NUNES, T., BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. PORTO ALEGRE: ARTES MÉDICAS, 1997.

8 Compreendendo Números Racionais

Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.

Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes *todos* divididos em *partes*, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre algumas poucas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações.

O trabalho interessante de Kerslake com adolescentes de 12-14 anos mostra o mesmo. Essas crianças desempenharam muito bem em julgamentos sobre a equivalência das frações nos itens retratados na figura 8.1. Todos os alunos entrevistados produziram frações equivalentes para os diagramas e pareceram muito familiarizados com o problema; alguns alunos acrescentaram que, se você remove a linha, os diagramas parecem iguais, e que era assim que eles sabiam que as frações eram as mesmas.

No entanto, diversas partes de pesquisa demonstraram, que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa. Por exemplo, no Brasil, Campos e cols. (1995) foram capazes de mostrar bastante claramente que este modo de introduzir frações pode, em realidade, conduzir as crianças a erro. O método de ensino, alegam, simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo tipo de número. O teste

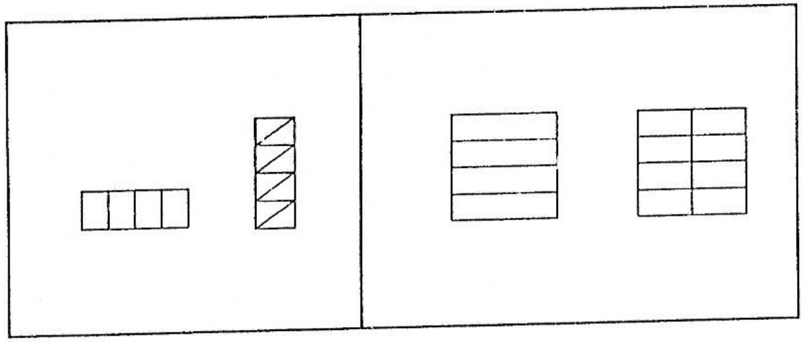

FIGURA 8.1. Itens-amostra das perguntas de equivalência. FONTE: Kerskale (1986).

desta hipótese é pedir às crianças que identifiquem frações em diagramas que não podem ser resolvidos por contagem dupla e requererem que elas raciocinem em termos de relações parte-todo.

Como uma forma de testar sua hipótese, Tania Campos e colegas deram três tipos de itens para os alunos (de quinta série, idade aproximada de 12 anos ou mais) que haviam aprendido o procedimento de contagem dupla, e então lhes pediram para nomear as frações retratadas em cada caso. O primeiro tipo foi um exemplo direto do que as crianças haviam aprendido em seus exercícios de sala de aula: o todo foi dividido em partes iguais e as partes pintadas eram contíguas. O segundo tipo de item foi menos típico, mas poderia ser resolvido através do mesmo processo de contagem dupla: o todo foi dividido em partes iguais, mas as partes pintadas não foram contíguas na figura. O terceiro tipo de item não foi típico e não podia ser resolvido através do procedimento de contagem dupla: o todo não estava explicitamente dividido em partes iguais e o número de partes tinha que ser descoberto pelos alunos através de uma análise das relações parte-todo. A figura 8.2 apresenta um exemplo de cada um destes tipos de item; estes deveriam ser contrastados com os itens contidos na figura 8.1, em que há uma divisão explícita dos todos em partes iguais.

Campos e colegas fizeram três previsões: (1) itens do tipo 1 e 2 não difeririam significativamente em sua dificuldade porque ambos os tipos podiam ser resolvidos através do procedimento de dupla contagem; (2) itens tipo 3 seriam significativamente mais difíceis do que os de tipo 1 e 2 porque estes não poderiam ser resolvidos por dupla contagem; e (3) o erro mais freqüente nos itens de tipo 3 resultariam de dupla contagem dos números de partes no desenho e do número de partes pintadas, sem qualquer ajustamento para a desigualdade das partes explicitamente indicada.

Os resultados do estudo apoiaram estas predições. Os alunos desempenharam bem, e igualmente bem, com os itens tipo 1 e 2; seu desempenho nestes itens estava perto do teto, embora não fosse perfeito, pois alguns alunos usaram a contagem dupla de uma forma diferente, contando as partes pintadas para o numerador e as

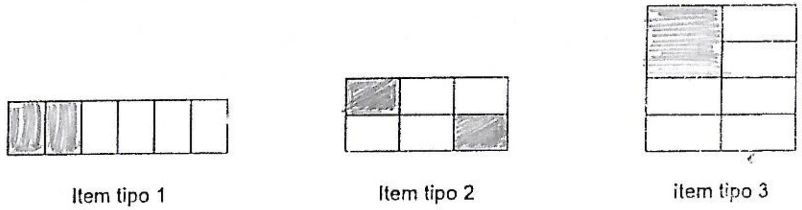

FIGURA 8.2. Exemplos de itens usados para estudar a compreensão das crianças sobre frações. FONTE: Campos e cols. (1995).

partes não pintadas para o denominador. Os itens tipo 3 foram muito mais difíceis do que os outros dois, e nestes itens o erro mais freqüente foi indicar a fração que corresponderia ao procedimento de dupla contagem. No item tipo 3 retratado na figura 8.2, 56% dos alunos escolheram 1/7 como a fração correspondente; 12% escolheram 2/8 e 4% indicaram tanto 1/4 como 2/8 como respostas corretas.

Estes resultados confirmam a suspeita de que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza. O estudo de Kerslake também contém evidências adicionais da falta de compreensão dos alunos da equivalência de frações, mesmo quando eles tiveram sucesso nos itens de testagem sobre equivalência. Embora seus sujeitos desempenhassem bem nos itens de equivalência que ela apresentou, eles não necessariamente encontraram frações equivalentes com o mesmo objetivo de efetuar adição e somavam frações com denominadores diferentes (por exemplo, 2/3 + 3/4 foram calculados como 5/7). Mesmo as crianças que primeiro transformaram as frações em frações equivalentes com o mesmo denominador não pareceram perceber a conexão entre equivalência de frações e adição. Cinco (de 15) das crianças resolveram corretamente 2/3 + 3/4, mas nenhuma conseguiu explicar por que havia mudado as frações e usado o denominador comum 12 antes de somar as frações. Elas estavam simplesmente "repetindo uma rotina" usada muitas vezes na sala de aula (Kerslake, 1986, p.21).

Esses estudos servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em frações e números racionais. (Usaremos a expressão "números racionais" de uma forma mais geral e frações apenas quando nos referirmos a problemas parte-todo). De fato, essa diversidade foi reconhecida por diversos pesquisadores. Por exemplo, Behr e cols. (1993), Kieren (1988; 1994) e Vergnaud (1983) propuseram modos de classificar construtos diferentes que estão relacionados a números racionais. Carpenter e cols. (1993) tentaram uma síntese destas visões diferentes, mas concluíram que ainda não está claro que nível de detalhe essas classificações deveriam incluir, porque ainda não há pesquisa suficiente para decidirmos quais distinções são centrais e quais não são.

Não tentaremos uma classificação de situações que envolvem números racionais porque concordamos que os fatos que são necessários não estão ainda posicionados. Em vez disso, trataremos de dois temas: a compreensão das crianças de números racionais como quantidades extensivas, por um lado, e como quantidades intensivas por outro. Estes temas não cobrem a gama inteira dos problemas que podem ser colocados sobre números racionais, mas acreditamos que eles envolvem os tópicos fundamentais com os quais as crianças devem lidar para entender este tipo de número.

Neste ponto, parece importante apontar a conexão entre números racionais e raciocínio multiplicativo que já mencionamos no capítulo 7. Na primeira seção daquele capítulo, introduzimos a idéia geral de divisão e cortes, e então não a repetiremos aqui. Procederemos diretamente para o trabalho empírico sobre a questão da compreensão das crianças de divisão e cortes.

A primeira seção neste capítulo lida com a compreensão das crianças das relações envolvidas na divisão simples de quantidades descontínuas e contínuas. Examinaremos as evidências sobre a compreensão das crianças de relações em situações de divisão e os começos da quantificação. Apenas os aspectos extensivos do número racional são considerados nesta primeira seção. A segunda seção examina a compreensão das crianças dos aspectos extensivos e intensivos de números racionais no contexto de sua compreensão de equivalências e cortes sucessivos. A terceira seção discute questões relacionadas à compreensão e à representação de números racionais. A seção final apresenta as nossas conclusões e indica questões adicionais para pesquisa.

1 COMPREENDENDO DIVISÃO E *N*-CORTES SIMPLES

1.1 Dividindo Conjuntos

Foi freqüentemente colocado que a compreensão da divisão começa com a compreensão das crianças de distribuição. Mesmo crianças tão novas quanto as de 5 anos podem dividir conjuntos em quantidades iguais usando o procedimento um-para-mim-um-para-você sem erro. A maioria das crianças de 5 anos vai adiante, fazendo inferências sobre a igualdade dos conjuntos obtidos dessa forma, como vimos anteriormente (Frydman e Bryant, 1988). Mas deve-se fazer uma distinção entre distribuição e divisão. Quando as crianças estão preocupadas com distribuir, elas se concentram sobre dar quantidades iguais a cada receptor. A invariável na distribuição é a correspondência termo-a-termo entre os conjuntos distribuídos. Na divisão, as invariáveis são mais complexas: elas se referem às relações entre o dividendo (o número que está sendo dividido), o divisor (o número no qual o dividendo está dividido) e o quociente (o resultado da divisão). (Na divisão $72 \div 8 = 9$,72 é o dividendo, 8 é o divisor e 9 o quociente.) Em uma situação de distribuição, focalizar problemas de divisão envolve considerar as relações, por exemplo, entre o número de doces a ser partilhado, o número de crianças que receberá os doces e o número de doces que cada criança receberá. Se desejamos testar a compreensão das crianças dessas relações, precisamos saber se elas entendem que há uma relação inversa entre o número de receptores e o tamanho da quota. Em outras palavras, precisamos saber se as crianças compreendem as conseqüências do tamanho de *n* em um *n*-corte.

