

Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Primeira Prova - 2014

1. (4 pontos) Um escoamento bidimensional, em regime permanente e não-viscoso é dado, num sistema cilíndrico de coordenadas, pelo campo de velocidades:

$$u_r = \frac{C_1}{r} \quad ; \quad u_\theta = \frac{C_2}{r} \quad ; \quad u_z = 0 \quad , \text{ onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são constantes.}$$

Os efeitos gravitacionais são desprezíveis. Observando as expressões, para $r \rightarrow 0$ temos que $\vec{u} \rightarrow \vec{0}$, e nessa condição temos que a pressão $p \rightarrow p_\infty$, onde p_∞ é um valor arbitrário. Se o fluido tem massa específica ρ , pedem-se:

- Verifique se o escoamento é incompressível; (0,5 pontos)
- Verifique se o escoamento é irrotacional; (0,5 pontos)
- Usando a equação de Euler, determine o gradiente de pressão ∇p e obtenha $p=p(r,\theta)$ por integração; (2 pontos)
- Usando a equação de Bernoulli, verifique o resultado da distribuição de pressão do item anterior. (1 ponto)

Dados:

Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$

Divergente da velocidade: $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

Rotacional da velocidade: $rot \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{r \partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & u_\theta & u_z \end{vmatrix} + \frac{u_\theta}{r} \vec{e}_z$

Equação de Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = - \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Equação de Bernoulli:

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp + g z = const$$

Solução:

- Para um escoamento incompressível, temos da continuidade que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Mas o divergente da velocidade é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{C_1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{C_2}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{C_1}{r} - r \frac{C_1}{r^2} \right) = 0$$

Logo, o escoamento é incompressível.

- Calculando o rotacional da velocidade:

$$\text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{C_1}{r} & \frac{C_2}{r} & 0 \end{vmatrix} + \frac{C_2}{r^2} \vec{e}_z = \vec{e}_z \left(-\frac{C_2}{r^2} - 0 \right) + \frac{C_2}{r^2} \vec{e}_z = 0$$

Logo, o escoamento é irrotacional.

- c) Da equação de Euler, para escoamento permanente, bidimensional e sem efeitos gravitacionais:

$$\begin{aligned} \rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo as velocidades:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r^3} (C_1^2 + C_2^2) \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

Logo, a pressão é função apenas do raio r , e temos:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho}{r^3} (C_1^2 + C_2^2)$$

Que resulta:

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho}{2r^2} (C_1^2 + C_2^2)$$

- d) Da equação de Bernoulli, para ρ uniforme, escoamento irrotacional e ignorando efeitos gravitacionais:

$$\underbrace{\frac{u_\infty^2}{2}}_0 + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{(u_r^2 + u_\theta^2)}{2} + \frac{p}{\rho}$$

Resulta, como seria de se esperar:

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho}{2r^2} (C_1^2 + C_2^2)$$

2. (6 pontos) Considerar o escoamento em lubrificação em um mancal bidimensional de comprimento L , onde existe um degrau na posição βL ($0 \leq \beta \leq 1$) que separa duas regiões com espessuras h_1 ($0 \leq x < \beta L$) e $h_2 > h_1$ ($\beta L < x \leq L$), como mostra a figura. Podemos considerar a superfície do mancal fixa e a superfície inferior em movimento com velocidade $u(x, z=0) = -U$. Na aproximação de escoamento de inércia desprezível de um óleo incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ e desprezando a força de volume, calcular a carga por unidade de comprimento normal W que pode sustentar o dispositivo. Para resolver este problema, seguir o seguinte roteiro:

- a) Demonstrar que os gradientes de pressão $\frac{dp_1}{dx}$ e $\frac{dp_2}{dx}$ são constantes nas correspondentes regiões. (1 ponto)

- b) Considerando as condições de contorno $p(x=0)=p(x=L)=0$ e a continuidade da pressão em $x=\beta L$, demonstrar que são satisfeitas as seguintes relações: (1,5 pontos)

$$\frac{dp_2}{dx} = -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{dp_1}{dx} \quad ; \quad p(x) = \begin{cases} \frac{dp_1}{dx} x & \text{para } 0 \leq x \leq \beta L \\ \frac{\beta}{1-\beta} \frac{dp_1}{dx} (L-x) & \text{para } \beta L \leq x \leq L \end{cases}$$

- c) Determinar os perfis de velocidades $u_1(z)$ e $u_2(z)$ nas correspondentes regiões e demonstrar que as velocidades médias $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ resultam: (1 ponto)

