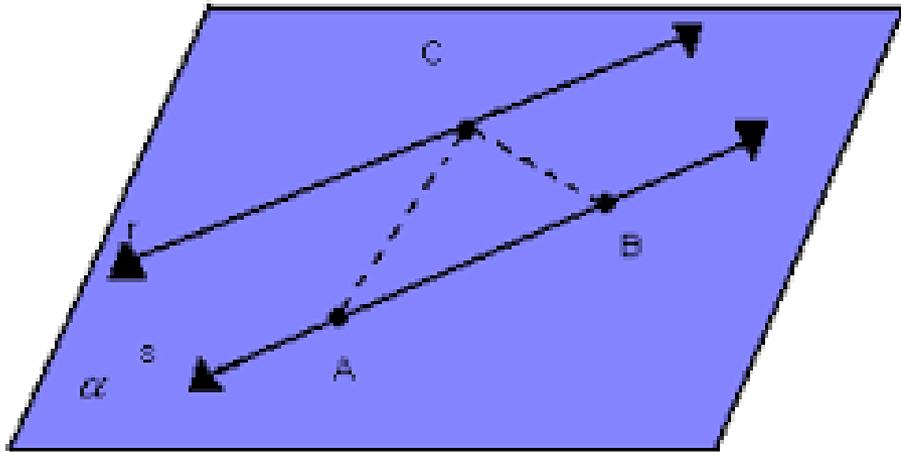
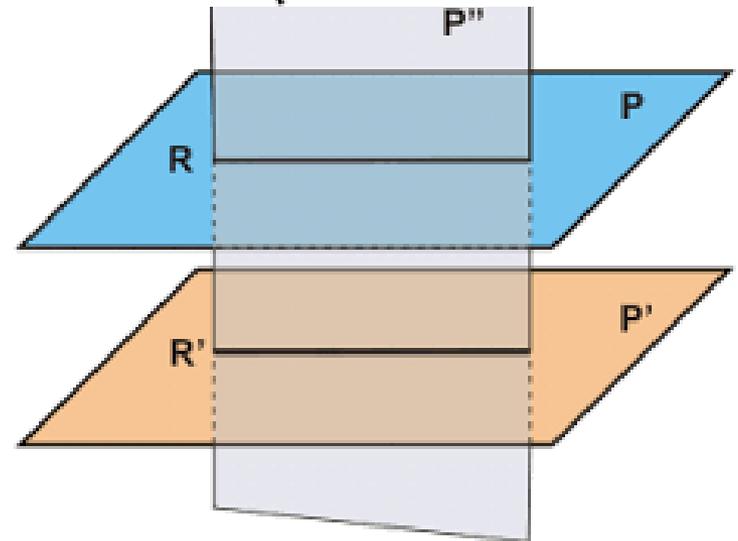
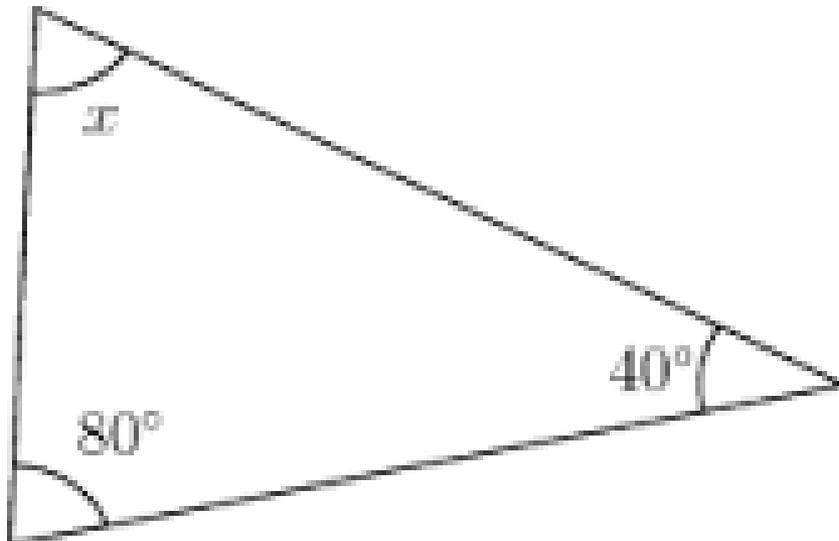
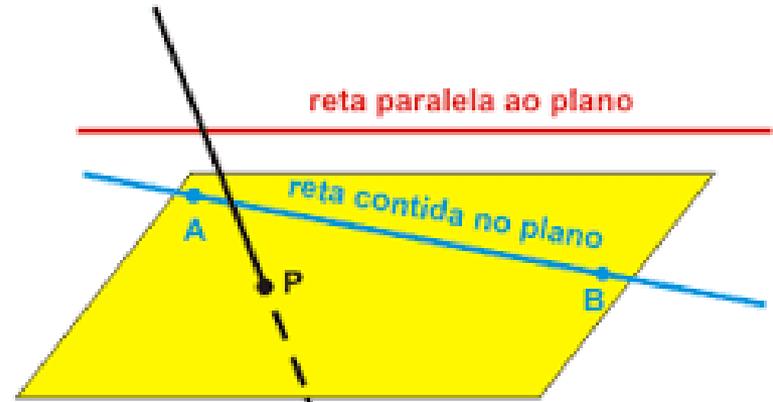


Fractais

A Geometria Eclidiana



reta secante ao plano



Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência da geometria euclídeana são os seguintes:

Axioma I: Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Axioma II: Toda reta possui pelo menos dois pontos.

Axioma III: Existem três pontos que não pertencem a mesma reta.

Axioma IV: (Playfair) Dado um ponto A não incidente a uma reta r , existe no máximo uma reta s que é incidente a A e não intersecta r .

Definição: Duas retas são ditas paralelas se a sua interseção for vazia.

Geometrias não-euclidianas

A geometria não-euclidiana surge pela negação do Axioma IV. Existem duas possibilidades:

Não existem retas paralelas!

⇒ Geometria Projetiva, Geometria Elíptica.

Dado um ponto A não incidente a uma reta r , existem pelo menos duas retas incidentes a A e paralelas a r !

⇒ Geometria Hiperbólica!

Curvatura de Gauss

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\text{área}(\Delta)} = \text{constante} = \begin{cases} < 0, & \text{Hiperbólica;} \\ = 0, & \text{Euclidiana;} \\ > 0, & \text{Esférica.} \end{cases}$$

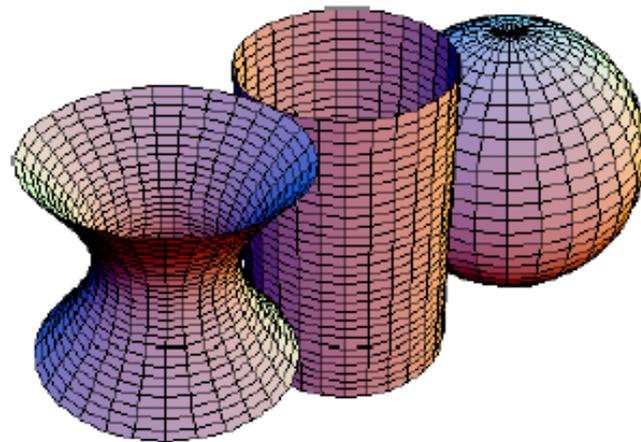


Figure: [Fonte: Wikimedia Commons.]

Geometria Esférica

Superfície de uma esfera = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

"Rectas" = intersecção com planos que passam na origem.

Pontos anti-podais têm **mais do que uma** recta a uni-los.

Não existem rectas paralelas e qualquer semelhança é uma congruência.

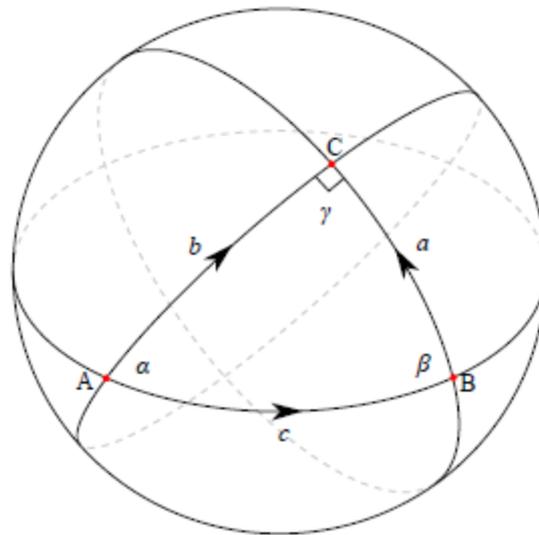


Figure: [Fonte: Wikimedia Commons.]