A primeira questão que consideraremos ao analisar a compreensão das crianças de divisão é se as crianças novas podem entender essas relações em uma situação de divisão antes que possam realmente calcular totais de divisão. Até o momento neste livro, repetidamente verificamos que as crianças compreendem relações antes que possam lidar com valores absolutos: isso foi verdade para medida, comparações em situações aditivas, correspondência um-para-muitos e quantidades intensivas. Laureen Resnick e Janice Singer (1993) também sugeriram a possibilidade de que as crianças raciocinem sobre relações tanto no domínio de números inteiros como no domínio de números racionais antes que possam quantificar estas relações. Portanto, começaremos a revisão dos estudos empíricos considerando como as crianças novas se desempenham em tarefas que envolvem divisão de quantidades descontínuas e contínuas antes de ter aprendido como resolver esses tipos de problema na escola.

Jane Correa (1995) realizou uma série de estudos sobre a compreensão de crianças novas a respeito das conseqüências do tamanho de *n* em um *n*-corte no qual os resultados de distribuir doces entre números diferentes de receptores deveriam ser antecipados pelas crianças. As crianças estavam em três faixas etárias (5, 6 e 7 anos) e foram entrevistadas individualmente em suas escolas em Oxford. Foi-lhes apresentada uma série de situações nas quais o mesmo número de doces deveria ser partilhado independentemente para os coelhos freqüentando cada uma de duas festas diferentes. A pergunta colocada para as crianças foi: os coelhos em uma festa vão receber o mesmo número de doces que os coelhos na outra? Correa usou coelhos pequenos, com pequenas cestas sobre as costas, nas quais ela colocou os doces. Ela fez esta distribuição por trás de uma tela, de modo que as crianças não podiam ver quanto ela estava dando para cada coelho. Considerando estas precauções metodológicas, não houve ambigüidade a respeito do que as questões se referiam; as respostas das crianças não poderiam ser baseadas em informação perceptual. Elas tinham que antecipar os resultados da distribuição.

Dois tipos de problema foram dados para as crianças. Em um, o número de coelhos era o mesmo em ambas as festas; no outro, o número era diferente. Para cada um dos itens as crianças foram solicitadas a indicar se os coelhos em ambas as festas receberam o mesmo número de doces, e, se não, em que festa os coelhos receberam mais doces.

A predição de Correa era que o segundo tipo de problema seria significativamente mais difícil, porque requer uma compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente. Seus resultados confirmaram suas expectativas: havia uma diferença significativa no nível de dificuldade dos dois problemas. As crianças cometeram poucos erros quando o número de coelhos nas duas partes era o mesmo. Em contraste, as porcentagens das crianças desempenhando acima do nível de acaso (ou seja, dando 5 ou 6 respostas corretas entre 6) nas situações em que o número de coelhos foi diferente foram de 30, 55 e 85%, respectivamente, para as crianças de 5, 6 e 7 anos. Assim, as crianças mais novas tinham grande dificuldade com este problema, mas metade das crianças de 6 anos e a maioria das de 7 anos, de fato, acertou a maior parte do tempo.

Correa também analisou os erros das crianças. Poderia-se pensar que as crianças que cometeram erros simplesmente responderam que, como o número de doces a ser distribuídos na festa era o mesmo, os coelhos em ambas festas receberiam o mesmo número de doces. Isso é de fato o que a maioria das crianças de 5 e 6 anos disse quando cometeram erros. Entre as crianças de 7 anos, no entanto, houve um tipo diferente de erro: a grande maioria das respostas erradas indicou que quanto maior o número de coelhos na festa, mais doces eles receberiam. Esta resposta poderia ser vista, em certo sentido, como uma piora no desempenho com a idade, porque parece menos sensata do que dizer que os coelhos recebem o mesmo número de doces. Por outro lado, tal resposta poderia refletir a tentativa das crianças de levar em conta o número de receptores na situação de distribuição, que parece ser completamente ignorado pelas crianças mais novas. Ao fazer isso, elas chegam à conclusão errada sobre como o número de receptores e o tamanho da quota se relacionam. Se esta interpretação dos erros das crianças de 7 anos está certa, esta aparente piora no desempenho tende a não ser um achado característico das crianças entrevistadas por Correa.

Em suma, aproximadamente metade das crianças de 6 anos e a maioria das de 7 anos poderiam entender o efeito do tamanho de *n* em uma situação *n*-corte e poderiam raciocinar sobre a relação inversa entre quociente e divisor, mesmo que não soubessem como calcular totais de divisão.

1.2 Dividindo quantidades contínuas

A conexão entre divisão e frações fica imediatamente clara quando pensamos sobre o tipo de problema que recém descrevemos mas substituímos os conjuntos de doces por quantidades contínuas, como barras de chocolate, a serem distribuídas em festas. O resultado da divisão das quantidades contínuas, em vez de ser subconjuntos, seriam frações. A conexão que estamos fazendo entre problemas com material descontínuo e contínuo, evidentemente, não é acidental. Thomas Kieren (1988; 1994), com base em uma análise matemática de números racionais, sugeriu que as frações são números produzidos por divisões (em vez de por união com números inteiros); elas são números no campo dos quocientes. As novas propriedades fundamentais ou invariáveis que distinguem os números racionais dos números inteiros são identificadas quando os números racionais são colocados no campo dos quocientes.

Se isso está certo, deveríamos buscar a origem da compreensão das crianças de números racionais em situações de divisão. A ação de dividir ao meio ou "cortando" (um termo que enfatiza a simetria das partes resultantes) torna possível responder à pergunta "quanto?" de uma forma nova. Quando obtemos um número através de divisão, há sempre uma relação dupla a ser considerada: há uma referência a uma unidade, que é tomada como o todo, e uma referência do tamanho de *n* no *n*-cortes: quanto maior o tamanho de *n*, menor é a resposta à pergunta "quanto?".

Consideremos o que acontece quando crianças novas são solicitadas a trabalhar com barras de chocolate em vez de conjuntos de doces sendo distribuídos: elas são

capazes de entender a relação inversa entre o tamanho de *n* no *n*-corte com quantidades contínuas assim como fazem no contexto da divisão dos conjuntos?

Há poucas evidências sobre esta questão, infelizmente, e nenhuma, até onde sabemos, que compare diretamente a compreensão das crianças das relações em divisão com quantidades descontínuas e contínuas. No entanto, um estudo (realizado para outros propósitos e discutido posteriormente em maiores detalhes) provê uma resposta inicial à pergunta – e uma resposta bastante encorajadora. Despina Desli (1994) realizou uma investigação com crianças gregas de 6, 7 e 8 anos de escolas estaduais em Thessaloniki. As situações-problema em seu estudo foram semelhantes às do estudo de Correa (1995), mas as festas foram para crianças e a distribuição foi de barras de chocolate. As crianças foram solicitadas a dizer se as crianças nas duas festas receberiam a mesma quantidade de chocolate, ou se as crianças em um evento receberiam mais do que as no outro, mantendo o número de chocolates constante e variando o número de crianças entre as festas, e vice-versa.

As porcentagens de respostas corretas para as crianças de 6, 7 e 8 anos, respectivamente, foram de 75, 85 e 95%. Assim, o grupo de crianças neste estudo parece ter desempenhado igualmente bem com quantidades contínuas como as crianças no estudo anterior fizeram ao resolver problemas com quantidades descontínuas.

Como Correa, Desli também registrou algumas respostas indicando que as crianças na festa com mais crianças receberiam mais chocolate. Este tipo de erro, no estudo de Correa, foi observado mais freqüentemente entre crianças de 7 anos do que entre as de 6 anos. Assim, novamente a deterioração aparente no raciocínio por volta desta faixa etária está provavelmente relacionada às tentativas das crianças de considerar ambas as variáveis, o número de chocolates e o número de crianças convidadas para a festa. Quando fazem isso, elas interpretam erroneamente a relação inversa entre quociente e divisor como uma relação direta.

No entanto, nenhuma comparação direta entre os estudos é possível por duas razões. Primeiro, elas foram executadas com dois grupos de crianças que poderiam diferir: um grupo de crianças era de Oxford e o outro, de Thessaloniki. Segundo, o estudo de Desli inclui apenas dois itens diretamente comparáveis aos do trabalho de Correa, e, desta maneira, ela não pode investigar se o desempenho das crianças individuais foi significativamente acima do nível de acaso. Mais pesquisas são claramente necessárias, mas podemos razoavelmente esperar que um bom número de crianças de 6 anos e talvez a maioria das de 7 anos serão capazes de entender o efeito do tamanho de *n* em *n*-corte quando quantidades contínuas estiverem envolvidas. Estas habilidades claramente precedem o conhecimento das crianças de representações fracionais e sua habilidade de calcular com frações.

1.3 Invertendo Cortes

Em uma situação de divisão, as crianças podem ser informadas sobre quantos doces há e quantos coelhos serão convidados para uma festa e indagadas sobre o que acontece com o tamanho das porções quando o número de coelhos é mudado. Esta é a forma mais usual na qual as crianças considerarão questões sobre divisão na vida cotidiana; estes problemas são denominados *problemas partitivos*.