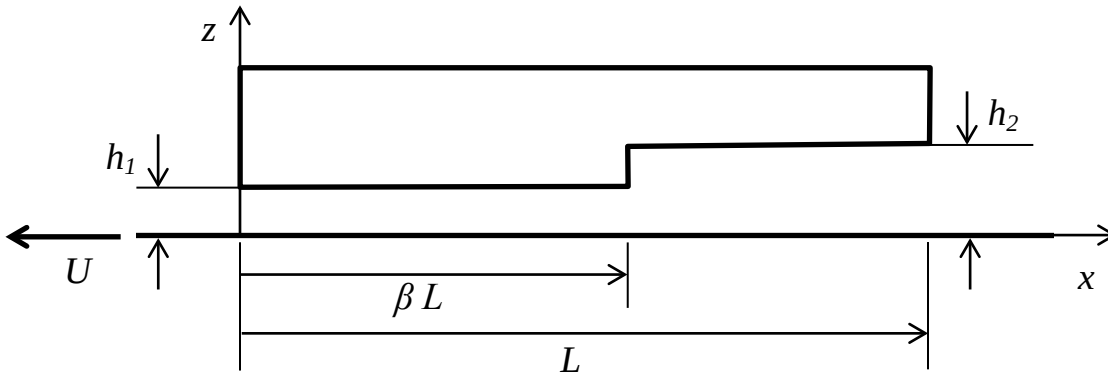
$$\bar{u}_1 = -\frac{U}{2} - \frac{h_1^2}{12\mu} \frac{dp_1}{dx} \quad ; \quad \bar{u}_2 = -\frac{U}{2} - \frac{h_2^2}{12\mu} \frac{dp_2}{dx}$$

- d) Aplicando a equação de continuidade no degrau do mancal, demonstrar que: (1,5 pontos)

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{6\mu U (h_2 - h_1)(1-\beta)}{(1-\beta)h_1^3 + \beta h_2^3}$$

- e) Finalmente, integrar a distribuição de pressão e demonstrar que: (1 ponto)

$$W = \frac{3\mu U L^2 (h_2 - h_1)\beta(1-\beta)}{(1-\beta)h_1^3 + \beta h_2^3}$$



Continuidade: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Navier-Stokes, componente x : $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

Solução:

- a) Fazendo uma análise de ordens de grandeza na equação de Navier-Stokes, resulta $p \cong p(x)$ e:

$$\frac{dp}{dx} \cong \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Integrando parcialmente em z , com a condição de contorno $u(0) = -U$ e $u(h) = 0$ resulta:

$$u(z) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right) - U \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (1)$$

Como h é constante nas duas regiões do mancal, então $\frac{dp_1}{dx}$ e $\frac{dp_2}{dx}$ são constantes nas correspondentes regiões.

- b) Integrando o gradiente de pressão pressão $\frac{dp_1}{dx}$ para $0 \leq x < \beta L$ com a condição de contorno $p(0) = 0$ resulta:

$$p_1(x) = \frac{dp_1}{dx} x$$

Integrando o gradiente de pressão pressão $\frac{dp_2}{dx}$ para $\beta L < x \leq L$ com a condição de contorno $p(L) = 0$ resulta:

$$p_2(x) = \frac{dp_2}{dx} (x - L)$$

Da continuidade da pressão em $x = \beta L$, $p_1(\beta L) = p_2(\beta L)$, resulta:

$$\frac{dp_1}{dx} \beta L = \frac{dp_2}{dx} (\beta L - L) \Rightarrow \frac{dp_2}{dx} = -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{dp_1}{dx} \quad (2)$$

Assim, a distribuição de pressão resulta:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{dp_1}{dx} x & \text{para } 0 \leq x \leq \beta L \\ \frac{\beta}{1-\beta} \frac{dp_1}{dx} (L - x) & \text{para } \beta L \leq x \leq L \end{cases}$$

c) A velocidade média pode ser calculada integrando a Eq. (1) como:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz = -\frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

Assim, para cada uma das regiões resulta:

$$\bar{u}_1 = -\frac{U}{2} - \frac{h_1^2}{12\mu} \frac{dp_1}{dx}$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{U}{2} - \frac{h_2^2}{12\mu} \frac{dp_2}{dx}$$

d) Aplicando a equação de continuidade no degrau resulta:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 h_1 &= \bar{u}_2 h_2 \Rightarrow -\frac{U h_1}{2} - \frac{h_1^3}{12\mu} \frac{dp_1}{dx} = -\frac{U h_2}{2} - \frac{h_2^3}{12\mu} \frac{dp_2}{dx} \\ \Rightarrow 6\mu U (h_2 - h_1) &= \left(h_1^3 \frac{dp_1}{dx} - h_2^3 \frac{dp_2}{dx} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (2) em (3), resulta:

$$6\mu U (h_2 - h_1) = \left(h_1^3 \frac{dp_1}{dx} + \frac{\beta}{1-\beta} h_2^3 \frac{dp_1}{dx} \right) \Rightarrow \frac{dp_1}{dx} = \frac{6\mu U (h_2 - h_1)(1-\beta)}{(1-\beta)h_1^3 + \beta h_2^3} \quad (4)$$

e) Integrando a distribuição de pressão, obtemos a carga por unidade de comprimento normal:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\beta L} p_1(x) dx + \int_{\beta L}^L p_2(x) dx = \frac{dp_1}{dx} \frac{1}{2} \beta^2 L^2 + \frac{\beta}{1-\beta} \frac{dp_1}{dx} \frac{1}{2} (L - \beta L)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{dp_1}{dx} L^2 \left[\beta^2 + \frac{\beta}{1-\beta} (1-\beta)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{dp_1}{dx} L^2 \beta \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo a Eq. (4) em (5), resulta finalmente:

$$W = \frac{3\mu U L^2 (h_2 - h_1) \beta (1-\beta)}{(1-\beta)h_1^3 + \beta h_2^3}$$