{1}{2}Dx^2 + E$ , onde  $E$  é uma constante. Da condição de velocidade nula na origem de coordenadas, resulta  $E = 0$ . Substituindo, temos finalmente:

$$u = Ax + By - Dxy$$

$$v = Bx - Ay - \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}Dy^2$$

2. (3 pontos) Se a velocidade de aproximação não for alta demais, uma saliência de altura  $H$  no fundo de um canal de água bi-dimensional de espessura  $h$  causará um afundamento  $\Delta h$  do nível da água, que pode servir para a medição da vazão  $Q$  por unidade de comprimento na direção normal ao papel. Desprezando as perdas e supondo uma velocidade uniforme na seção de passagem, determinar as velocidades  $V_1$ ,  $V_2$  e a vazão  $Q$  em função das variáveis anteriores e da aceleração gravitacional  $g$ .

Dica: a superfície livre de água está a pressão atmosférica.



$$\text{Eq. de Bernoulli em uma linha de corrente, incompressível e permanente: } p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{cte}$$

Conservação de massa, permanente:  $0 = \int_A \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$

(Adaptado de *Mecânica dos Fluidos*, F. M. White, McGraw-Hill, 2011)

Solução:

Da equação de continuidade entre as seções 1 e 2, resulta:

$$V_1 h = V_2 (h - \Delta h - H) \Rightarrow V_2 = \frac{h}{h - \Delta h - H} V_1 = \beta V_1, \text{ onde } \beta = \frac{1}{1 - \frac{\Delta h}{h} - \frac{H}{h}} \geq 1$$

Da equação de Bernoulli para a linha de corrente da superfície, resulta:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g (h - \Delta h) \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2 g \Delta h$$

Eliminando  $V_2$ , resultam  $V_1 = \left( \frac{2 g \Delta h}{\beta^2 - 1} \right)^{1/2}$ ,  $V_2 = \beta \left( \frac{2 g \Delta h}{\beta^2 - 1} \right)^{1/2}$ ,  $Q = V_1 h = h \left( \frac{2 g \Delta h}{\beta^2 - 1} \right)^{1/2}$

**3. (5 pontos)** Um líquido escoar em regime laminar sob cisalhamento com velocidade  $U$  entre uma placa fixa e outra móvel separadas uma distância  $2h$ , como mostrado na figura. A gravidade é desprezada e o escoamento é completamente desenvolvido (não há variação da velocidade com  $x$ ). Supondo viscosidade  $\mu$  conhecida, queremos

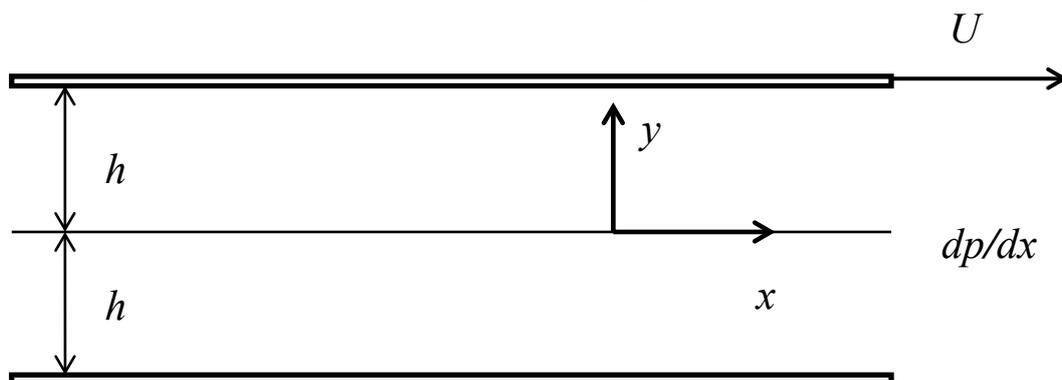
encontrar o gradiente de pressão constante  $\frac{dp}{dx}$  necessário para que a vazão de líquido que escoar para a esquerda (em valor absoluto) seja igual à que escoar para a direita. Resolver o exercício seguindo os seguintes passos:

- Determinar o perfil de velocidade na região  $-h \leq y \leq h$  em função de  $U$ ,  $\frac{dp}{dx}$  e do resto dos parâmetros aplicando condições de contorno adequadas de velocidade nas paredes e na interface; (1.5 pontos)
- Encontrar  $\frac{dp}{dx}$  em função de  $U$  e do resto dos parâmetros aplicando ao perfil de velocidade a condição adequada; (1.5 pontos)
- Eliminar  $\frac{dp}{dx}$  e reescrever o perfil de velocidade adimensional na forma  $u^* = u^*(y^*)$ , onde  $u^* = \frac{u}{U}$ ,  $y^* = \frac{y}{h}$ ; (1 ponto)
- Encontrar a posição onde a velocidade troca de sinal e calcular a vazão adimensional por unidade de comprimento na direção normal que escoar para a esquerda ou direita  $Q^* = \frac{|Q_{e,d}|}{U h}$ . (1 ponto)

Equação de Navier-Stokes direção  $x$ :  $\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

Ajudas para o cálculo:  $\int_{-1}^1 (1 - y^{*2}) dy^* = \frac{4}{3}$  ;  $\int_{-1}^1 (1 + y^*) dy^* = 2$  ;  $\int_{-1}^{1/3} (1 - y^{*2}) dy^* = \frac{80}{81}$  ;  $\int_{-1}^{1/3} (1 + y^*) dy^* = \frac{8}{9}$

Raízes da equação  $3y^{*2} + 2y^* - 1 = 0$ :  $y^* = -1$  e  $y^* = \frac{1}{3}$ .