Há um segundo tipo de problema que pode ser apresentado às crianças sobre as mesmas divisões: se você tem um determinado número de doces e estabelece as quotas antecipadamente, o que acontece com o número de coelhos que podem ser convidados às festas à medida que você muda o tamanho das quotas? Este segundo tipo de problema, freqüentemente denominado *problema de divisão medida por quotas* (ou *de medida*), *quotitive problem*, envolve a mesma invariável na divisão: a relação inversa entre o quociente e o divisor. No entanto, acreditamos que, no que tange às crianças novas, problemas partitivos e de divisão medida por quotas são diferentes da perspectiva psicológica.

Se consideramos como as crianças poderiam resolver estes dois tipos de problemas com materiais concretos, torna-se claro que as ações a serem efetuadas são diferentes nas duas situações. Nos problemas partitivos, as crianças podem distribuir os doces em uma forma de correspondência termo-a-termo e podem, então, contar um dos conjuntos a fim de descobrir quantos doces os coelhos receberam. Pouca antecipação está envolvida quando os coelhos estão presentes; tudo o que as crianças precisam fazer é distribuir os doces corretamente. Na situação de divisão medida por quotas, as crianças precisam construir cada quota em sucessão – por exemplo, pegar 4 doces e então mais 4, e assim por diante – e estabelecer uma correspondência um-para-muitos entre as quotas e os coelhos enquanto eles esgotam os doces. Problemas de divisão medida por quotas podem ser vistos como invertendo o *n*-corte: dado um determinado resultado, qual foi o tamanho de *n* neste corte? Esta análise nos leva a esperar que entender a relação inversa entre quociente e divisor em problemas de divisão medida por quotas é uma aquisição posterior à compreensão das mesmas relações em problemas partitivos. Também podemos esperar que a diferença nas taxas de sucesso desapareçam à medida que as crianças atinjam 7 ou 8 anos, porque elas serão capazes de inverter o *n*-corte.

Correa (1995) comparou a compreensão das crianças de relações inversas entre quociente e divisor em situações partitivas e de divisão medida por quotas sem quantificação. O cenário usado neste estudo foi o mesmo dos coelhos e festas descrito anteriormente. Os problemas partitivos já foram descritos na seção1.1. Nos problemas de divisão medida por quotas, as crianças foram informadas de que elas iriam organizar duas festas, uma para os coelhos cor-de-rosa e uma para coelhos azuis, e elas tinham que decidir quantos coelhos convidar. Para a festa dos coelhos rosa, elas preparariam pratinhos com, por exemplo, três doces em cada um; para a festa dos coelhos azuis elas preparariam pratos com quatro doces cada. Para cada festa também foi mostrado às crianças um desenho de um prato com o número correto de doces como apoio de memória. O número total de doces a ser usado em ambas as festas foi o mesmo. As crianças foram indagadas se elas poderiam convidar o mesmo número de coelhos para vir a cada festa e, se não, que festa poderia ter mais coelhos convidados. Os sujeitos, como os que responderam aos problemas partitivos, tinham 5, 6 e 7 anos e eram de escolas em Oxford. De forma semelhante ao procedimento usado nos problemas partitivos, metade dos itens teve as mesmas quotas nos pratos (vistas como tarefas de controle) e metade teve quotas diferentes.

As crianças desempenharam significativamente melhor nos problemas de mesma quota do que nos problemas com quotas diferentes. O desempenho chegou ao máximo ou quase nos problemas de mesma quota, indicando que as crianças entenderam a situação-problema. Nos problemas de divisão medida por quotas diferentes, as porcentagens de crianças desempenhando acima do nível do acaso foram de 15, 38 e 40%, respectivamente, para crianças de 5, 6 7 anos. Estas porcentagens são consideravelmente mais baixas do que as observadas nos problemas partitivos. Enquanto nos problemas partitivos a maioria das crianças de 7 anos desempenhou acima do nível de acaso, nos problemas de divisão medida por quotas o número de crianças desempenhando no nível acima do acaso foi de menos da metade. Assim, entender as relações em problemas que exigiam inverter um *n*-corte (problemas de divisão medida por quotas) é mais difícil para crianças novas do que entender as mesmas relações quando o valor no corte é conhecido (problemas partitivos).

Até o momento, estivemos interessados apenas na compreensão das crianças de relações. Como este entendimento se conecta com a quantificação de cortes? Na seção seguinte, examinaremos como as crianças começam a quantificar relações em situações de divisão.

1.4 O início da quantificação

Quantificando a divisão com quantidades contínuas As situações descritas nos estudos de Correa (1995) parecem tão simples para um adulto que poderíamos esperar que as crianças novas fossem capazes de resolver problemas de divisão com materiais concretos muito antes de precisarem entender relações. Isso pode ser assim se as crianças têm os coelhos e os doces na frente delas, de modo que tudo o que elas precisem fazer é efetuar a distribuição. Mas isso não seria em absoluto resolver um problema: não há necessidade de raciocinar ou antecipar coisa alguma em tal situação. Por outro lado, se os coelhos não estão presentes e as crianças precisam conceber a correspondência entre coelhos e doces mentalmente, então as crianças teriam um problema de divisão genuíno para resolver. Quão bem podem as crianças novas resolver este tipo de problema? Vimos que muitas crianças de aproximadamente 6 anos resolveram com êxito problemas de raciocínio aditivo com materiais concretos, pelo menos quando elas puderam modelar diretamente as situações. O mesmo é verdade nos problemas de correspondência um-para-muitos. É possível que tais crianças novas possam também resolver problemas de divisão com materiais concretos?

Correa (1995) estudou a habilidade das crianças de resolver problemas de divisão medida por quotas usando materiais concretos em tarefas nas quais os coelhos, embora visíveis, foram empilhados em um canto para que as crianças não apenas distribuíssem os doces de uma forma mecânica. Ela projetou problemas partitivos e também de divisão medida por quotas que deu para crianças com 5 e 6 anos de escolas estaduais em Oxford resolverem.

Nos problemas partitivos, a questão foi quantos doces cada coelho receberia. Inicialmente, foram mostrados às crianças os coelhos que viriam para a festa, e elas tiveram permissão para brincar com eles. Depois de algum tempo, o experimentador disse que os coelhos estavam cansados e tinham que ir dormir. Os coelhos foram então empilhados em um canto da mesa, e as crianças foram solicitadas a preparar a festa para os coelhos enquanto eles estavam dormindo. Os doces de faz-de-conta teriam que ser distribuídos sem recorrer à correspondência perceptual entre doces e coelhos. As crianças tinham que antecipar que cada lugar no qual os doces estavam colocados representava um coelho.

Nos problemas de divisão medida por quotas, a pergunta foi quantos coelhos seriam convidados para a festa. As crianças brincaram com os coelhos, os colocaram para dormir e foram, então, solicitadas a preparar a festa como, por exemplo, três doces para cada coelho. Elas poderiam, desta forma, decidir quantos coelhos seriam convidados para a festa. Assim, as crianças tinham que raciocinar que, para cada quota que fosse estabelecida, um coelho seria convidado.

Os resultados (apresentados na figura 8.3) mostraram que crianças de 5 anos tinham dificuldade considerável para resolver problemas de divisão medida por quotas, embora elas pudessem ter sucesso em alguns problemas partitivos. Por volta dos 6 anos, as crianças eram capazes de resolver problemas de divisão medida por quotas razoavelmente bem, mas a diferença entre problemas partitivos e de divisão medida por quotas era ainda significativa.

Correa também analisou as estratégias das crianças ao resolver esses problemas. Entre as crianças de 5 anos, o sucesso foi mais provável nos problemas partitivos, especialmente nos problemas que apenas envolviam dois coelhos; nesses, as crianças podiam simplesmente usar uma estratégia um-para-você e um-para-mim e então contar os blocos em um dos subconjuntos. Mesmo nesta situação, no entanto, algumas crianças de 5 anos seguiram adiante contando o lote todo de blocos e deram a resposta errada. Esse tipo de contagem não deveria nos surpreender: vimos no capítulo 2 que algumas crianças de 5 anos ainda não parecem captar a importância da contagem e não mudam o modo como contam de acordo com o tipo de pergunta que elas têm que responder.

Em contraste, a maioria das crianças de 6 anos (70%) mostrou claramente estratégias distintas para resolver problemas partitivos e de divisão medida por quotas. Em problemas partitivos, elas colocaram os blocos um de cada vez em locais diferentes sobre a mesa, com o número de localizações correspondendo ao número de coelhos que iriam à festa, repetiram a operação de distribuição até esgotar os blocos e então contaram os subconjuntos. Nos problemas de divisão medida por quotas, a estratégia preferida foi pegar repetidamente um grupo de blocos com o mesmo número que a quota, colocar esses grupos em locais diferentes sobre a mesa até que não restassem blocos e então contar o número de grupos formados.

