

PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019

Lista de exercícios 03

GABARITO

1. Na lista de exercícios 02 discutimos a variável aleatória X , com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = c(1 - x^2), \quad |x| \leq 1.$$

Determine a esperança e a variância de X .

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^1 (3/4)x(1 - x^2) dx = (3/4) \int_{-1}^1 (x - x^3) dx = 0.$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) = \int_{-1}^1 (3/4)x^2(1 - x^2) dx = (3/4) \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx = 1/5.$$

2. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1 e 1 , e seja $Y = X^n$, onde n é um número inteiro positivo. Determine as funções distribuição e densidade de Y .

Se n for par, e para $0 \leq y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-y^{1/n} \leq X \leq y^{1/n}) = y^{1/n} \Leftrightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{ny^{n-1/n}}.$$

Se n for ímpar, e para $-1 \leq y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = \frac{1}{2}(1 + y^{1/n}) \Leftrightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2ny^{n-1/n}}.$$

3. Considere o sinal de saída de um canal $Y = X + N$, onde a entrada X e o ruído N são variáveis aleatórias independentes e com esperanças iguais a zero.

- (a) Determine o coeficiente de correlação entre a entrada e a saída;

Como $E(X) = E(N) = 0$, temos que $E(Y) = 0$. Além disso:

$$\sigma_{XY} = E(XY) = E[X(X + N)] = E(X^2 + XN) = E(X^2) + E(X)E(N) = E(X^2) = \sigma_X^2.$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) = E[(X + N)(X + N)] = E(X^2 + 2XN + N^2) = E(X^2) + E(N^2) = \sigma_X^2 + \sigma_N^2.$$

$$\text{Portanto: } r = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{\sigma_X^2 (\sigma_X^2 + \sigma_N^2)}}.$$

- (b) Suponha que a entrada é estimada através de uma função linear da saída $g(Y) = aY$. Determine o valor de a que minimiza o erro quadrático médio $E[(X - aY)^2]$;

$$E[(X - aY)^2] = E(X^2 - 2aXY + a^2Y^2) = E(X^2) - 2aE(XY) + a^2E(Y^2) = (1 - 2a)\sigma_X^2 + a^2(\sigma_X^2 + \sigma_N^2).$$

Tomando a derivada da expressão acima (em função de a) e fazendo-a igual a zero, chegamos a $a = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_N^2}$.

- (c) Escreva o erro quadrático médio resultante em termos de σ_X/σ_N .

Substituindo o valor de a obtido no item (b) na expressão do erro quadrático médio, chegamos a

$$E[(X - aY)^2] = \sigma_X^2 \left(1 - \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_N^2}\right)$$

4. X e Y são variáveis aleatórias independentes e com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Determine a densidade da variável aleatória $Z = XY$.

Começamos com a transformação: $\ln Z = \ln(XY) = \ln X + \ln Y$, ou renomeando: $U = V + W$.

Se X tem distribuição uniforme entre 0 e 1, $V = \ln X$ terá a distribuição (para $-\infty < v \leq 0$):

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(X \leq e^v) = e^v \Leftrightarrow f_V(v) = e^v.$$

Do mesmo modo, $f_W(w) = e^w$.

A densidade de U é obtida através da convolução entre as densidades de V e de W , dado que são independentes (para $-\infty < u \leq 0$):

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(u - q)f_W(q)dq = \int_u^0 e^{u-q}e^q dq = -ue^u.$$

Integrando a densidade de U entre $-\infty$ e u , achamos a distribuição cumulativa de U : $F_U(u) = e^u(1 - u)$.

Finalmente, a distribuição de Z tal que $U = \ln Z$ é (para $0 \leq z \leq 1$):

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(U \leq \ln z) = (1 - \ln z)e^{\ln z} = z(1 - \ln z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = -\ln z = \ln(1/z).$$