Geometria Esférica

Teorema: $\text{área}(\Delta) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Em particular,
 $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

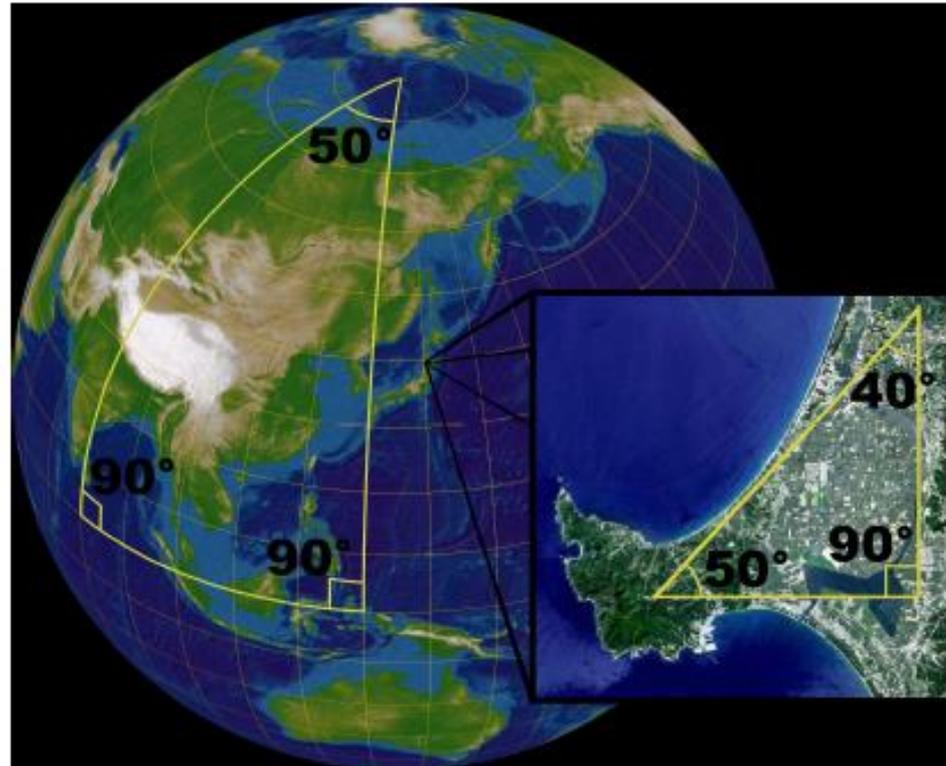


Figure: [Fonte: Wikimedia Commons.]

Geometria Hiperbólica - modelo local

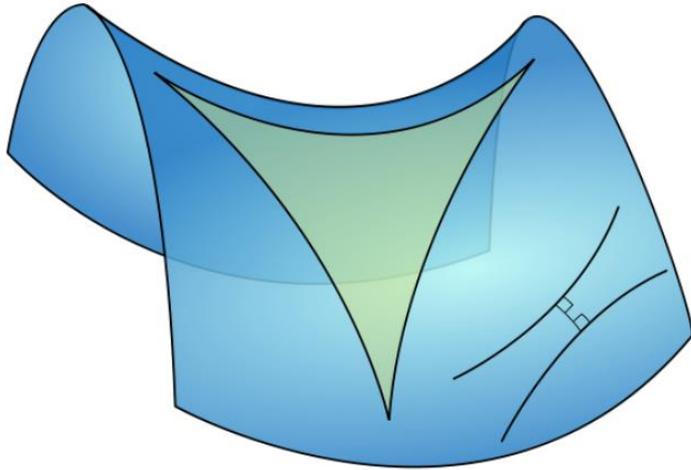
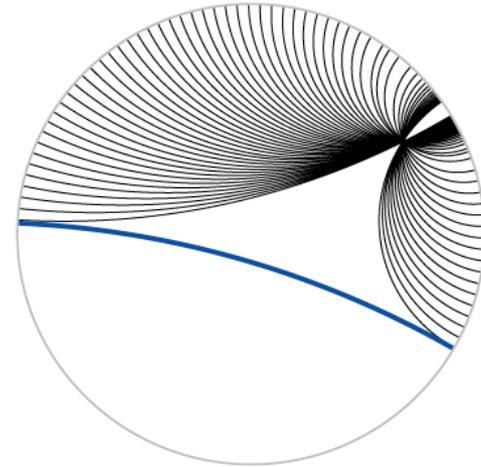


Figure: [Fonte: Wikimedia Commons.]

Geometria Hiperbólica - modelo de Poincaré



Infinitude de rectas com um ponto em comum e paralelas a a recta arbitrária. [Fonte: Wikimedia Commons.]

Geometria Hiperbólica - modelo de Poincaré



Figure: Pavimentação com triângulos hiperbólicos ideais. [Fonte: Wikimedia Commons.]