Assim, suas estratégias modelaram diretamente a situação-problema e elas puderam ter sucesso mesmo quando as correspondências entre coelhos e doces tinham que ser representadas mentalmente. Porém, Correa também observou que algumas das crianças que haviam adequadamente realizado a modelagem da situação com

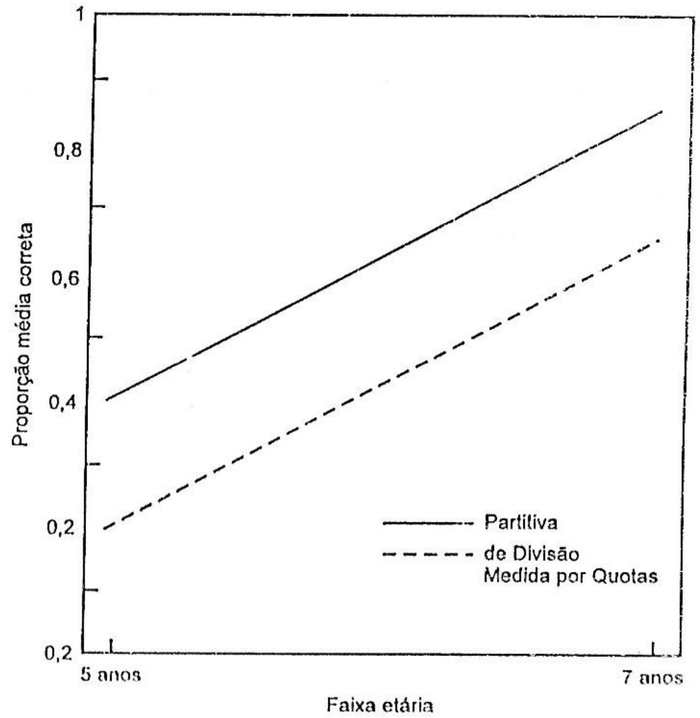

FIGURA 8.3. Respostas corretas nas tarefas partitivas e de divisão medida por quotas. FONTE: Correa e Bryant (1994).

blocos na situação de divisão medida por quotas poderiam ter cometido erros e nomeado o número de blocos em um conjunto em vez de o número de conjuntos como a resposta. Esta confusão, também observada por Gravemeijer (no prelo), poderia resultar do uso de apenas um tipo de combinação – blocos – para lidar com problemas de duas variáveis.

Os resultados desse estudo são bastante encorajadores no sentido de que sugerem que crianças de 6 anos já podem organizar suas ações e raciocinar sobre divisão suficientemente bem para resolver problemas com materiais concretos. Porém, devemos ser cautelosos com o sentido deste sucesso. Como Parrat-Dayan e Vonèche (1992) apontaram, quando as crianças resolvem problemas em situações de distribuição como os descritos anteriormente, elas poderiam não entender ainda o significado lógico dos seus procedimentos. Por exemplo, Parrat-Dayan (1985) observou que era muito mais fácil para as crianças efetuar uma tarefa de distribuição na qual 6 maçãs fossem distribuídas para 2 pessoas do que mostrar a metade de 6 maçãs. Portanto, ela alegou, as crianças poderiam ser capazes de dividir e contar conjuntos acuradamente, mas não necessariamente captar as relações parte-todo implicadas nos problemas de divisão. Um teste mais forte de sua compreensão de relações parte-todo pode ser colocado no contexto de quantidades contínuas, no qual contar não é possível. Então nos voltamos a seguir para quantidades contínuas.

Quantificando divisão com quantidades contínuas Que as crianças precisam quantificar quantidades descontínuas parece óbvio: elas precisam aprender a contar e usar o procedimento de contagem apropriadamente para a situação. No entanto, não está claro como as crianças podem começar a quantificar quantidades contínuas. A maioria dos autores parece concordar que a quantificação de quantidades contínuas depende do uso de relações lógicas. Piaget e colaboradores enfatizaram as relações de transitividade como o ponto de partida para a medida, e relações parte-todo como o ponto de partida para a compreensão de frações (Piaget e cols., 1960). Peter Bryant (1974) sugerira que, mesmo antes que as crianças possam começar a entender relações parte-todo, elas são capazes de usar um tipo mais elementar de relação em suas primeiras lides com quantidades contínuas em frações: as relações parte-parte. Se uma quantidade contínua é dividida em apenas duas partes, pode-se, com freqüência, julgar bastante facilmente se uma parte é maior que a outra. As relações "maior/menor do que" e "igual a", sugeriu ele, poderiam ser as primeiras relações lógicas usadas no conhecimento da quantificação de frações. Como elas devem ser usadas em situações nas quais o todo é dividido em duas partes, então "metade" tem um *status* especial nas origens da quantificação das frações: o "limite do meio" define se as duas partes são iguais ou se uma é maior que a outra.

Para verificar esta hipótese, Spinillo e Bryant (1991) projetaram uma série de experimentos para analisar o uso das crianças do "limite do meio" em julgamentos de equivalência. A tarefa, já descrita no capítulo 7, exigiu que as crianças comparassem uma figura a uma caixa, indicando qual das duas caixas estava representada na figura. As caixas estavam divididas em duas partes correspondendo às quantidades de tijolos azuis e brancos. A figura era muito menor do que as caixas, de modo que comparações perceptuais diretas não eram possíveis. Além disso, foi dito que os tijolos foram rearranjados após a fotografia ter sido tirada, de modo que formaram listas horizontais nas caixas e listas verticais na fotografia, ou vice-versa.

A fim de investigar o papel do "limite do meio" no desempenho das crianças, três condições experimentais foram criadas. Em uma condição (as tarefas metade), metade dos tijolos de uma das caixas eram azuis e a outra metade, brancos, enquanto na outra caixa havia mais tijolos azuis do que brancos. Na segunda condição (as tarefas *cross-half*) os valores cruzaram a metade da fronteira: uma caixa tinha mais tijolos azuis do que brancos, e a outra tinha mais brancos do que azuis. Na terceira condição (as tarefas dentro da metade), ambas as caixas tinham mais tijolos azuis do que brancos (ver figura 8.4). As crianças na faixa etária de 4 a 7 anos estavam freqüentando a pré-escola e escolas estaduais em Oxford. Spinillo e Bryant previram que as crianças desempenhariam significativamente melhor em tarefas que envolviam o "limite do meio" (primeira condição) ou que cruzassem o "limite do meio" (segunda condição) do que nas tarefas nas quais o "limite do meio" não podia ser usado como a base para o julgamento.

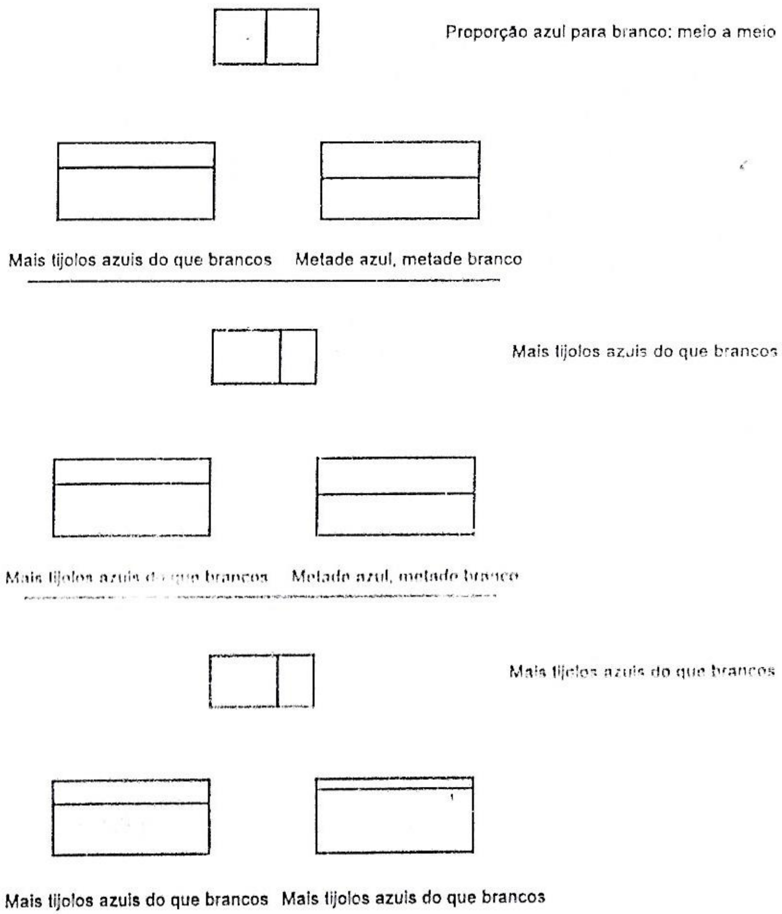

FIGURA 8.4. O material utilizado para testar a importância do "limite do meio" nos julgamentos das crianças sobre proporções. FONTE: Spinillo e Bryant (1991).

Seus resultados podem ser resumidos da seguinte forma (para uma descrição completa dos três estudos, ver Spinillo e Bryant, 1991):

1. Houve uma clara progressão no número médio de respostas corretas por faixa etária, e esta progressão foi estatisticamente significativa;
2. As crianças desempenharam melhor nas tarefas em que podiam usar o "limite do meio" para fazer seus julgamentos, e esta diferença foi também estatisticamente significativa;
3. Menos da metade das crianças de 5 anos, aproximadamente metade das de 6 e a maioria das de 7 e 8 anos desempenhou significativamente acima do nível

do acaso nas tarefas em que o "limite do meio" podia ser usado como uma referência para comparar a figura com uma das caixas.

Estes resultados sugerem fortemente que o "limite do meio" poderia representar o primeiro passo no uso das crianças de relações para quantificar frações.

Nos estudos de Spinillo e Bryant, as relações envolvidas foram relações parte-parte. As crianças estavam preocupadas em saber se as partes tinham o mesmo tamanho ou se uma era maior do que a outra ao fazer fotografia-caixa. Em um estudo posterior, Despina Desli (1994) investigou adicionalmente o papel do "limite do meio" em quantificar frações examinando situações parte-todo. Seu estudo foi realizado em Thessaloniki com crianças na faixa etária de 6 a 8 anos, todas freqüentando escolas públicas. As crianças resolveram uma série de itens em uma tarefa nova envolvendo relações parte-todo. Nesta tarefa (brevemente descrita anteriormente neste capítulo, seção 1.2), os sujeitos foram informados de que havia duas festas sendo organizadas e em cada uma das festas uma determinada quantidade de barras de chocolate seria igualmente dividida entre as crianças que fossem à festa. A tarefa envolvia julgar se as crianças nas duas festas receberiam a mesma quantidade de chocolate e, se não, em que festa as crianças receberiam mais. Três condições semelhantes às usadas por Spinillo e Bryant foram criadas: duas condições nas quais as crianças poderiam usar o "limite do meio" como uma referência para fazer seus julgamentos (os itens metade e *cross-half*) e uma condição na qual o "limite do meio" não era uma boa referência para um julgamento correto (os itens dentro da metade). Um item-amostra de cada uma das condições é apresentado na figura 8.5; as crianças nas festas diferentes foram representadas por bonecas de recorte codificadas com cores por festa para facilitar a comunicação e o registro das respostas.

