PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019
Lista de exercícios 01
GABARITO

1. Determine as probabilidades dos seguintes eventos em termos de $P(A)$, $P(B)$ e $P(AB)$:

   (a) A ocorre e B não ocorre;
   $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Leftrightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$.

   (b) B ocorre e A não ocorre;
   De forma análoga ao item (a): $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$.

   (c) Ou A ou B ocorre (não os dois simultaneamente);
   $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$.

   (d) Nem A nem B ocorrem.
   $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$.

2. Dois números x e y são escolhidos aleatoriamente do intervalo $[0, 1]$.

   (a) Determine a probabilidade de os dois números estarem dentro do círculo de raio unitário;
   Podemos calcular a probabilidade pedida p através da razão das áreas: $p = A_C/A_T$. A_T é a área do quadrado de lado 1, e corresponde à probabilidade de X e Y valerem qualquer valor possível, e A_C é a área do círculo de raio unitário dentro do primeiro quadrante, e corresponde à probabilidade de X e Y caírem dentro deste círculo. Portanto: $p = A_C/A_T = (\pi/4)/1 = \pi/4$.

   (b) Determine a probabilidade de $y > 2x$.
   Como no item anterior, a probabilidade é dada por uma razão entre áreas: $p = A_C/A_T$. Aqui, A_C é a área entre a reta $y = 2x$ e o eixo vertical. Portanto: $p = A_C/A_T = (1 \times 0,5/2)/1 = 1/4$.

3. Determine $P(A|B)$ nos seguintes casos:

   (a) Se $AB = \emptyset$;
   $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$.

(b) Se $A \subset B$;

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.

(c) Se $B \subset A$.

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

4. Mostre que, se $P(A|B) > P(A)$, então $P(B|A) > P(B)$.

$P(A|B) > P(A) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} > P(A) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} > P(B) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B)$.

5. Mostre que os eventos A e B são independentes se $P(A|B) = P(A|\bar{B})$

$P(A|B) = P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(AB)[1 - P(B)] = P(B)[P(A) - P(AB)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(AB) - P(AB)P(B) = P(A)P(B) - P(B)P(AB) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

Portanto, A e B são independentes.