Pirâmides de Gizé - Egito



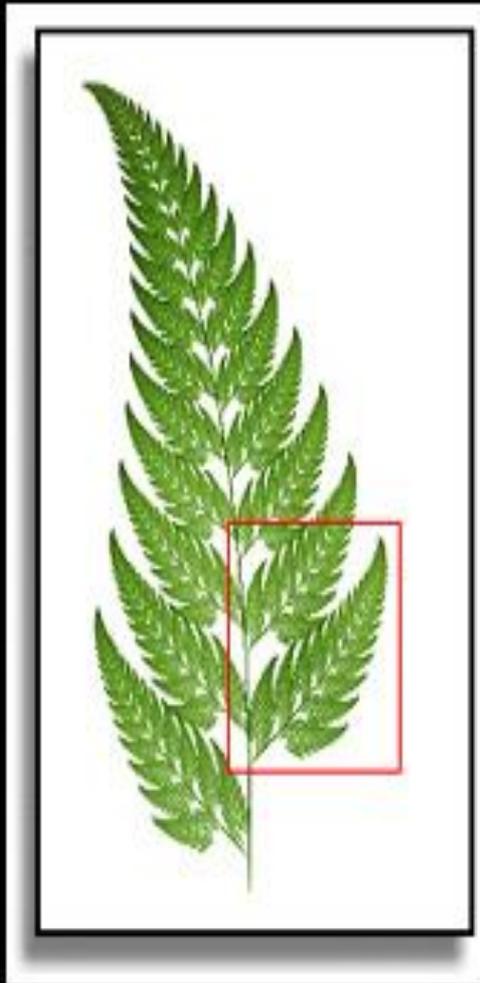
Fonte: <http://commons.wikimedia.org/>



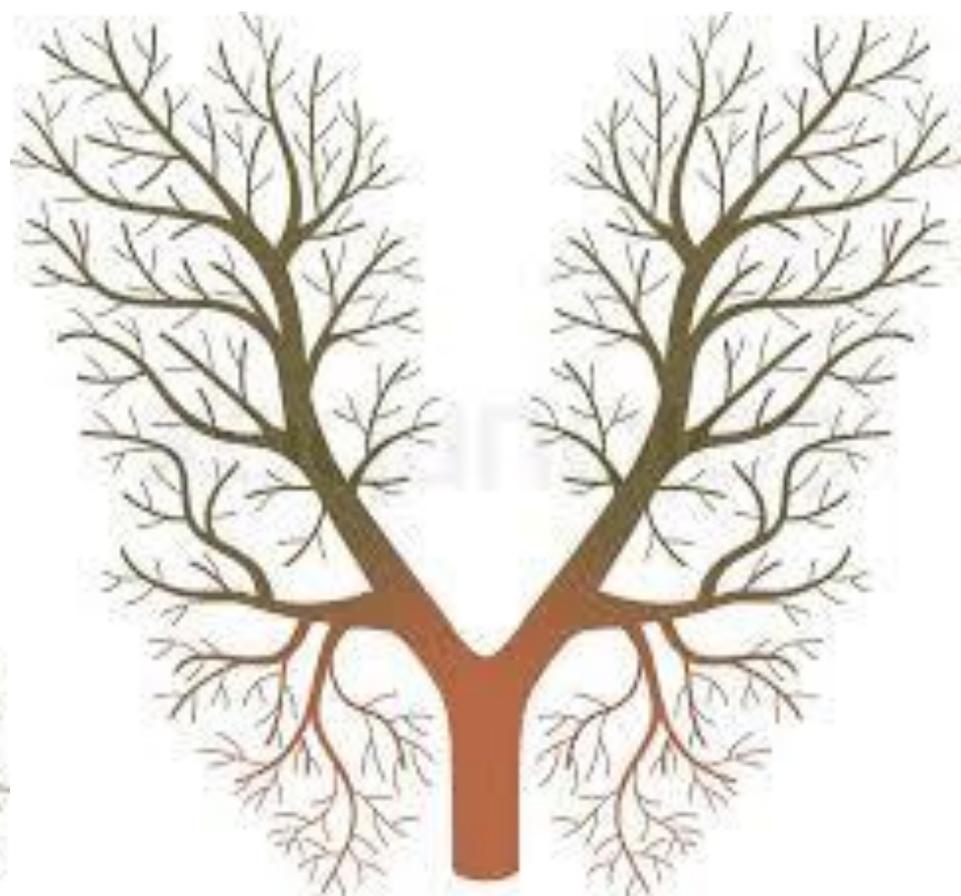
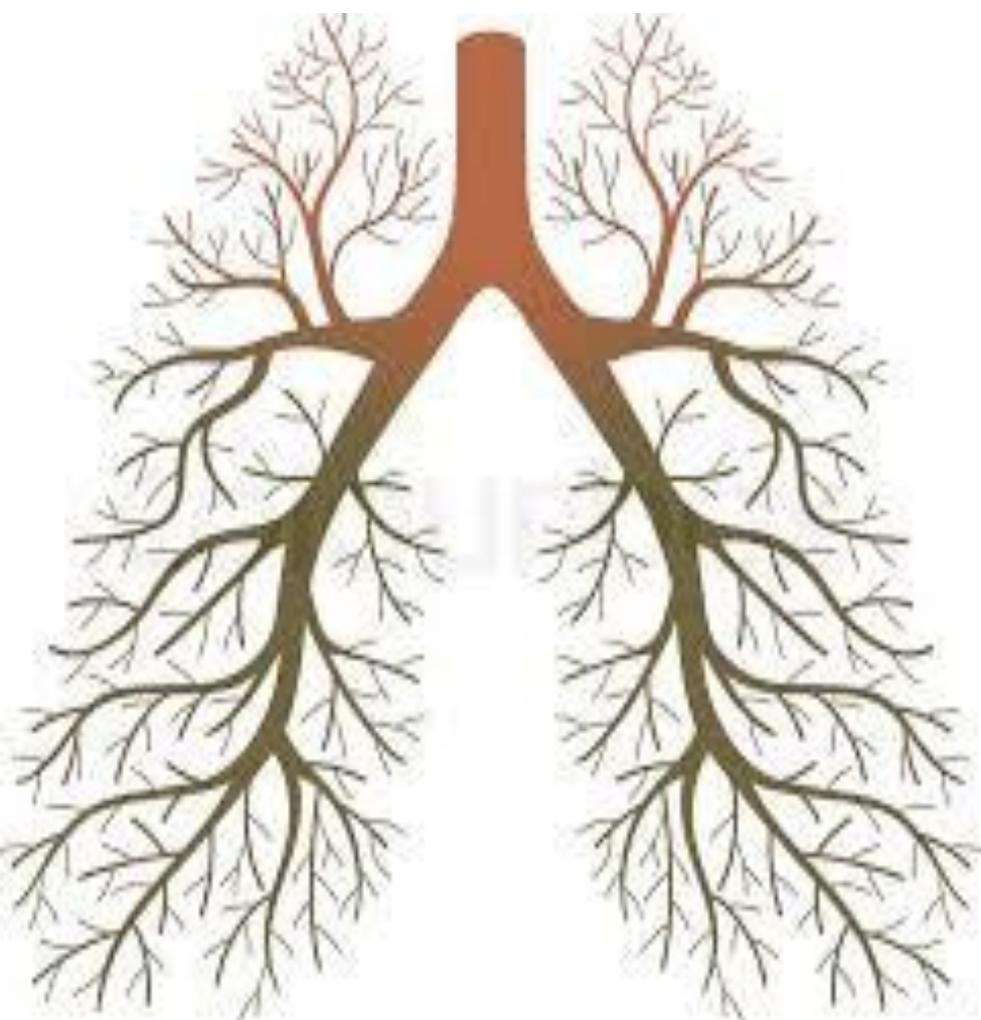
Embora o progresso científico e tecnológico que marcou os últimos cinco séculos deve ter sido alcançado com o uso do conhecimento que explora profundamente e exaustivamente a geometria euclidiana (geometria analítica, mecânica, engenharia...) e outras apresentadas acima, na natureza não identificamos retas, planos, cubos, cones e esferas perfeitos. Ao contrário, a natureza exhibe formas irregulares, rugosas, sinuosas de indescritível beleza.

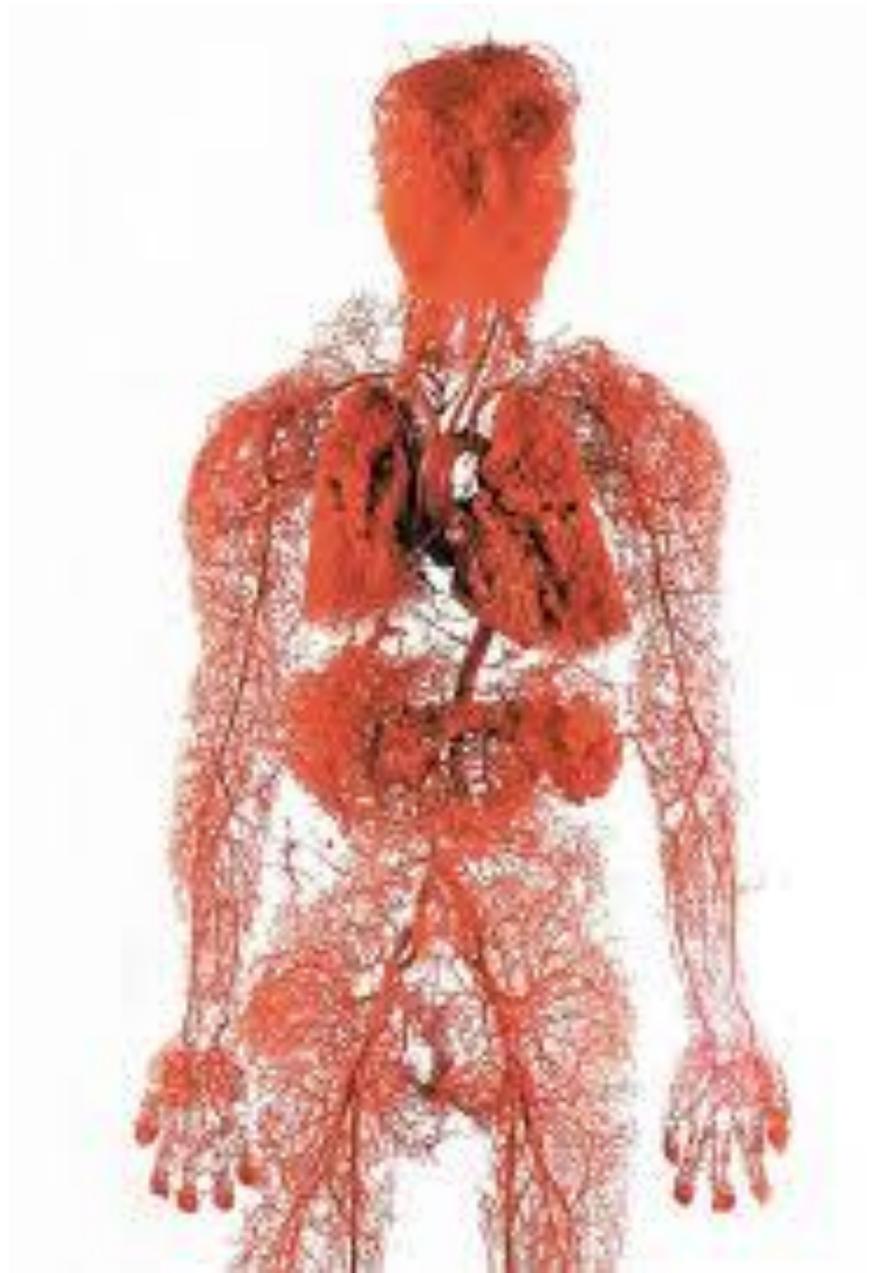
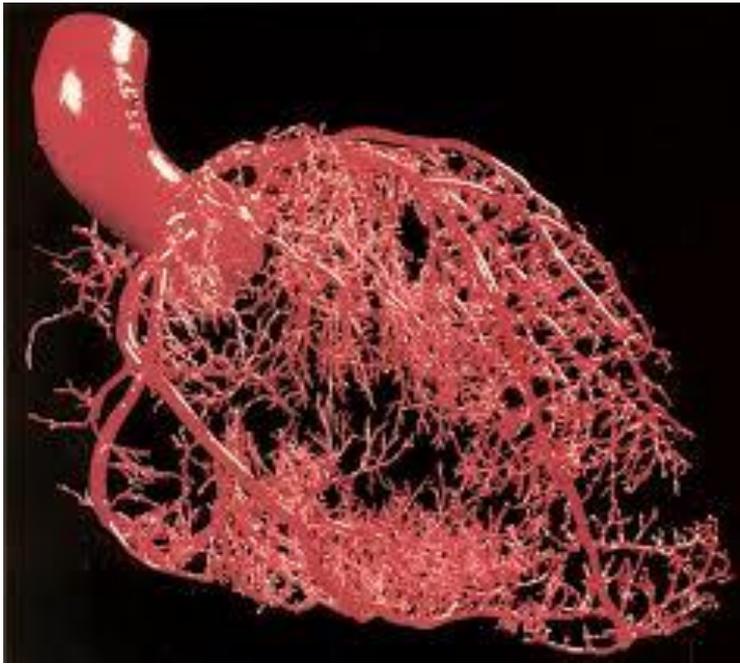
(FFF-2016)