Os resultados são brevemente resumidos aqui. Primeiro, as crianças em todas as faixas etárias desempenharam no nível máximo quando o "limite do meio" podia ser usado como uma referência para seus julgamentos e não cometeram erros. Quando o "limite do meio" não podia ser usado como referência, as porcentagens de respostas corretas para as crianças de 6, 7 e 8 anos foram, respectivamente de 40, 60 e 75%. Apenas as crianças de 8 anos, como grupo, desempenharam significativamente melhor do que o nível de acaso. Assim, Desli foi capaz de mostrar que o "limite do meio" desempenha um papel importante na quantificação de relações parte-todo, assim como em relações parte-parte.

Estes resultados positivos não deveriam nos levar a negligenciar a dificuldade destas questões colocadas para as crianças: elas tinham que considerar que a fração de uma barra de chocolate seria dada às crianças em cada festa, e tinham que fazer isso sem nenhuma divisão explicitamente apresentada dos todos. Em todos os problemas discutidos nesta seção, tanto o número de chocolates como o número de crianças foram diferentes nas festas. Quando estes problemas de duas variáveis foram comparados com problemas de uma variável apresentados na seção 1.2, na qual o número de crianças ou o número de chocolates era constante entre as festas, os problemas de duas variáveis mostraram-se significativamente mais difíceis como um

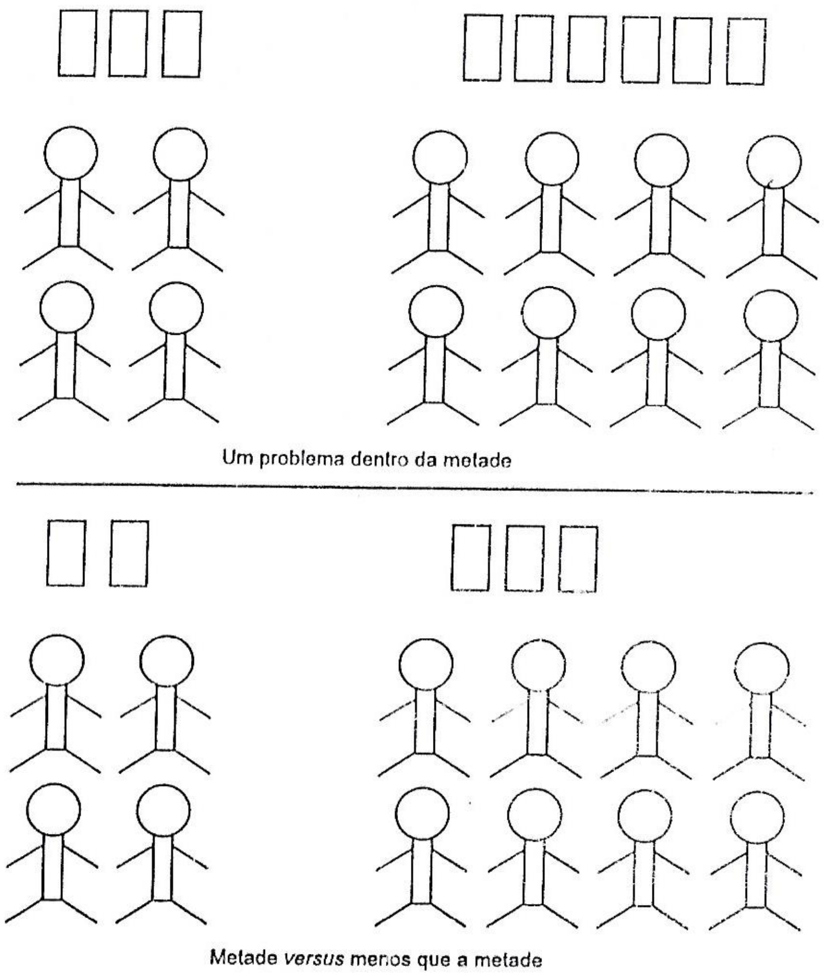

FIGURA 8.5. O material utilizado para estudar julgamentos parte-parte e parte-todo. FONTE: Desli (1994).

todo, mas os que envolveram o "limite do meio" não foram mais difíceis do que os problemas de uma variável.

Uma análise das justificativas dos alunos deu apoio adicional à hipótese de que *metade* desempenha um papel importante na quantificação. Isso ocorreu *mesmo nos problemas dentro da metade* nos quais as crianças em ambas festas receberam mais da metade de chocolates cada – por exemplo, uma festa tinha 4 crianças e 3 barras de chocolate e a outra festa tinha 8 crianças e 6 barras de chocolate. Nesses itens, dois tipos de raciocínio surgiram: (1) a distribuição mental de metade do chocolate para todas as crianças sem quantificação exaustiva; e (2) a distribuição mental da metade seguida por uma quantificação exaustiva do que tinha restado. A primeira destas estratégias – distribuição da metade sem quantificação exaustiva do restante – resultou em conclusões erradas. Por exemplo, em um item no qual 3 chocolates deviam ser divididos entre 4 crianças na festa azul e 6 chocolates seriam divididos entre 8 crianças na festa amarela, um aluno sugeriu: "O grupo amarelo vão ganhar mais porque eles vão dividir cada chocolate em dois pedaços e vão ter dois chocolates sobrando para serem divididos de novo. Fazendo o mesmo no grupo azul, vai ter só um chocolate sobrando." A quantificação tentada pela criança é em termos de metade; a porção restante, que não é suficiente para cada criança, não é quantificada. A segunda estratégia, na qual os alunos primeiro distribuíram mentalmente metade e então exaustivamente quantificaram o restante, levou a sucesso. Um aluno, por exemplo, sugeriu: "Todas as crianças vão ganhar a mesma quantidade de chocolate. Elas dividem cada chocolate em dois pedaços, e cada um recebe metade. No grupo azul vai ter um chocolate sobrando e no grupo amarelo vai ter dois (a serem divididos de novo), porque o grupo amarelo tem duas vezes mais crianças que o grupo azul".

Achados semelhantes para o significado de metade no raciocínio das crianças, com e sem quantificação exaustiva, foram relatados por Ball (1993), Kieren (1994) e Lamon (1993).

Resumindo: os estudos relatados nessas primeiras duas seções indicam que crianças de 6 e 7 anos começam a desenvolver uma compreensão das relações inversas entre o quociente e o divisor em situações de divisão. Elas podem fazer julgamentos usando estas relações quando o dividendo consiste tanto em materiais descontínuos como contínuos, assim mostrando um conhecimento emergente de relações entre frações de unidade. Elas podem também resolver problemas de divisão quantitativa simples sobre quantidades descontínuas manipulando materiais concretos através de formas que requerem antecipação ou estruturação da situação, e vão além do simples efetuar de rotinas que podem ter sido observadas na vida cotidiana. Finalmente, estes estudos indicam uma via que permite as primeiras tentativas de quantificar cortes com quantidades contínuas: a divisão do todo em duas partes. Quando as partes são iguais, elas podem pensar em termos de igualdade; quando elas são diferentes, elas podem usar sua compreensão de relações "maior/menor do que" para resolver problemas parte-parte. Nos problemas parte-todo, não apenas as crianças são muito mais bem-sucedidas em resolver problemas quando elas podem confiar na noção de metade, mas elas também usam a metade para simplificar problemas dentro da metade e obter uma solução correta através da quantificação exaustiva do que permanece após a metade já ter sido distribuída.

Nos estudos relatados até o momento, estivemos preocupados apenas com quantidades extensivas – com conjuntos (ou seja, números inteiros) e com o aspecto extensivo das frações – ou, como Kieren (1994) explica, a "magnitude" dos números racionais. Porém, como Piaget e cols. (1960) apontaram há muito tempo atrás, entender números racionais depende de coordenar dois tipos de relação: as relações parte a parte, que são extensivas, e as relações parte-todo, que são intensivas. Na seção seguinte nos voltaremos para o aspecto intensivo dos números racionais e investigaremos como os aspectos extensivos e intensivos estão relacionados durante o desenvolvimento das crianças.

2 COORDENANDO ASPECTOS EXTENSIVOS E INTENSIVOS DO NÚMERO RACIONAL: A COMPREENSÃO DAS EQUIVALÊNCIAS EM CORTES SUCESSIVOS

Piaget e cols. (1960) começaram as investigações sobre a compreensão das crianças de frações pedindo às crianças para dividir todos em partes iguais – duas, três, quatro, cinco e seis – e então fazer julgamentos sobre a equivalência de: (1) o todo e a soma das partes; ou (2) dois todos idênticos que haviam sido divididos em partes diferentes. Suas hipóteses foram que, para obter uma divisão do todo em partes iguais (o aspecto extensivo das frações), as crianças precisam antecipar qual será a relação entre as partes e o todo (o aspecto intensivo das frações) e que esta antecipação é intrinsecamente conectada à conservação do todo independente das divisões que ele teve que passar. Estas tarefas foram executadas no contexto de dar partes iguais de uma torta de chocolate de faz-de-conta para bonecas e comparar a soma das partes a um todo idêntico não dividido. Nos estudos piagetianos, portanto, a idéia de distribuição e de quanto é recebido por cada boneca representa o aspecto extensivo do número racional, e a reconstrução do todo ou unidade em relação às partes representa os aspectos intensivos.

