Eletromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 19

Energia Eletrostática na Presença de Dielétricos

Este tema é discutido na seção 4.4.3 do livro texto de uma forma um pouco confusa. Por isso, recomendamos a leitura complementar do Cap. 6 da outra referência do curso Energia Eletrostática -J. Reitz, F. M. Ijerd, R. Chriody.

A primeira pergunta importante a fazer é o significado de energia de uma distribuição de cargas. No caso de cargas livres é o que vimos antes: a energia da distribuição de cargas é o trabalho necessário para "montar" a distribuição de carga; este trabalho fica armazenado como energia potencial do sistema e sua expressão é dada por

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau$$

Na presença de dielétricos, não estamos compactando a energia gasta para formar os átomos e moléculas do meio, mas sim o trabalho necessário para colocar as cargas livres, com densidade volumétrica ρ_l, no meio. É claro que, ao trazer uma carga do infinito ela, não somente sofrerá repulsão das outras cargas livres que já estão no meio, mas também fará trabalho para polarizar ainda mais cargas ligadas do meio. Mas os efeitos de todas as cargas, livres e dos dipolos de polarização, estarão incluídos no potencial $\phi(\vec{r})$. Então podemos escrever

$$W = \frac{1}{2}\int \rho_l(\vec{r})\phi(\vec{r})d\tau$$

mas

$$\begin{aligned} \phi_l &= \nabla\cdot\vec{D} \\ \therefore W &= \frac{1}{2}\int \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\phi d\tau \end{aligned}$$

Mas

$$\phi\left(\nabla\cdot\vec{D}\right) = \nabla\cdot\left(\phi\vec{D}\right) - \vec{D}\cdot\nabla\phi$$

$$\therefore W = \frac{1}{2}\int \nabla\cdot\left(\phi\vec{D}\right)d\tau - \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\nabla\phi d\tau$$

Usando o Teorema de Gauss e

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

temos

$$W = \frac{1}{2}\int_S \phi\left(\vec{D}\cdot\hat{n}\right)dS + \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$$

Supondo o dielétrico limitado espacialmente, podemos tomar $s \to \infty$, onde $\phi \to 0$ e $\vec{D} \to 0$m de forna que

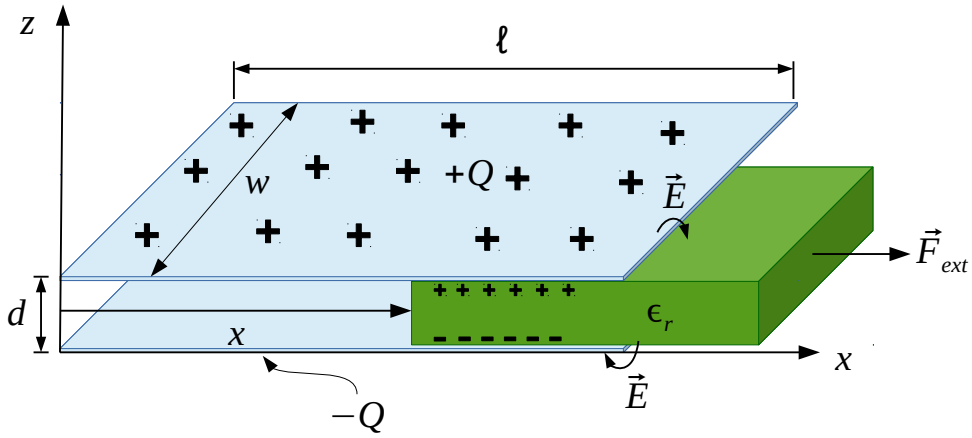
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\tau}$$

Portanto, na presença de dielétricos, a densidade de energia eletrostática é dada por

$$\boxed{\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

Força em um dielétrico (seção 4.4.4 do livro texto)

Vamos agora considerar um problema interessante: a força exercida em um dielétrico inserido entre as placas de um capacitor.



Consideremos uma placa dielétrica de espessura d inserida parcialmente entre as placas do capacitor e suponhamos que em cada placa a carga total Q constante. Naturalmente, as cargas de polarização no dielétrico vão atrair as cargas livres nas placas do capacitor, de forma que a distribuição de cargas nelas não será uniforme, embora a carga total seja $|Q|$, Isto faz com que o campo eletrostático na borda das placas atraia a fatia dielétrica para dentro do capacitor, provando uma força de atração. O interessante é que podemos calcular esta força sem ter que calcular o campo de borda usando simplesmente conceitos de energia e trabalho virtual.

Se o dielétrico for puxado para fora de uma distância dx, o trabalho que a força externa terá que fazer será

$$dW = F_{ext} dx$$

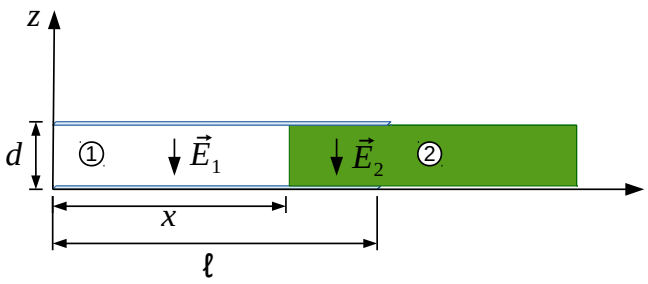
Em condição de equilíbrio, esta força tem que ser equilibrada pela força feita pelas placas para dentro, ou seja,

$$F = -\frac{dW}{dx}$$

onde W é a energia eletrostática entre as placas do capacitor

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$$

Precisamos então calcular $\vec{E}$ e $\vec{D}$ entre as placas. Naturalmente, considerando placas extensas, de modo que $d \ll \ell$, $d \ll w$, podemos desprezar efeitos de borda, de forma que tanto $\vec{E}$ como $\vec{D}$ devem ser na direção z.



Na figura vemos uma seção transversal do capacitor, onde representamos por $\vec{E}_1$ o campo elétrico na região sem dielétrico e por $\vec{E}_2$ na região com dielétrico. Mas como o campo é tangencial à interface entre os dois condutores, temos, pelas condições de contorno que

$$E_1 = E_2 = E \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \epsilon_1 E; \quad D_2 = \epsilon_) \epsilon_r E$$

Assim

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\left[\epsilon_0 E^2 dwx + \epsilon_0\epsilon_r E^2 dw(\ell - x)\right] \\ \therefore W &= \frac{\epsilon_0 dw}{2}\left[x(1-\epsilon_r) + \ell\epsilon_r\right]E^2 \\ \therefore F &= -\frac{\epsilon_0 dw}{2}E^2; \qquad E = \frac{V}{d} \text{ desp. efeitos de borda} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{F = -\frac{\epsilon_0 w}{2d}(\epsilon_r - 1)V^2}$$

Nota: neste problema há uma hipótese importante sobre a qual o livro chama bem a atenção.

Estamos supondo que inicialmente carregamos o condutor, com o dielétrico nele inscrito, até atingir a carga Q, e depois desligamos a bateria para calcular a força com que o capacitor puxa a placa dielétrica para dentro.

Caso bateria seja mantida ligada às placas do capacitor, como ela é uma fonte de energia que realiza trabalho, outro efeito tem que ser levado em conta quando calculamos o trabalho devido ao deslocamento virtual. Este efeito é discutido pelo livro texto na mesma seção.