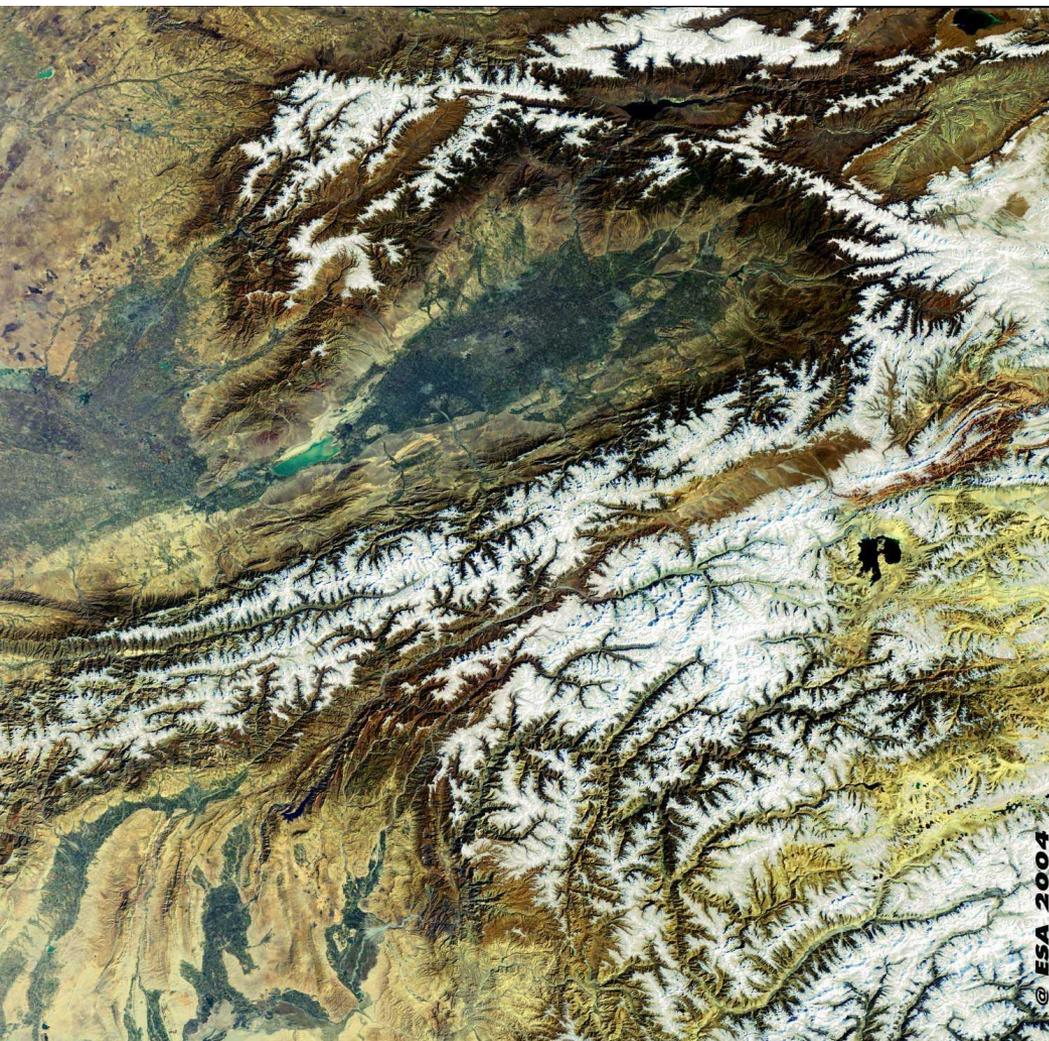
Samanbaia











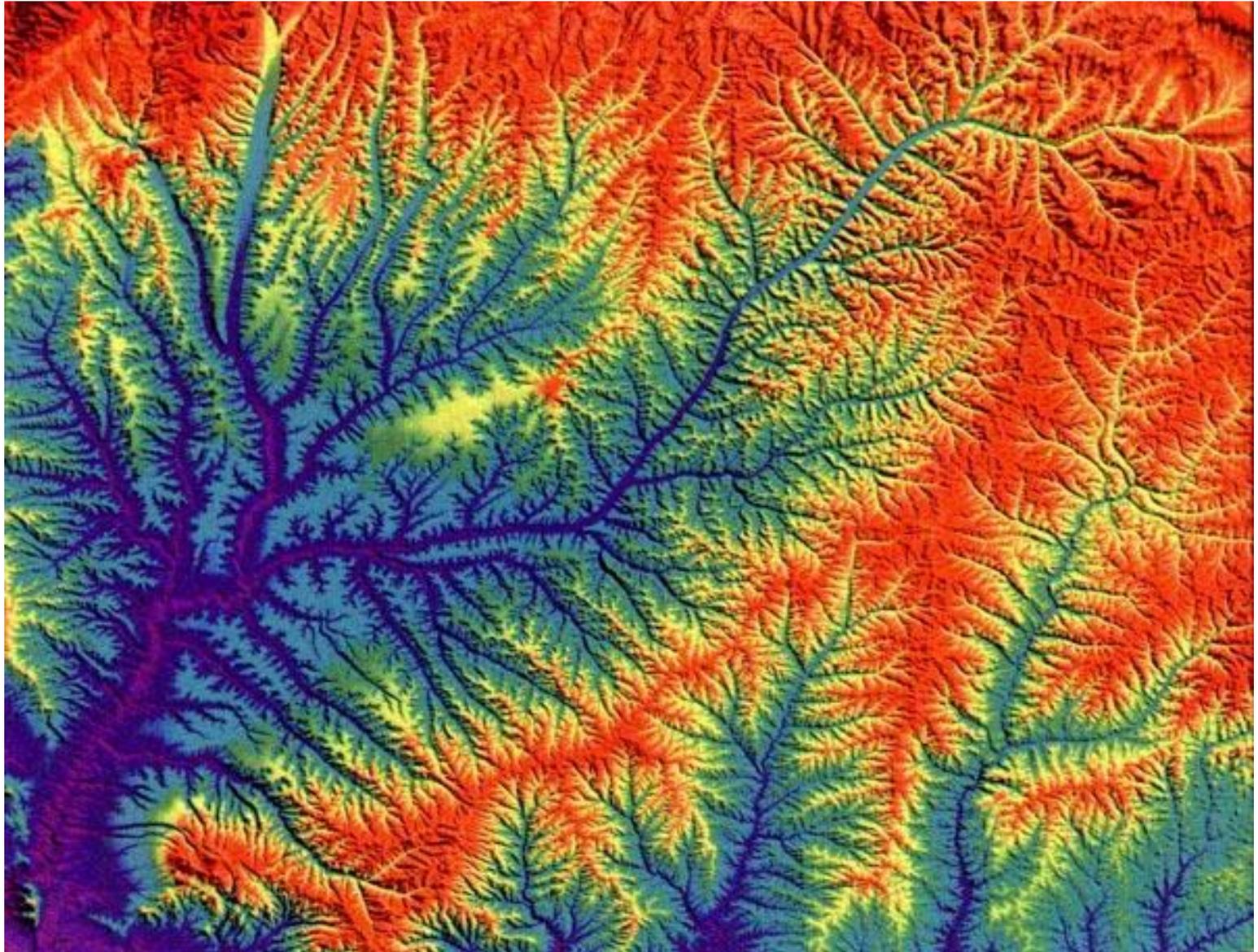
Tajiquistão: república
Montanhosa na Ásia central

