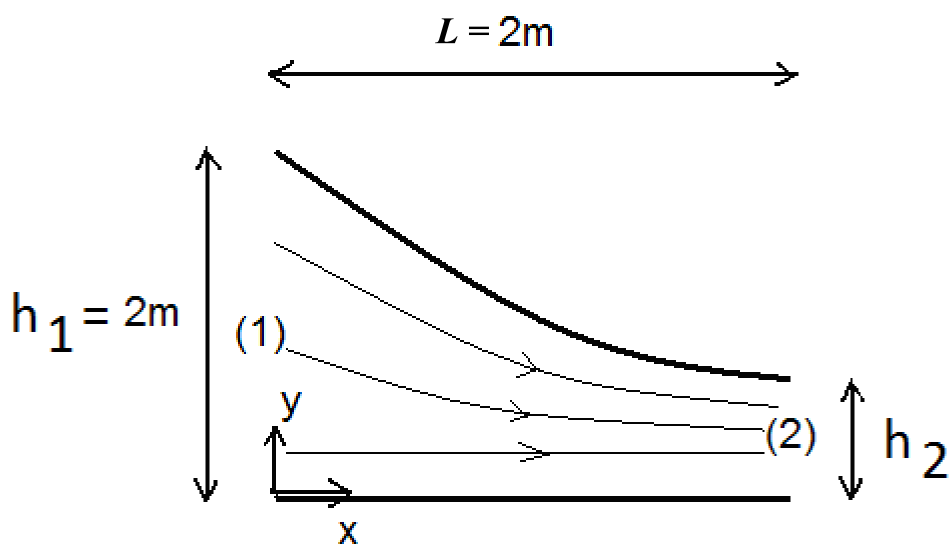
Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Primeira Prova - 2015

1. (**4 pontos**) Num duto bidimensional convergente a parede inferior é plana e a superior é curva, de modo que a velocidade u na direção x varia linearmente de $u_1 = 100\,m/s$ na seção (1) a $u_2 = 300\,m/s$ na seção (2). A massa específica ρ do ar também varia linearmente de $\rho_1 = 1{,}2\,kg/m^3$ na seção (1) para $\rho_2 = 0{,}85\,kg/m^3$ na seção (2). Considerando o escoamento permanente, não-viscoso e que a altura de seção (1) é de $h_1 = 2\,m$ e o comprimento do duto é de $L = 2\,m$, determine:

a) A expressão da velocidade na direção y, $v = v(x, y)$. (3,0 pontos)

b) A altura h_2 da seção (2). (1,0 ponto)



(Adaptado de Çengel e Cimbala, "Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications", McGraw Hill, 2006)

Continuidade: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \boldsymbol{V}) = 0$

Solução:

a) A velocidade u e a massa específica ρ são dadas pelas expressões:

$u = ax + b$, com $a = \dfrac{u_2 - u_1}{L}$, $b = u_1$; resultam $a = 100\,s^{-1}$, $b = 100\,m/s$.

$\rho = cx + d$, com $c = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{L}$, $d = \rho_1$; resultam $c = -0{,}175\,kg/m^4$, $d = 1{,}2\,kg/m^3$.

A equação da continuidade resulta:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}u + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial y}}_{0}v + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$c(ax+b) + (cx+d)a + (cx+d)\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2acx + bc + ad}{cx + d}$$

Integrando, resulta:

$$v(x,y) = -\frac{2acx + bc + ad}{cx + d}\, y + f(x)$$

Como $v(x,0) = 0$, segue que $f(x) = 0$; assim, $v(x,y) = -\frac{2acx + bc + ad}{cx + d}\, y$; resulta

$$v = \frac{35 m^{-1} x - 102{,}5}{1{,}2 - 0{,}175 m^{-1} x} s^{-1}\, y$$

b) Da equação de continuidade:

$\rho_1 u_1 h_1 = \rho_2 u_2 h_2$, que resulta $h_2 = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_2 u_2} h_1$