Solução:

a) O perfil de velocidade para a região  $-h \leq y \leq h$  surge de resolver:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + A \quad ; \quad u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + A y + B$$

com condições de contorno:

$$u(-h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 - A h + B = 0$$

$$u(h) = U \Rightarrow \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 + A h + B = U$$

Resolvendo para  $A$  e  $B$ , obtemos:

$$A = \frac{U}{2h} \quad ; \quad B = \frac{U}{2} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2$$

O perfil de velocidade resulta:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] + \frac{U}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right)$$

b) Se a vazão para a direita e para a esquerda são iguais (em valor absoluto), então a vazão total  $Q$  (soma algébrica) deve ser zero:

$$Q = \int_{-h}^h u(y) dy = 0 \quad ; \quad -\frac{h^3}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_{-1}^1 (1 - y^{*2}) dy^* + \frac{U h}{2} \int_{-1}^1 (1 + y^*) dy^* = 0$$

$$-\frac{h^3}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{4}{3} \right) + \frac{U h}{2} (2) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{3\mu U}{2h^2}$$

c) Substituindo no perfil de velocidade calculado no item a), obtemos o perfil adimensional:

$$u^*(y^*) = -\frac{3}{4}(1 - y^{*2}) + \frac{1}{2}(1 + y^*) = \frac{3}{4}y^{*2} + \frac{1}{2}y^* - \frac{1}{4}$$

d) A posição onde a velocidade adimensional é zero resulta de resolver a equação de segundo grau:

$$\frac{3}{4}y^{*2} + \frac{1}{2}y^* - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 3y^{*2} + 2y^* - 1 = 0$$

As raízes da equação anterior são  $y^* = -1$  (parede inferior) e  $y^* = \frac{1}{3}$ . Integrando o perfil de velocidade,

determinamos as vazões para a esquerda e direita:

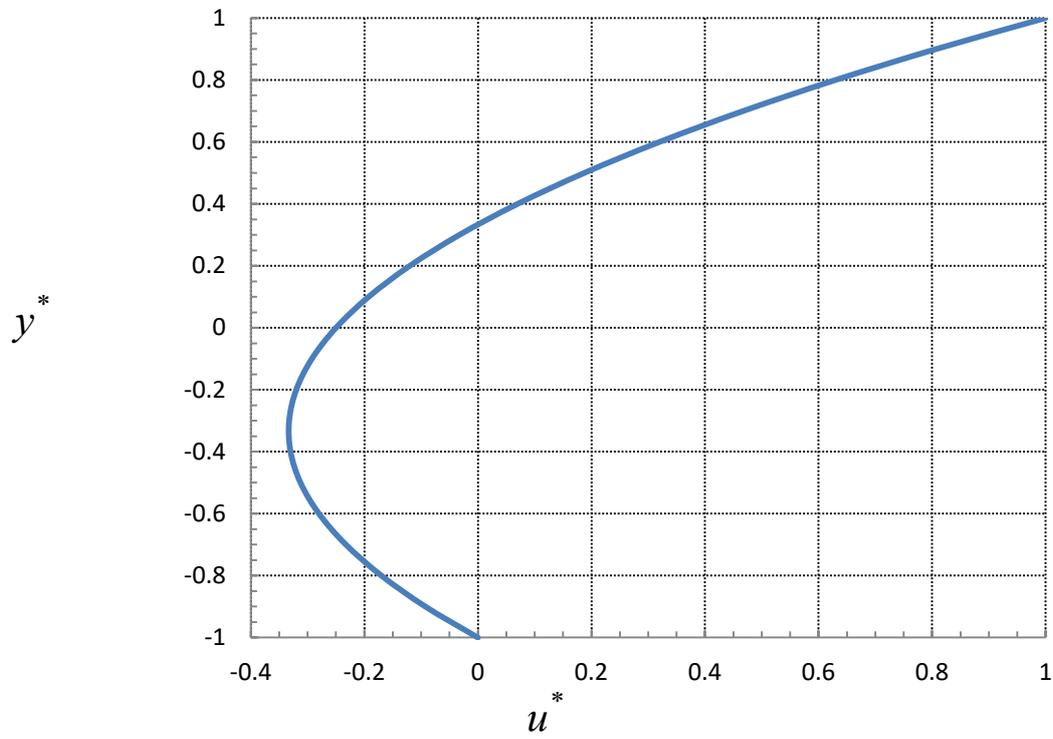
$$Q_e = \int_{-h}^{h/3} u(y) dy = U h \int_{-1}^{1/3} u^*(y^*) dy^*$$

$$\frac{Q_e}{U h} = -\frac{3}{4} \int_{-1}^{1/3} (1 - y^{*2}) dy^* + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1/3} (1 + y^*) dy^* = -\frac{3}{4} \left( \frac{80}{81} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{8}{9} \right) = -\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{Q^*}{U h} = \frac{|Q_{e,d}|}{U h} = \frac{8}{27} = 0,2963$$

Miscelâneas:

O gráfico do perfil de velocidade resulta:



A máxima velocidade para a esquerda é calculada da condição de extremo local  $\frac{du^*}{dy^*} = 0$ , resultando  $y^* = -\frac{1}{3}$  e

$$u^*\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$