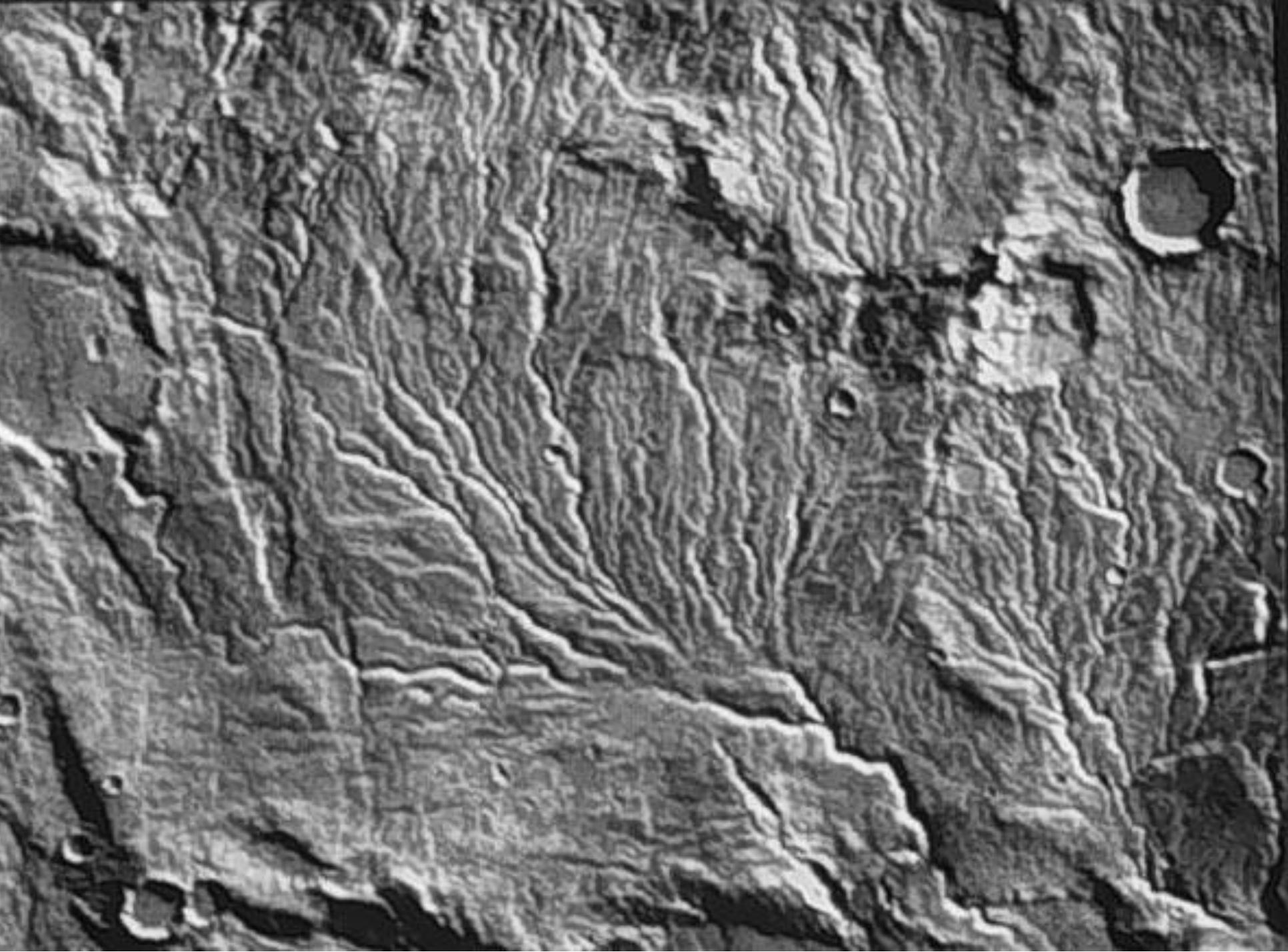
Lago Glacial Finlândia





Rios





Raios e trovões



Jef Duncan



O que chama a atenção nos exemplos acima é a existência de padrões que se repetem em várias escalas, a rugosidade do relevo ou as ramificações

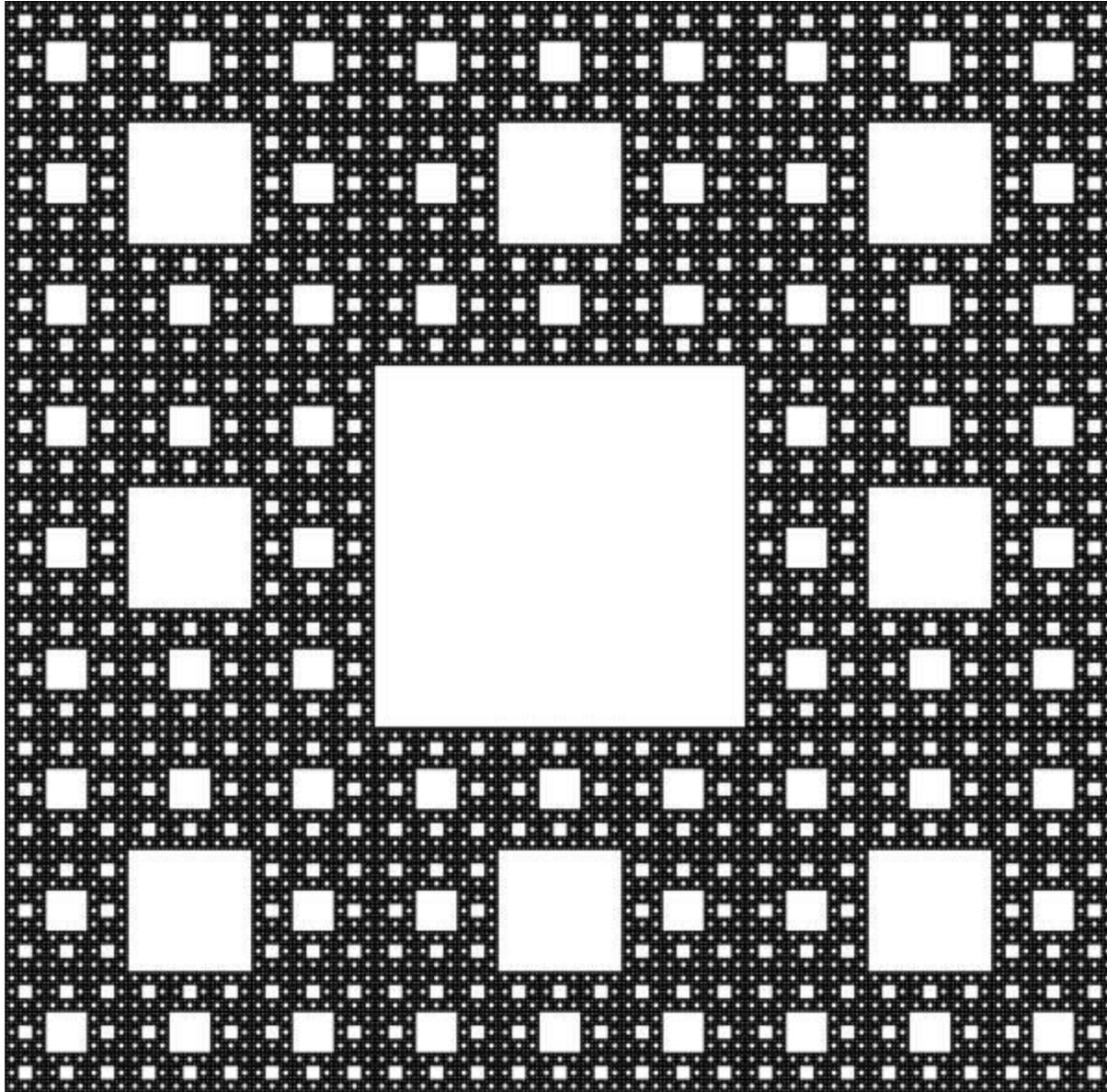
Seria interessante estudar modelos ou regras que produzem objetos com formas auto similares