$h_2 = 0{,}941\,\text{m}$

2. (**6 pontos**) Na lubrificação hidrostática a sustentação é obtida pela introdução do lubrificante dentro da área carregada do mancal a uma pressão suficiente para separar as superfícies com um filme de óleo, sem necessidade do movimento relativo (como acontece com a lubrificação hidrodinâmica). Considere o escoamento com forças de inércia e de volume desprezíveis de um óleo incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ, no espaço entre um disco de raio b e uma superfície paralela separados por uma folga constante e pequena ($h << b$), conforme mostrado na figura (notar que a figura está fora de escala). No centro é injetada uma vazão volumétrica Q, que enche uma câmara de raio a a alta pressão e escoa radialmente através da folga. Nestas condições, calcular a força F vertical que suporta o mancal.
Para resolver este problema, considerar que o campo de velocidade (em coordenadas cilíndricas) na folga h é da forma $u_r = u_r(r,z)$, $u_z = u_\theta = 0$ e seguir o seguinte roteiro:

a) Demonstrar que a velocidade radial é da forma $u_r(r,z) = \frac{f(z)}{r}$. (0,5 pontos)

b) Demonstrar que a distribuição de pressão é puramente radial, isto é $p = p(r)$, assim como que a distribuição de velocidade radial resulta localmente Couette, isto é, $u_r(r,z) = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)$. (2 pontos)

c) Aplicando a equação de continuidade na superfície lateral na posição r, demonstrar que o gradiente de pressão resulta $\frac{dp}{dr} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3}\frac{1}{r}$. (1,5 pontos)

d) Considerando como condição de contorno $p(b) = 0$, calcular a distribuição de pressão e a pressão na câmara $p_a = p(a)$. (0,5 pontos)

e) Supondo que para $r \le a$ a pressão é constante e igual a p_a, demonstrar que a força resulta $F = \frac{3\mu Q b^2}{h^3}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$. (1,0 pontos)

f) Considerando como termos representativos da força de inércia e força viscosa respectivamente a $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}$ e $\nu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$, fazer uma análise de ordens de grandeza e demonstrar que a condição para que o escoamento seja considerado de inércia desprezível é $\left(\frac{Q}{\nu a}\right)\left(\frac{h}{a}\right) << 1$. Discutir as consequências desta condição. (0,5 pontos)

Continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

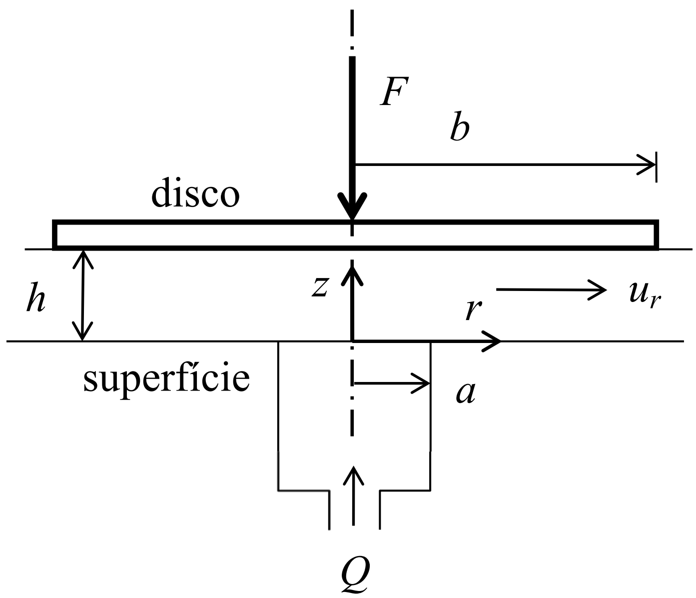
Navier-Stokes, componente r:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+G_r+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]$$

Navier-Stokes, componente z:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+G_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

Ajudas para o cálculo: $\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+cte$; $\int_0^1 x\left(1-x\right)dx=\frac{1}{6}$



Solução:

a) Da equação de continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right)=0 \;\Rightarrow\; r\,u_r=f\left(z\right) \;\Rightarrow\; u_r=\frac{f\left(z\right)}{r}$. Notar que $u_r\rightarrow\infty$ para $r\rightarrow 0$, mas a origem não forma parte do recinto.

b) Da equação de Navier-Stokes na componente z, resulta $\frac{\partial p}{\partial z}=0$; como o problema tem simetría de revolução, resulta $p=p\left(r\right)$.