Seus achados podem ser resumidos brevemente. Primeiro, eles observaram que as crianças novas, de aproximadamente 4 e 5 anos de idade, falharam em suas tentativas de dividir igualmente um todo em um número pré-especificado de partes. Elas pegaram duas peças, por exemplo, quando solicitadas a dividir o todo em duas partes iguais, e ignoraram o restante, ou apenas atingiram a divisão através de aproximações sucessivas. Piaget e cols. atribuem esta falha à falta de antecipação das crianças da relação entre as partes e o todo. Em segundo, as crianças novas não mostram conservação de todo. Quando indagadas se havia mais para comer na torta que não fora cortada, ou na que fora cortada ou se havia a mesma quantidade para comer em ambas, as crianças negavam a equivalência dos todos. Foi apenas quando elas atingiram a conservação do todo, aproximadamente aos 6 ou 7 anos, que elas também se tornaram capazes de antecipar o relação entre as partes e o todo e realizar sua divisão em um número pré-determinado de partes que eram aproximadamente iguais. Estes achados levaram Piaget e colegas a concluir que a compreensão das frações está intimamente conectada à compreensão da conservação do todo.

O trabalho de Piaget lidou apenas com quantidades contínuas. Mauricio Lima (1982), trabalhando com crianças brasileiras, reproduziu e expandiu as investigações de Piaget fazendo as crianças trabalharem tanto em quantidades descontínuas como em contínuas, e fazendo-lhes perguntas de equivalência nas quais o próprio pesquisador fez o corte dos conjuntos ou áreas para assegurar que uma divisão acurada fora efetuada. Lima tinha três metas em seu estudo: (1) investigar a habilidade das crianças de comparar partes do mesmo todo (aspecto extensivo) sem apoio perceptual, com base apenas no processo de divisão (aspecto intensivo); (2) investigar a compreensão das crianças de equivalência quando as partes eram diferentes em tamanho e número (por exemplo, 1/2 e 2/4); e (3) contrastar o desempenho das crianças na divisão de conjuntos com seu desempenho em tarefas sobre frações de quantidades contínuas.

A divisão de quantidades descontínuas envolveu uma série de comparações, começando com dois conjuntos de bolinhas de gude com o mesmo número de elementos que foram colocadas em pequenas xícaras brancas pelas crianças. As crianças sabiam o número de elementos nas xícaras no começo; elas não podiam ver as bolinhas de gude após elas terem sido colocadas nas xícaras, mas tiveram permissão de olhar dentro, se desejassem. Depois das crianças verificarem que o número de elementos era o mesmo nas duas xícaras, um conjunto foi dividido em dois, com as bolinhas sendo colocadas em duas xícaras azuis. As crianças foram então solicitadas a comparar as bolinhas em ambas as xícaras azuis com as da xícara branca que continha o conjunto não dividido. Na tarefa seguinte, o conjunto não dividido foi agora dividido em duas xícaras e então estes conjuntos foram divididos novamente em dois, cada uma das quartas partes sendo colocada em uma xícara vermelha. Finalmente, as crianças foram solicitadas a comparar os subconjuntos contidos em uma xícara azul e uma vermelha, e então em uma xícara azul e duas vermelhas. Depois das perguntas de comparação, as crianças eram solicitadas a justificar suas respostas e também indagadas sobre quantas xícaras de cada uma das cores eram necessárias para formar uma coleção inteira.

Um conjunto semelhante de tarefas foi colocado no contexto de quantidades contínuas. Havia dois todos iniciais idênticos, que foram subseqüentemente divididos de acordo com o esquema apresentado na figura 8.6. Em contraste com as quantidades descontínuas, as quantidades contínuas foram sempre visualmente apresentadas às crianças, mas isso não tornou a situação mais fácil, pois as partes, embora representando o resultado do mesmo processo de divisão, eram perceptualmente distintas. As perguntas foram colocadas para as crianças paralelamente à divisão dos conteúdos, de modo que quaisquer diferenças em desempenho poderiam ser atribuídas à diferença entre quantidades descontínuas e contínuas.

Lima apresentou às crianças também 2-cortes dos conjuntos/todos originais e uma outra série de situações nas quais divisões em 2 e em 3 eram as divisões originais; a divisão em 3 foi seguida por uma divisão em 2 de modo que as comparações entre 1/2 e 1/3 e então entre 1/2 e 3/6 fossem efetuadas (outras divisões foram também usadas; para uma descrição completa, ver Lima, 1982).

Lima trabalhou com crianças brasileiras na faixa etária aproximada de 7 a 13 anos. O uso da linguagem fracional é introduzido nas 3ªs ou 4ªs séries na escola (idades de 10 a 11); a equivalência de frações é ensinada nas 5ªs ou 6ªs séries (idades de 12 a 13). Os resultados em termos de níveis de idade, portanto, não serão comparáveis aos obtidos em Genebra por Piaget e colaboradores; o foco de interesse será nos processos que levam à compreensão de equivalências.

Com relação a comparações envolvendo as mesmas frações do todo, Lima observou o seguinte:

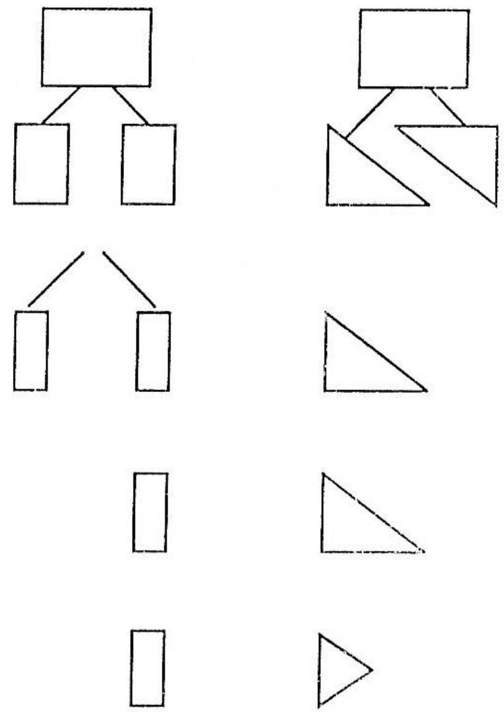

FIGURA 8.6. O material utilizado para estudar divisão de quantidades contínuas. FONTE: Lima (1982).

1. Crianças mais novas (7/8 anos) foram facilmente "desencaminhadas" pela aparência das partes das quantidades contínuas e negaram a equivalência de metades com aparência diferente do mesmo todo;
2. Estas crianças não mostraram conservação do todo quando ele foi dividido em partes diferentes e negaram que duas metades e quatro quartos formariam o mesmo todo.

Crianças ligeiramente mais velhas já tiveram sucesso em julgar a equivalência de duas metades que pareciam diferentes e de duas metades divididas em um número diferente de partes. Elas justificaram seus julgamentos da igualdade das duas metades de aparência diferente através de referência ao todo (por exemplo, Germana disse: "Você corta os dois em dois e você não tira nada").

Com relação à equivalência de frações diferentes do todo, os resultados foram os seguintes:

1. As crianças mais novas ficaram impressionadas pelo número de partes ou pelo número de xícaras (com quantidades descontínuas) e negaram as equivalências;
2. Crianças ligeiramente mais velhas (8/9 anos) foram capazes de superar estas dificuldades nas tarefas de equivalência mais simples (1/2 e 2/4), nas quais os cortes originais eram de 2 e um de 4 (um corte de 4 foi facilmente convertido em dois cortes por 2 crianças); elas justificaram claramente suas respostas relacionando as partes ao todo original, mas tiveram dificuldade quando as cortes originais não estavam relacionadas às outras (ou seja, quando os cortes originais foram cortes de 2 e 3, respectivamente);
3. As crianças mais velhas no estudo (11/12 anos) foram capazes de lidar com equivalências complexas nas quais os cortes originais não foram multiplicativamente relacionados; elas justificaram suas respostas em termos das relações entre as partes e os todos e foram sistematicamente incorretas em indicar quantas partes eram necessárias para formar o todo.

Desse modo, os resultados de Lima confirmaram e estenderam o trabalho piagetiano, mostrando que a equivalência de partes perceptualmente dissemelhantes e de frações diferentes – o aspecto extensivo das frações – foi entendida pelas crianças em conexão com sua análise das relações parte-todo – o aspecto intensivo.

Finalmente, Lima também verificou que a divisão de quantidades descontínuas foi entendida antes da divisão de todos contínuos. Estes resultados poderiam refletir uma diferença genuína entre conteúdos, mas também ser um artifício do método de Lima. O problema metodológico foi o seguinte: quando as crianças trabalharam com conjuntos, o uso de cores para codificar em quantas partes o todo havia sido dividido poderia ter ajudado as crianças a reconstruir as relações parte-todo. No entanto, esta interpretação parece improvável, porque Lima indicou que as crianças mais novas que não tiveram sucesso não prestaram atenção à cor das xícaras. Apenas as crianças que estavam buscando entender as relações parte-todo foram capazes de usar a cor das xícaras para relacionar o subconjunto ao todo, pois para estas crianças a cor das xícaras foi significativa, enquanto que para crianças mais novas não fazia sentido.