No século XIX já se tinha iniciado este estudo:

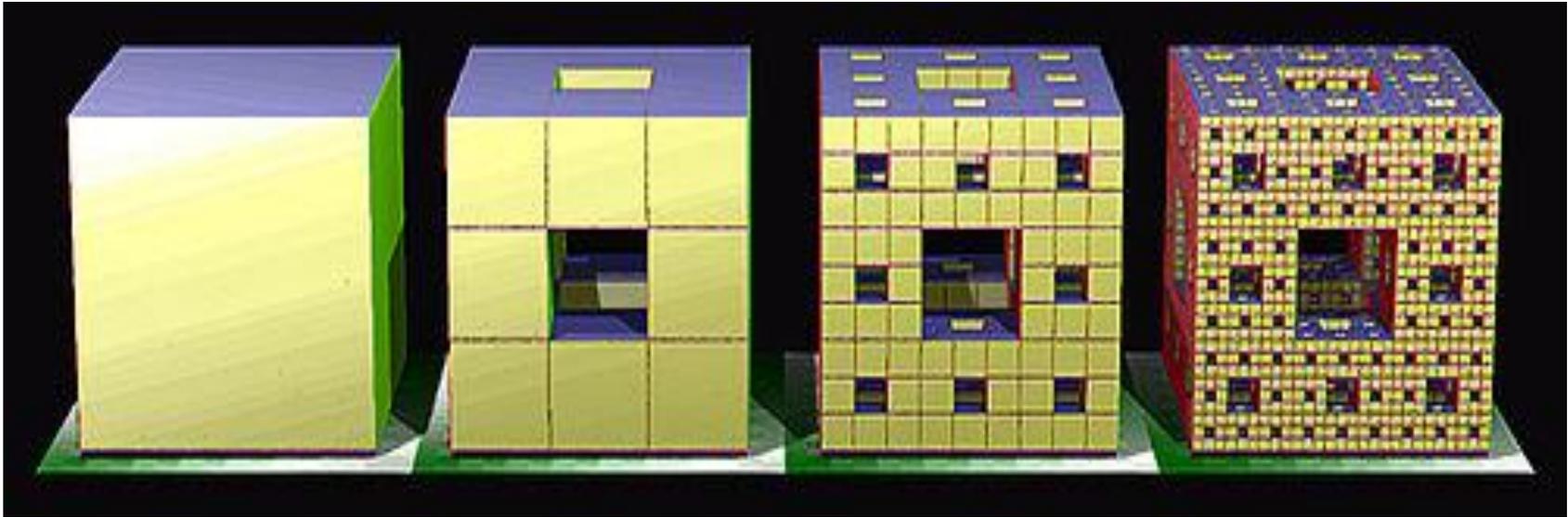
Triângulo de Sierpinski



Tapete de Sierpinski.



Menger Sponge



Number of cubes
 $N = 20^n$

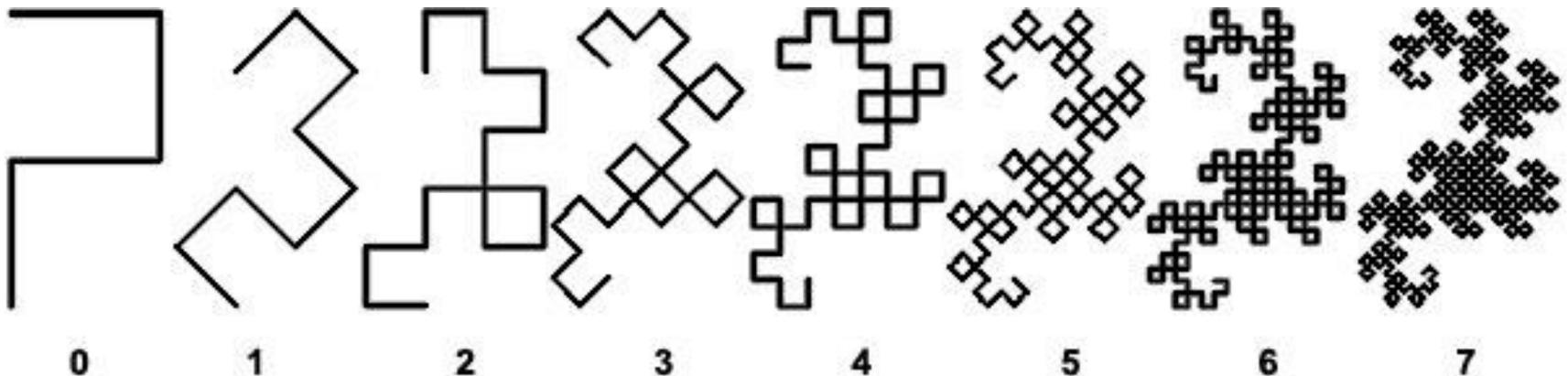
Side of a cube,
 $s = (1/3)^n$

Total volume,
 $V = Ns^3 = (20/27)^n$

Surface area,
 $A = 2(20/9)^n + 4(8/9)^n$

A teoria de sistemas de funções iterados

A primeira iteração é formado por substituição de cada metade da curva dragão com uma cópia menor da mesma forma, rodado para se adequar. Este processo continua a repetir, onde cada iteração tem duas vezes mais cópias do gerador inicial.



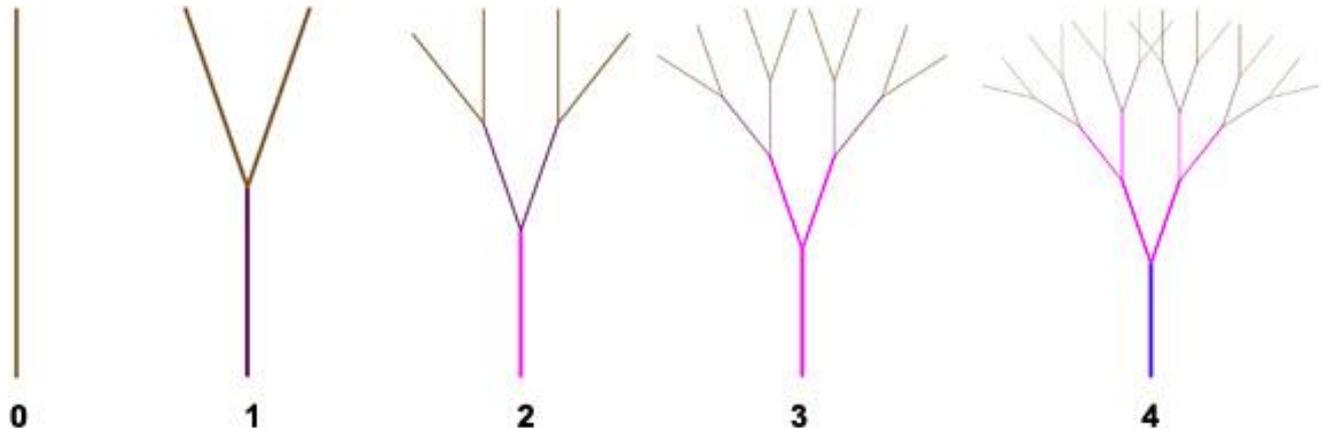
Sistemas Lindenmayer

Na iteração 0th, temos uma linha reta vertical. Chamamos essa condição de iniciar o 'axioma,' e vamos denotar essa linha com o símbolo 'f'.