Calculamos os termos para substituir na equação de Navier-Stokes, componente r :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=-\frac{f}{r^2} \quad ; \quad r\frac{\partial u_r}{\partial r}=-\frac{f}{r} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)=\frac{f}{r^2}$$

Substituindo, com a condição de escoamento de inércia desprezível, resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{f}{r^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dz^2}-\frac{f}{r^3}\right)=\frac{\mu}{r}\frac{d^2 f}{dz^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{d^2 f}{dz^2}=A=cte$$

Para calcular $f\left(z\right)$, integramos a expressão anterior, obtendo:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2}A\,z^2+B\,z+C$$

Da condição de contorno $u_r(r,0)=u_r(r,h)=0$ resulta $f(0)=f(h)=0$; daqui resultam $C=0$, $B=-\frac{1}{2}Ah$. Substituindo, obtemos:

$$f(z)=-\frac{1}{2}Ah^2\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)=-\frac{1}{2}\frac{r\,h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

$$u_r(r,z)=-\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}\frac{dp}{dr}\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

c) Calculamos a vazão volumétrica:

$$Q=\int_0^h u_r\,2\pi r\,dz=-\frac{\pi h^3 r}{\mu}\frac{dp}{dr}\int_0^1 z^*\left(1-z^*\right)dz^*=-\frac{\pi h^3 r}{6\mu}\frac{dp}{dr}\quad\Rightarrow\quad\frac{dp}{dr}=-\frac{6\mu Q}{\pi h^3}\frac{1}{r}$$

d) Integrando entre r e b, com a condição de contorno $p(b)=0$, calculamos a distribuição de pressão e a pressão na câmara:

$$p(b)-p(r)=\frac{6\mu Q}{\pi h^3}\ln\left(\frac{r}{b}\right)\quad\Rightarrow\quad p(r)=-\frac{6\mu Q}{\pi h^3}\ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$p(a)=p_a=-\frac{6\mu Q}{\pi h^3}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

e) A força resulta, integrando a distribuição de pressão:

$$F=\int_0^b p(r)2\pi r\,dr=p_a\,\pi a^2+\int_a^b p(r)2\pi r\,dr=-\frac{6\mu Q a^2}{h^3}\ln\left(\frac{a}{b}\right)-\frac{6\mu Q b^2}{h^3}2\int_{a/b}^1 r^*\ln r^*\,dr^*$$

$$\int_{a/b}^1 r^*\ln r^*\,dr^*=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad F=-\frac{6\mu Q b^2}{h^3}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\ln\left(\frac{a}{b}\right)-\frac{1}{2}-\left(\frac{a}{b}\right)^2\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]=\frac{3\mu Q b^2}{h^3}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

f) Fazendo uma análise de ordens de grandeza, temos que:

$$u_r\propto\frac{Q}{r\,h}\quad\Rightarrow\quad\left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|\propto\frac{Q}{r\,h}\frac{Q}{r\,h\,r}=\frac{Q^2}{r^3h^2}\quad;\quad\left|\nu\frac{\partial^2u_r}{\partial z^2}\right|\propto\nu\frac{Q}{r\,h\,h^2}=\nu\frac{Q}{r\,h^3}$$

$$\left|u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|<<\left|\nu\frac{\partial^2u_r}{\partial z^2}\right|\quad\Rightarrow\quad\frac{Q^2}{r^3h^2}<<\nu\frac{Q}{r\,h^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{Q\,h}{\nu\,r^2}<<1$$

O valor máximo da expressão anterior é para $r=a$, resultando finalmente $\left(\frac{Q}{\nu a}\right)\left(\frac{h}{a}\right)<<1$. O significado da expressão anterior é que a aproximação de inércia desprezível deixa de ser válida para valores de raio da câmara muito pequenos.