A diferença genuína entre quantidades descontínuas e contínuas que esperávamos que exercesse um efeito sobre o desempenho nestas tarefas é a seguinte: as crianças no estudo já estavam bastante familiarizadas com números e podiam usar números para apoiar suas conclusões sobre as comparações parte-parte e parte-todo, especialmente porque o número dos elementos nos conjuntos originais era pequeno (12, 24, 32 e 40 em situações diferentes). Os exemplos de Lima das justificativas oferecidas pelas crianças nas tarefas de quantidades descontínuas freqüentemente incluem referências a números. Por exemplo, Jadilson (7 anos) compara corretamente metade-a-metade respondendo que eles são o mesmo porque cada xícara tem 6 bolinhas de gude; uma das meias-xícaras é então divida em dois quartos e Jadilson compara corretamente 1/2 e 2/4; quando solicitado a justificar sua resposta, ele indica "Eu tenho 6 e você tem 6". Ele persiste em seu julgamento de igualdade mesmo após o entrevistador fazer uma contra-sugestão por referência ao número de xícaras. Assim, o uso do número de bolinhas de gude em quantidades descontínuas permite a solução neste caso de equivalência simples, enquanto no contexto de quantidades contínuas nenhum suporte semelhante está disponível.

Resumindo, os resultados que revisamos até o momento são bastante consistentes em termos da via desenvolvimental que eles indicam para a compreensão de números racionais. Os números racionais parecem ser entendidos como o resultado de divisões sucessivas compostas de quantidades contínuas. A compreensão das crianças de relações nos números racionais – como a relação inversa entre o número de partes e seu tamanho – parece ser desenvolvida em paralelo com sua compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente na divisão de números inteiros (embora estudos com comparações diretas ainda estejam faltando). Estas são conquistas um tanto precoces e parecem emergir aproximadamente aos 6 ou 7 anos.

Uma outra relação lógica compreendida por crianças novas parece ser usada aproximadamente ao mesmo tempo no início da quantificação dos números racionais: as relações parte-parte, expressadas por "igual a" e "maior do que". Estabelecendo comparações parte-parte as crianças podem construir uma compreensão inicial de metade com base nestas relações. A noção de metade parece oferecer a oportunidade para o desenvolvimento de uma conexão inicial entre os aspectos extensivos e intensivos que caracterizam os números racionais.

Desenvolvimentos subseqüentes consistem em um fortalecimento progressivo desta coordenação entre aspectos extensivos e intensivos, que permite que crianças mais velhas definam frações em termos das divisões do todo através das quais eles são produzidos e reconheçam equivalências complexas.

Pintamos um quadro um tanto otimista da compreensão dos alunos de números racionais à luz das pesquisas revisadas nas duas seções anteriores. No entanto, isso contrasta fortemente com o que escrevemos no início deste capítulo, quando apontamos fragilidades no conhecimento de equivalência e uso de linguagem fracional de crianças de 12 anos. Um quadro bastante negativo também foi pintado, por exemplo, por Hart (1986), com relação à equivalência de frações, e por Kerslake (1986), com relação à ordenação das frações. Hart descreveu como os alunos apenas podiam produzir seus próprios diagramas para estudar a equivalência de frações se eles já tivessem entendido que as frações eram equivalentes antes de produzir o diagrama. Kerslake apontou dificuldades das crianças de 12/14 anos em ordenar frações e indicar sua posição em uma linha numérica: na tarefa posterior, apenas um dos 15 alunos entrevistados soube posicionar corretamente 2/3, e três de 15 souberam posicionar corretamente 1/2 em uma linha de número.

Como podem estas duas séries de achados contraditórios ser reconciliadas? Na seção seguinte, discutiremos o papel dos sistemas de sinais na atividade de resolução de problemas das crianças com números racionais. Acreditamos que estas contradições envolvam a desconexão entre a compreensão das crianças e sua aprendizagem de frações na escola.

3 CONECTANDO NÚMEROS RACIONAIS COM SUA REPRESENTAÇÃO: CONHECIMENTO DE NÚMEROS RACIONAIS DESENVOLVIDO DENTRO E FORA DA ESCOLA

Há claramente uma lacuna entre a compreensão das crianças de propriedades básicas de números racionais nos estudos descritos anteriormente e o sucesso das crianças em tarefas com números racionais resolvidas no contexto de avaliações educacionais. Uma explicação possível para esta lacuna seria a amostragem: talvez estudos como os descritos tenham sido realizados com amostras selecionadas que não cobrem toda a gama de níveis de entendimento matemático dos alunos nas faixas etárias descritas. Consideramos esta explicação pouco plausível, porque os estudos revisados incluíram amostras de escolas estaduais em Oxford, na Grécia e no nordeste do Brasil (uma região bastante pobre do país).

Uma segunda explicação é que, quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais, elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com números, como usar o que lhes foi ensinado na escola; concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema. Portanto, é possível que os mesmos alunos que se engajam em tarefas de raciocínio semelhantes às descritas anteriormente, nos quais eles podem focalizar bem a situação-problema, desempenhem bastante diferentemente de quando eles estão resolvendo problemas em avaliações educacionais escritas: seu desempenho mostra uma lacuna entre o que eles entendem e o que eles podem fazer com os símbolos depois destes terem sido aprendidos de uma forma particular.

Esta segunda hipótese é apoiada em um estudo por Nancy Mack (1993) com estudantes de sexta série nos Estados Unidos. Sua técnica consistiu em apresentar para as crianças os mesmos problemas alternadamente como situações que elas poderiam encontrar na vida cotidiana e como problemas simbólicos ou vice-versa. Por exemplo, uma pergunta como, "suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em 6 pedaços de tamanho igual, e você corta a outra em 8 pedaços de tamanho igual. Se você recebe um pedaço de cada pizza, de qual você ganha mais?" foi seguida pela pergunta "diga-me que fração é maior, 1/6 ou 1/8?" Mack observou que, embora os problemas da vida cotidiana não parecessem causar dificuldades, os estudantes não puderam resolver muitos dos problemas apresentados simbolicamente e justificaram suas respostas através de algoritmos falhos ou comparações inadequadas. Por exemplo, no problema acima, todos menos um estudante disseram que 1/8 era maior porque oito é um número maior.

Mas como esta curiosa lacuna é produzida entre a compreensão das crianças de números racionais e seu desempenho em tarefas simbólicas? Uma possibilidade é que as tarefas simbólicas de algum modo requerem um tipo diferente de conhecimento mais abstrato do que o tipo dominado pelos alunos. Mas uma hipótese alternativa, que consideramos mais plausível, é que esta lacuna seja uma conseqüência da

aprendizagem do aluno de linguagem fraccional na escola simplesmente através do procedimento de dupla contagem que descrevemos anteriormente. A desconexão entre a compreensão dos alunos da divisão de quantidades contínuas e descontínuas desenvolvida fora da escola e sua aprendizagem de frações poderia ocorrer exatamente porque os alunos não pensam sobre frações como tendo qualquer relação com divisão e apenas relacionam frações à linguagem parte-todo. Evidências apoiando esta idéia foram encontradas por Kerslake (1986), que resumiu seus achados na avaliação do desempenho dos alunos em tarefas de fração de modo que (1986, p.[illegible]1):

> Houve consideráveis evidências para sugerir que o único modelo de fração com o qual as crianças se sentiram confortáveis foi o de fração como parte de um todo. Em particular, eles consideraram difícil até mesmo entender esta visão para indicar o aspecto de divisão ou distribuição, ou seja, por exemplo, que a fração a/b pode ser interpretada como coisas "a" distribuídas entre pessoas "b". Embora este aspecto apareça em livros-texto ou em cursos baseados em cartões de trabalho e seja a base para o método comumente usado para transformar frações em decimais, os alunos foram muito relutantes em reconhecer quaisquer conexões entre a/b e a dividido por b.

Evidências adicionais apoiando esta hipótese são fornecidas por Mack (1993). Se a desconexão entre a compreensão das crianças da divisão e fração desenvolvida fora da escola e as representações simbólicas aprendidas na escola é devido à forma na qual a aprendizagem na escola foi implementada, deveria ser possível cobrir esta lacuna: movendo-se para trás e para frente entre seu conhecimento desenvolvido fora da escola e as representações simbólicas, os alunos deveriam vir a compreender quais conexões têm de ser feitas. Isso é exatamente o que Mack relata (1993, p.96):

> Eu verifiquei que me movendo para frente e para trás entre problemas representados simbolicamente e problemas semelhantes apresentados em contextos familiares, os estudantes começaram a relacionar símbolos e procedimentos de frações ao seu conhecimento informal. Às vezes os estudantes precisavam que nos movêssemos para trás e para frente entre os problemas apresentados em diferentes contextos várias vezes antes que eles reconhecessem as conexões, enquanto outras vezes as conexões eram prontamente reconhecidas. Após um período relativamente breve de instrução deste modo, os estudantes estavam utilizando seu conhecimento informal por iniciativa própria para resolver problemas mais complexos, mas intimamente relacionados.

Os resultados de Mack são significativos – mas a lacuna não poderia ser evitada antes? E como deveria a instrução proceder de modo que a aprendizagem dos alunos de representações simbólicas de números racionais fosse conectada desde o início a sua compreensão das situações?

Há diversas vozes correntes na comunidade de educação matemática que sugerem que precisamos evitar esta lacuna escolhendo as situações certas de instrução. Streefland (1990b; no prelo) e Gravemeijer (no prelo) sugeriram que a chave para o desenvolvimento de representações simbólicas em conexão íntima com a compreensão das crianças de situações de divisão e frações é trabalhar claramente com situações que envolvam *duas variáveis* e ofereçam às crianças os meios para representar ambas. Em vez de simplesmente retratar uma pizza que é cortada em pedaços e então ensinar aos alunos a linguagem fracional, é necessário colocar problemas no que tange a duas variáveis que devem ser representadas.