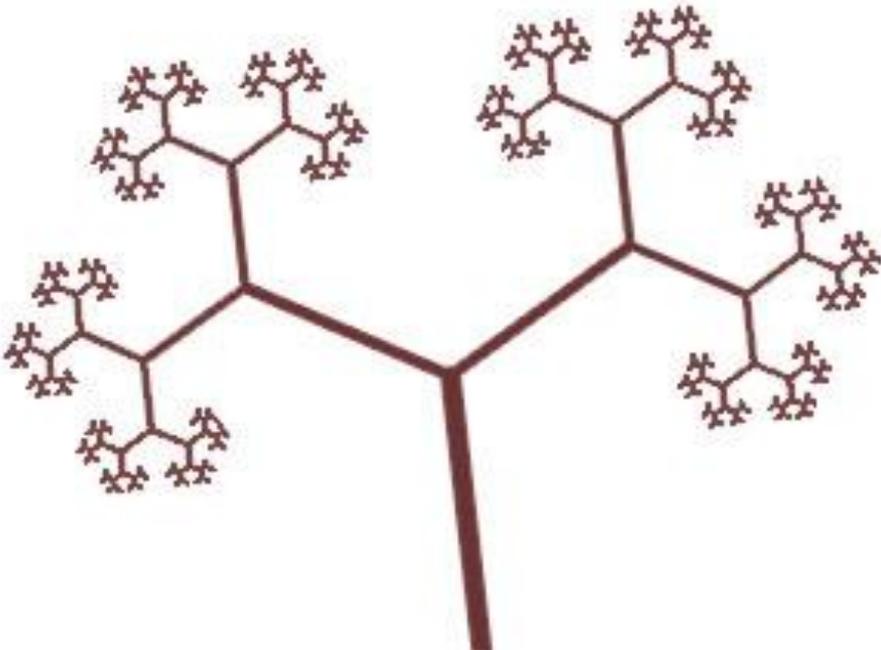
Em seguida, vamos aplicar uma regra para a linha de f, e, neste caso, a regra é se dividir e formar duas novas filiais. Vamos descrever esta regra como:

$$f = f [+ f] [-f]$$

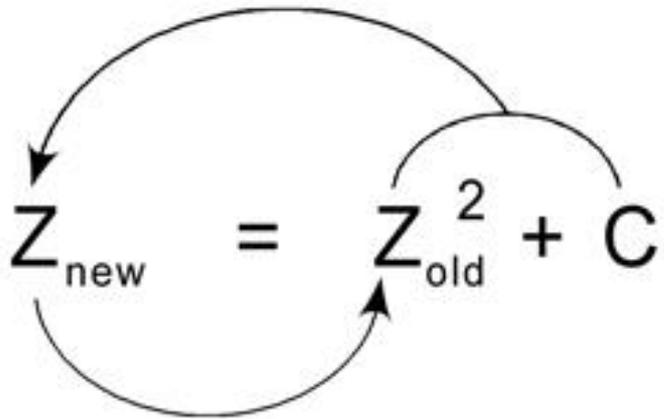
Esta regra significa que a próxima iteração será composto por uma linha de 'f' com um ramo 'f' dobrar para a direita (+) e um ramo 'f' dobrar à esquerda (-).



Sistemas Lindenmayer



O Conjunto de Julia

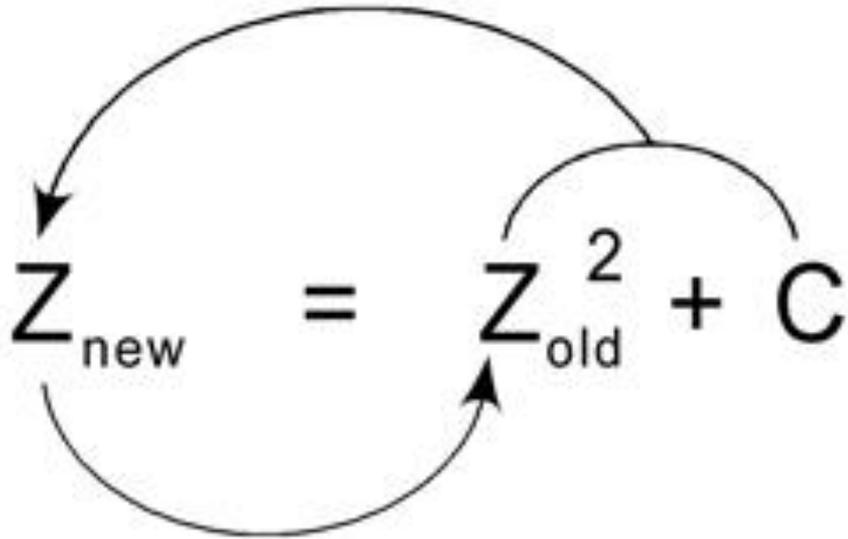

$$z_{\text{new}} = z_{\text{old}}^2 + C$$

Equação 1

Na equação acima, considere Z e C como sendo números complexos.

Vamos chamar de órbita o conjunto de valores produzidos ao longo da iteração definida pela equação 1.

Para um valor de C e de Z inicial. Para um dado valor de C , calcule a órbita para todos os pontos no plano complexo com raio menor do que 2. O conjunto de valores de z que produzem órbitas que nunca vão ao infinito é chamado de **conjunto de Julia**



$$Z_1 = Z_0^2 + C = 0 + 1 = 1$$

$$Z_2 = Z_1^2 + C = 1 + 1 = 2$$

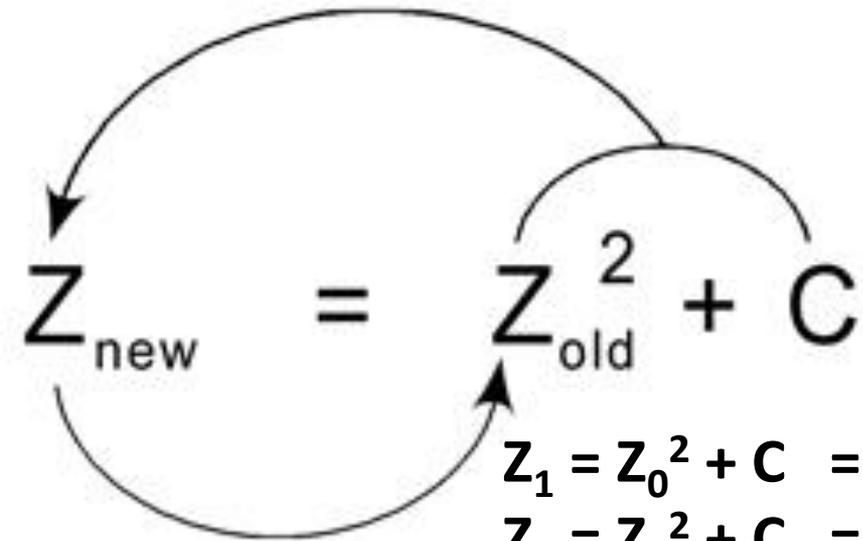
$$Z_3 = Z_2^2 + C = 4 + 1 = 5$$

$$Z_4 = Z_3^2 + C = 25 + 1 = 26$$

$$Z_5 = Z_4^2 + C = 676 + 1 = 677$$

etc...

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$



$$z_1 = z_0^2 + C = 0 + -0.5 = -0.5$$

$$z_2 = z_1^2 + C = 0.25 + -0.5 = -0.25$$

$$z_3 = z_2^2 + C = 0.0625 + -0.5 = -0.4375$$

$$z_4 = z_3^2 + C = 0.1914 + -0.5 = -0.3086$$

$$z_5 = z_4^2 + C = 0.0952 + -0.5 = -0.4048$$

$$z_5 = z_4^2 + C = 0.1638 + -0.5 = -0.3362$$

$$z_5 = z_4^2 + C = 0.1130 + -0.5 = -0.3870$$

$$z_5 = z_4^2 + C = 0.1498 + -0.5 = -0.3502$$

etc...

