Vimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

existe se, e somente se, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$, ou seja, o limite de uma função f(x) quando $x \to a$, só existe se os limites laterais existirem e forem iguais (apresentarem o mesmo resultado).

Vimos também que o resultado $\frac{0}{0}$ é um tipo de indeterminação e para resolvê-la precisamos usar as propriedades de fatoração e radiciação para simplificar as expressões e só depois realizar o calculo do Limite da função.

LIMITES NO INFINITO ($x \to \pm\infty$) e LIMITES INFINITOS ($L \to \pm\infty$)

LIMITES NO INFINITO ($x \to \pm\infty$)

Noção Intuitiva: Limites no infinito

Considere a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

O domínio dessa função é: $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$, ou seja, não há nenhuma restrição no domínio da função, pois o denominador nunca será igual a zero.

Então,

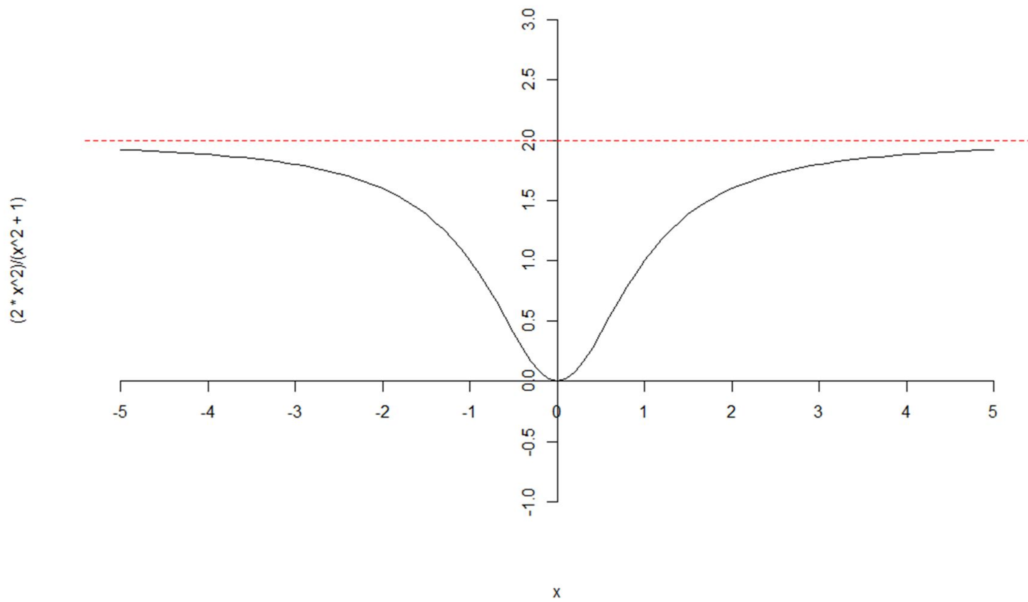
Qual o comportamento da função à medida que a variável x cresce indefinidamente ($\boldsymbol{x} \to +\infty$)

Qual o comportamento da função à medida que a variável x decresce indefinidamente ($\boldsymbol{x} \to -\infty$)

Iremos atribuir alguns valores para variável x e verificar o que acontece com a função.

	$\leftarrow -\infty$								$+\infty \rightarrow$
x	-10.000	...	-10	-1	0	1	10	...	10.000
f(x)	1,999...	...	1,98	1	0	1	1,98	...	1,999...

Um esboço do gráfico da função $f(x)$ é dado por:



Podemos perceber, tanto pela tabela (grade de valores) como pelo gráfico, que à medida que x cresce ilimitadamente ($x \to +\infty$) ou decresce ilimitadamente ($x \to -\infty$), os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais do valor 2. Assim, utilizando a notação de limites, podemos escrever:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

Como usar as propriedades para resolver esse tipo de limite?

Resultados como: $\frac{0}{0}$; $\frac{k}{0}$; $\frac{+\infty}{+\infty}$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{+\infty}$ e $\frac{-\infty}{-\infty}$ são consideradas, no cálculo, como "indeterminações" ou "indefinições" e precisamos de artifícios (e propriedades) para resolvê-las. Vimos, na aula passada, que a indeterminação do tipo 0/0 foi resolvida utilizando as regras de fatoração e radiciação.

Exemplo: Considere o seguinte limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{5x+2} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação!)}$$

Para resolver esse tipo de indeterminação vamos precisar da seguinte propriedade (P4) e de um artifício que será apresentado a seguir.

P4) Para todo número natural n e para $b \in \mathbb{R}^*$, tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{x^n} = 0$$

- Um dos artifícios consiste em identificar na função (expressões do numerador e denominador) a variável x com sua maior potência e dividir todos os termos que aparecem na função por este x^n
- Outro artifício é considerar apenas os termos de maior ordem no numerado e denominador, respectivamente, para calcular o limite.

Exemplos:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \frac{+\infty}{-\infty}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+7}{5x^2-8} = \frac{+\infty}{+\infty}$

OBS: O resultado sempre será zero? NÃO. Vejamos outro exemplo

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Exercícios

1. Calcule os limites das funções que se seguem quando a variável x cresce (e decresce) indefinidamente.

a. $f(x) = \frac{3+5x^3}{x^3}$

b. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^4+5x^3+x+2}$

c. $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$

d. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

e. $f(x) = \frac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}}$

f. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

g. $f(x) = \frac{\sqrt{8x^2+3}}{\sqrt{9x^2-7x}}$

h. $f(x) = \frac{x^5+1}{3x^3-9x}$

LIMITES INFINITOS (quando $L \to +\infty$ ou $L \to -\infty$)

Quando, no cálculo do limite de uma função $f(x)$, o resultado do limite (L) cresce (ou decresce) indefinidamente, damos a ele o nome de “limite infinito”, ou seja, são considerados limites infinitos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Antes de efetuar os cálculos com “limites infinitos” veremos mais algumas propriedades adicionais que iremos utilizar:

P5) Se $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} w(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = k$

Então:

a) $\lim_{x\to a}[h(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} h(x) + \lim_{x\to a} g(x) = +\infty + k = +\infty$

$$\lim_{x\to a}[w(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} w(x) + \lim_{x\to a} g(x) = -\infty + k = -\infty$$

b) Se $k > 0$, então:

$$\lim_{x\to a}[h(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} h(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \times k = +\infty$$

$$\lim_{x\to a}[w(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} w(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = -\infty \times k = -\infty$$

c) Se $k < 0$, então:

$$\lim_{x\to a}[h(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} h(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = +\infty \times (-k) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a}[w(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} w(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = -\infty \times (-k) = +\infty$$

d) $\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{w(x)}\right] = 0$

P6) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = k$

Para $k > 0$

- se a função $f(x) > 0$, então, $\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$
- se a função $f(x) < 0$, então, $\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$

Para $k < 0$

- se a função $f(x) > 0$, então, $\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = -\infty$
- se a função $f(x) < 0$, então, $\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = +\infty$

"AS PROPRIEDADES P5 E P6 CONTINUAM VÁLIDAS PARA OS LIMITES LATERAIS"

EXEMPLOS

1) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{3}{(x-2)^2}\right]$
2) $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}\right]$
3) $\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{4x^2}{9-x^2}\right]$
4) $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{4x^2}{9-x^2}\right]$