PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019
Lista de exercícios 02
GABARITO

1. Uma variável aleatória X possui função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = c(1 - x^2), \quad |x| \leq 1.$$

   (a) Determine o valor de c;
   $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = c(2 - 2/3) = 4c/3 = 1 \Leftrightarrow c = 3/4.$

   (b) Determine a função distribuição de probabilidade de X;
   $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-u^2)du = \frac{3x}{4}(1-x^2)$, para $|x| \leq 1$

   (c) Determine $P(|X - 0,5| < 0,25)$.
   $P(|X - 0,5| < 0,25) = P(-0,25 < X - 0,5 < 0,25) = P(0,25 < X < 0,75) = F_X(0,75) - F_X(0,25)$; Como $F_X(0,75) = 0,2461$ e $F_X(0,25) = 0,1758$: $P(|X - 0,5| < 0,25) = 0,0703$.

2. As amplitudes de dois sinais X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = e^{-x/2} y e^{-y^2}, \quad x > 0, y > 0.$$

   (a) Determine a função distribuição de probabilidade conjunta;
   $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv = \int_0^x \int_0^y e^{-u/2} v e^{-v^2} dudv =$
   $= \int_0^y \left[\int_0^x e^{-u/2}du\right] v e^{-v^2} dv = \int_0^y \left(2 - 2e^{-x/2}\right) v e^{-v^2} dv =$
   $= \left(2 - 2e^{-x/2}\right) \int_0^y v e^{-v^2} dv = 2\left(1 - e^{-x/2}\right)(1/2)(1 - e^{-y^2}) =$
   $= \left(1 - e^{-x/2}\right)(1 - e^{-y^2}).$

   (b) Determine $P(X^{1/2} > Y)$;
   $P(X^{1/2} > Y) = \iint_{\sqrt{x}>y} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\sqrt{x}} e^{-x/2} y e^{-y^2} dxdy =$
   $= \int_0^\infty \left[\int_0^{\sqrt{x}} y e^{-y^2} dy\right] e^{-x/2} dx = \int_0^\infty (1 - e^{-x}) e^{-x/2} dx =$
   $= \int_0^\infty (e^{-x/2} - e^{-3x/2})dx = 2/3.$

   (c) Determine as funções densidades de probabilidade marginais;
   $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = 1 - e^{-x/2} \Leftrightarrow f_X(x) = dF_X(x)/dx = e^{-x/2}/2;$
   $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = 1 - e^{-y^2} \Leftrightarrow f_Y(y) = dF_Y(y)/dy = 2ye^{-y^2}.$

(d) X e Y são independentes?

$F_X(x)F_Y(y) = (1 - e^{-x/2})(1 - e^{-y^2}) = F_{XY}(x, y)$. Portanto, X e Y são independentes.

3. O vetor aleatório (X, Y) é distribuído uniformemente – i.é. $f_{XY}(x, y)$ é constante – dentro do círculo de raio unitário.

(a) Determine $f_{XY}(x, y)$;

$f_{XY}(x, y) = k$, para $x^2 + y^2 \leq 1$. Para determinar k, fazemos:

$\iint_{x^2+y^2\leq 1} kdxdy = 2\pi k = 1 \Leftrightarrow k = 1/\pi$.

(b) Determine as funções densidades de probabilidade marginais;

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}$.

Por simetria: $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}$.

(c) Determine $P(X > 0, Y > 0)$;

$P(X > 0, Y > 0) = 1/4$, pois estes valores correspondem a $1/4$ de todos os valores possíveis de X e Y, e a distribuição é uniforme.

(d) Determine $f_{Y|X}(y|x)$.

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

4. Uma urna contém uma bola preta e duas bolas brancas. Três bolas são retiradas da urna. Seja $I_k = 1$ se o resultado da k-ésima retirada for a bola preta, e $I_k = 0$ caso contrário. Defina as três variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} X &= I_1 + I_2 + I_3 \\ Y &= \min\{I_1, I_2, I_3\} \\ Z &= \max\{I_1, I_2, I_3\}. \end{aligned}$$

(a) Determine a faixa de valores do trio de variáveis aleatórias (X, Y, Z) se cada bola é recolocada na urna após cada retirada, e determine as probabilidades para cada conjunto de valores.

Usando a notação $p(x, y, z) = P(X = x; Y = y; Z = z)$, os valores que o trio de V.A.s pode assumir e suas probabilidades é:

x	y	z	$p(x, y, z)$
1	0	1	6/27
2	0	1	12/27
3	1	1	8/27
0	0	0	1/27

(b) X, Y e Z são independentes? X e Y são independentes?

As distribuições marginais de X, Y e Z são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/27	6/27	12/27	8/27

y	0	1
$p(y)$	19/27	8/27

z	0	1
$p(z)$	1/27	26/27

Por exemplo, $P(X = 0; Y = 0; Z = 0) = 1/27$, que é diferente de $P(X = 0)P(Y = 0)P(Z = 0) = 19/(27^3)$. Portanto, as V.A.s não são independentes. X e Y também não são independentes, pois, por exemplo, $P(X = 0; Y = 0) = 1/27$, que é diferente de $P(X = 0)P(Y = 0) = 19/(27^2)$.

(c) Repita os itens (a) e (b) supondo que cada bola não é recolocada na urna após cada retirada.

Se não há reposição das bolas, há apenas um valor possível do trio de V.A.s, ou seja: $P(X = 2; Y = 0; Z = 1) = 1$.