Gravemeijer (1990; no prelo) oferece alguns exemplos de como isso pode ser realizado na divisão de quantidades descontínuas em subconjuntos. Em um de seus problemas as crianças tinham que descobrir quantas mesas seriam necessárias para que todos os pais pudessem sentar em um encontro; 86 pais eram esperados e 6 pais poderiam ser sentados ao redor de cada mesa. Os alunos que resolveram este problema estavam claramente acostumados a trabalhar com diagramas para retratar a situação; eles representaram ambas as tabelas (por exemplo, com retângulos pequenos) e os pais para resolver o problema.

Streefland (1990a e b; no prelo) oferece um exemplo no contexto da divisão de quantidades contínuas: 4 crianças têm que distribuir 3 barras de chocolate; quanto cada criança obterá? As crianças e as barras de chocolate são esquematicamente apresentadas (como no estudo de Desli [1994] descrito na seção 1 deste capítulo, mas através de desenhos em vez de figuras recortadas). Diferentes soluções são relatadas para o problema 3 dividido por 4 – ou seja, 3/4. Um aluno poderia dividir cada barra de chocolate em 4 pedaços e dar 3 destes pedaços para cada criança (ou seja, cada criança recebe 1/4 + 1/4 + 1/4). Um outro aluno poderia dividir duas barras de chocolate na metade e dar uma metade para cada criança e então dividir a terceira barra em quartos, dando um quarto para cada criança (ou seja, cada criança recebe 1/2 + 1/4). Strefland sugere que, quando as crianças são encorajadas a discutir e comparar suas soluções, elas vêm a reconhecer a equivalência dos seus procedimentos e a conectar sua compreensão com as representações de linguagem fracional introduzida pelo professor.

Streefland sugere ainda que cortes sucessivos podem ser usados para ajudar os alunos a coordenar o aspecto extensivo e intensivo dos números racionais. Por exemplo, o problema seguinte é sugerido: 24 crianças vão a uma pizzaria juntas para uma festa e pedem 18 pizzas; no entanto, elas não podem sentar todas ao redor da mesma mesa; como as crianças e as pizzas deveriam ser rearranjadas para que a distribuição das pizzas seja justa? Os alunos podem tentar arranjos diferentes: se eles usassem 2 mesas, haveria 12 crianças e 9 pizzas em cada; se eles usassem 3 mesas, haveria 8 crianças e 6 pizzas em cada; se eles usassem 4 mesas, com 6 crianças em cada, eles precisariam cortar algumas das pizzas pela metade e ter 4 1/2 pizzas em cada mesa. Quando os alunos tentam descobrir que porção cada criança obterá, eles têm problemas interessantes adicionais para conferir se haviam de fato feito uma distribuição justa.

Estas são sugestões claramente importantes e parecem dignas de ser buscadas, considerando-se a pesquisa que revisamos. No entanto, há ainda uma necessidade de pesquisa mais sistemática antes que seja possível atingir conclusões empiricamente

sustentáveis sobre o significado de transformações diferentes que podem ser feitas nos processos instrucionais. Por exemplo, precisamos descobrir quão importante são os sistemas de representação oferecidos às crianças durante a resolução de problemas em divisão e situações de números racionais, em termos de seus efeitos sobre o desempenho dos alunos.

Gravemeijer (1990) sugeriu que, se são oferecidos aos alunos materiais concretos para resolver problemas de divisão, pode ser crucial considerar quais materiais são oferecidos e qual seu uso em resolução de problemas. Os problemas de divisão envolvem duas variáveis e uma relação entre elas. Se é oferecido às crianças apenas um tipo de material concreto – por exemplo, blocos Dienes – as ligações entre os materiais e os resultados poderia ser causadora de confusão para as crianças. Em um problema de divisão medida por quota, por exemplo, no qual as crianças são indagadas "Quantos engradados são necessários para acondicionar 89 garrafas se cada engradado pode conter 16 garrafas?", as crianças podem contar 89 blocos, cada bloco representando uma garrafa. Elas então farão grupos de 16 e descobrirão que podem fazer 5 grupos. Cada grupo de blocos agora representa um engradado, e os restantes 8 blocos representam 8 garrafas. Ele sugere que isso poderia confundir as crianças: se desejamos apoiar o raciocínio das crianças, um problema de duas variáveis deve ser resolvido com o apoio de materiais que permitam que as crianças mantenham ambas as variáveis em mente.

Algumas evidências para apoiar esta alegação foram encontradas por Marilyn Zweng (1964), trabalhando com crianças de segunda série na Califórnia. Ela deu às crianças tanto problemas partitivos como de divisão medida por quotas (aos quais ela se refere como "medida"). Para alguns problemas as crianças apenas tinham um conjunto de objetos para representar a variável sobre a qual cálculos eram necessários; para um segundo conjunto de problemas, elas tiveram dois conjuntos de objetos, de modo que elas poderiam representar ambas variáveis ao resolver os problemas. No caso dos dois conjuntos, cada conjunto poderia ser aleatoriamente espalhado sobre a mesa (arranjos aleatórios) ou eram padronizados, organizados em filas com correspondências aproximadas entre conjuntos. Por exemplo, um problema poderia envolver dividir um conjunto de 15 lápis em grupos de três e cada grupo de três deveria ser colocado em uma caixa. Para uma representação de uma variável, Zweng apenas deu às crianças alguns lápis para usar ao trabalhar a resposta. Para uma representação de duas variáveis, as crianças tinham tanto lápis como caixas. No arranjo aleatório, ambos os conjuntos eram apenas espalhados sobre a mesa; para o arranjo padronizado, os lápis eram colocados em uma fila e as caixas em outra fila paralela. Zweng observou uma associação importante entre o sucesso na tarefa e o tipo de material disponível para as crianças durante a resolução de problemas: os problemas para os quais as crianças tinham dois conjuntos de materiais foram resolvidos por uma porcentagem significativamente mais alta de crianças. No entanto, isso foi apenas verdade para os problemas partitivos. A diferença entre os arranjos aleatórios e padronizados não afetou o desempenho das crianças: elas foram igualmente bem-sucedidos tanto com arranjos aleatórios como padronizados. No entanto, deve ser observado que os números usados nas situações-problema foram bastante pequenos.

Embora isso seja um resultado importante, pesquisa adicional é necessária para a investigação das conseqüências de usar representações de uma ou duas variáveis para o sucesso das crianças em resolução de problemas sobre divisão e situação de números racionais.

4 CONCLUSÕES

Carpenter e cols. (1993) sugeriram que há (pelo menos) dois elementos unificadores que garantem coerência para a grande variedade de usos do número racional: eles são as noções de unidade e partição. As pesquisas revisadas neste capítulo reforçam sua conclusão de uma forma nova. Sugerimos que estes dois elementos não são independentes no desenvolvimento da compreensão das crianças: eles envolvem os aspectos extensivos e intensivos dos números racionais. Enquanto o raciocínio relacionado à partição permite que as crianças abordem a "magnitude" do número racional, – ou seja, o aspecto extensivo –, a compreensão da equivalência de cortes diferentes pode apenas ser obtida em relação ao todo ou a uma unidade – ou seja, considerando os aspectos intensivos.

Neste capítulo, vimos como crianças bastante novas já podem lidar com êxito com alguns aspectos extensivos da partição: crianças de 6/7 anos entendem o efeito do tamanho de *n* em um *n*-corte. Elas podem ter êxito em problemas que envolvam quantidades descontínuas ou contínuas.

Também vimos que as primeiras quantificações que elas resolvem neste domínio parecem emergir de tarefas nas quais a noção de metade pode ser usada. A metade desempenha um papel central no processo de quantificação porque oferece às crianças a oportunidade de usar relações lógicas que elas já entendem em comparação parte-parte ("igual a" ou "maior do que") no novo domínio de parte-todo: elas podem facilmente distinguir entre metade, mais da metade e menos da metade. Porém, as crianças novas podem também ser confundidas em suas comparações extensivas por aspectos perceptuais: se confrontadas com duas metades de aparência diferente, elas poderiam não realizar sua equivalência. É apenas voltando ao todo através da reconstrução do processo de cortes que elas entenderão a equivalência destas metades de aparência diferente.

Finalmente, a discrepância entre a compreensão das crianças de divisão e números racionais fora da escola e seu conhecimento de representações ensinadas na escola foi considerado. No presente, uma explicação plausível para esta lacuna é que ela poderia originar-se do modo como a linguagem fracional é introduzida: como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo. Quando os alunos são levados a resolver problemas usando seu conhecimento cotidiano e representações simbólicas, eles podem fazer as conexões adequadas espontaneamente ao longo de um período de tempo de instrução relativamente breve, e podem usar seu conhecimento cotidiano para resolver problemas mais complexos. As abordagens atuais quanto ao estabelecimento de uma conexão entre conhecimento cotidiano e o conhecimento escolar da exploração de frações indicam um ponto de

partida diferente para a instrução: em vez de aprender linguagem fracional em conexão com representações estáticas parte-todo, os alunos deveriam ser engajados na resolução de problemas de divisão com quantidades contínuas, nas quais ambas as variáveis são explicitamente representadas, a quantidade a ser distribuída e o número de receptores. Se a representação fracional é introduzida desta forma, espera-se que as crianças venham a perceber a conexão entre seu conhecimento de fora da escola e os símbolos que elas aprendem na escola. Esta parece uma via bastante promissora, mas que precisa ser verificada através de pesquisa adicional no futuro.