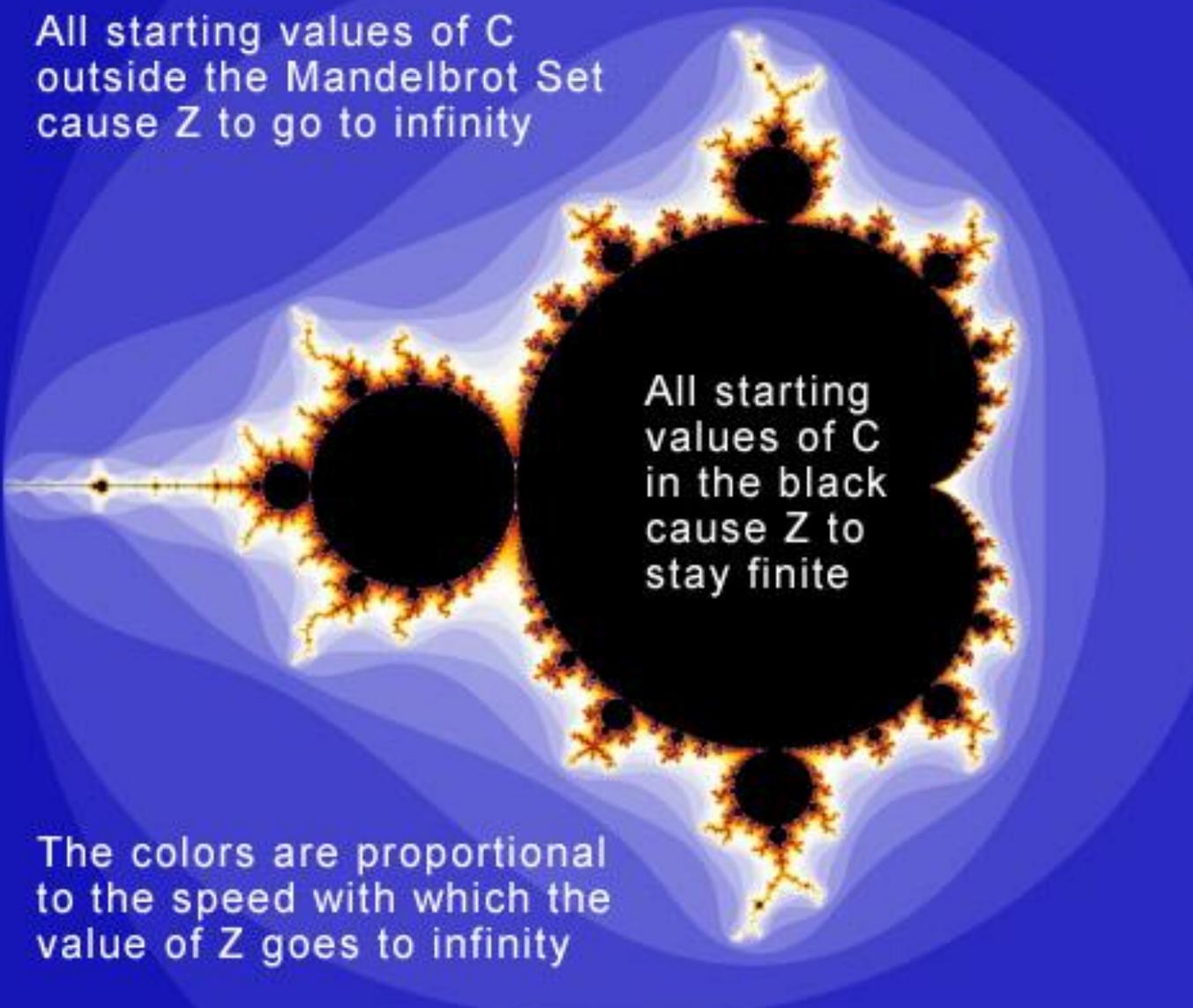
$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

Como gerar o conjunto de Mandelbrot

DEFINIÇÃO: O Conjunto Mandelbrot é o conjunto de todos os valores iniciais C que ficar finito quando reiteramos através da equação:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

All starting values of C
outside the Mandelbrot Set
cause Z to go to infinity

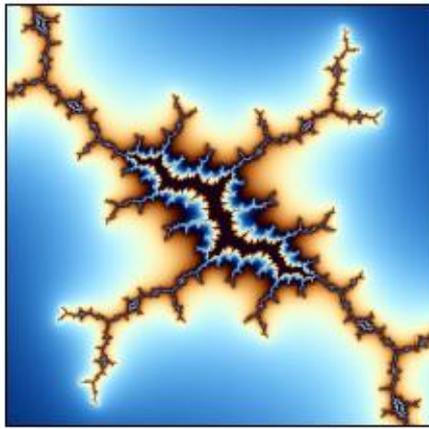
A fractal image of the Mandelbrot set. The central black region represents the set of complex numbers C for which the iterates of the function Z_{n+1} = Z_n^2 + C do not diverge to infinity. The boundary of this set is highly complex and self-similar. The surrounding area is colored in shades of blue, with the color intensity representing the rate at which the iterates of Z diverge to infinity for values of C outside the set. The colors range from light blue (slow divergence) to white (fast divergence).

All starting
values of C
in the black
cause Z to
stay finite

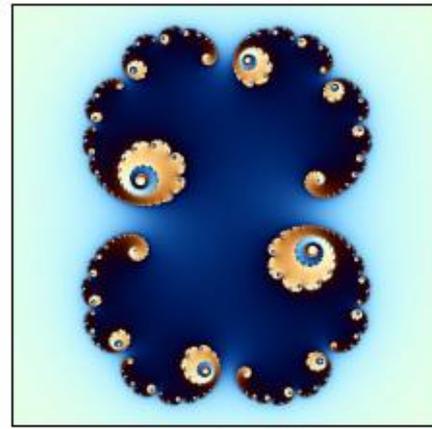
The colors are proportional
to the speed with which the
value of Z goes to infinity



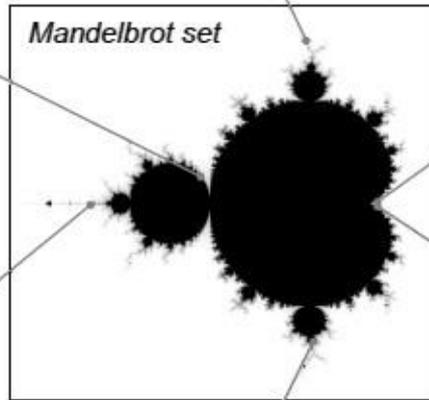
$$c = -.79 + .15i$$



$$c = -.162 + 1.04i$$

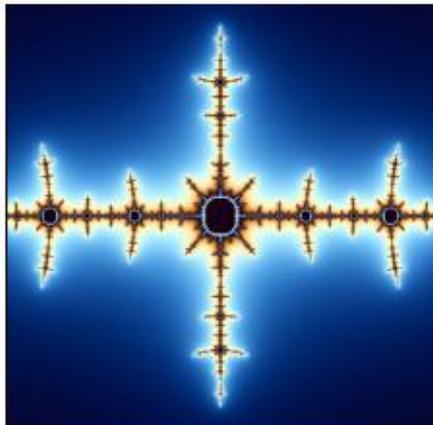


$$c = .3 - .01i$$

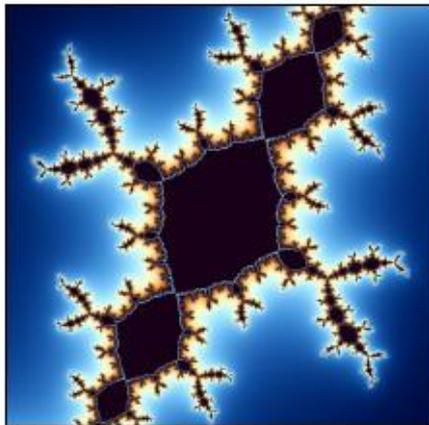


Mandelbrot set

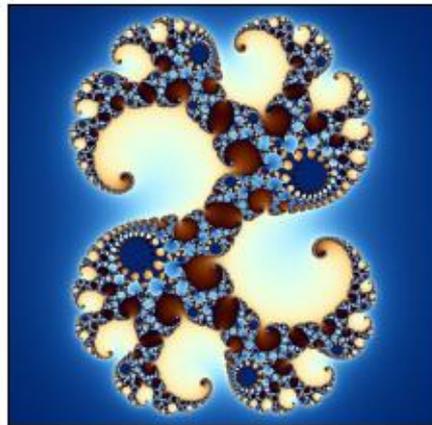
$$c = -1.476 + 0i$$



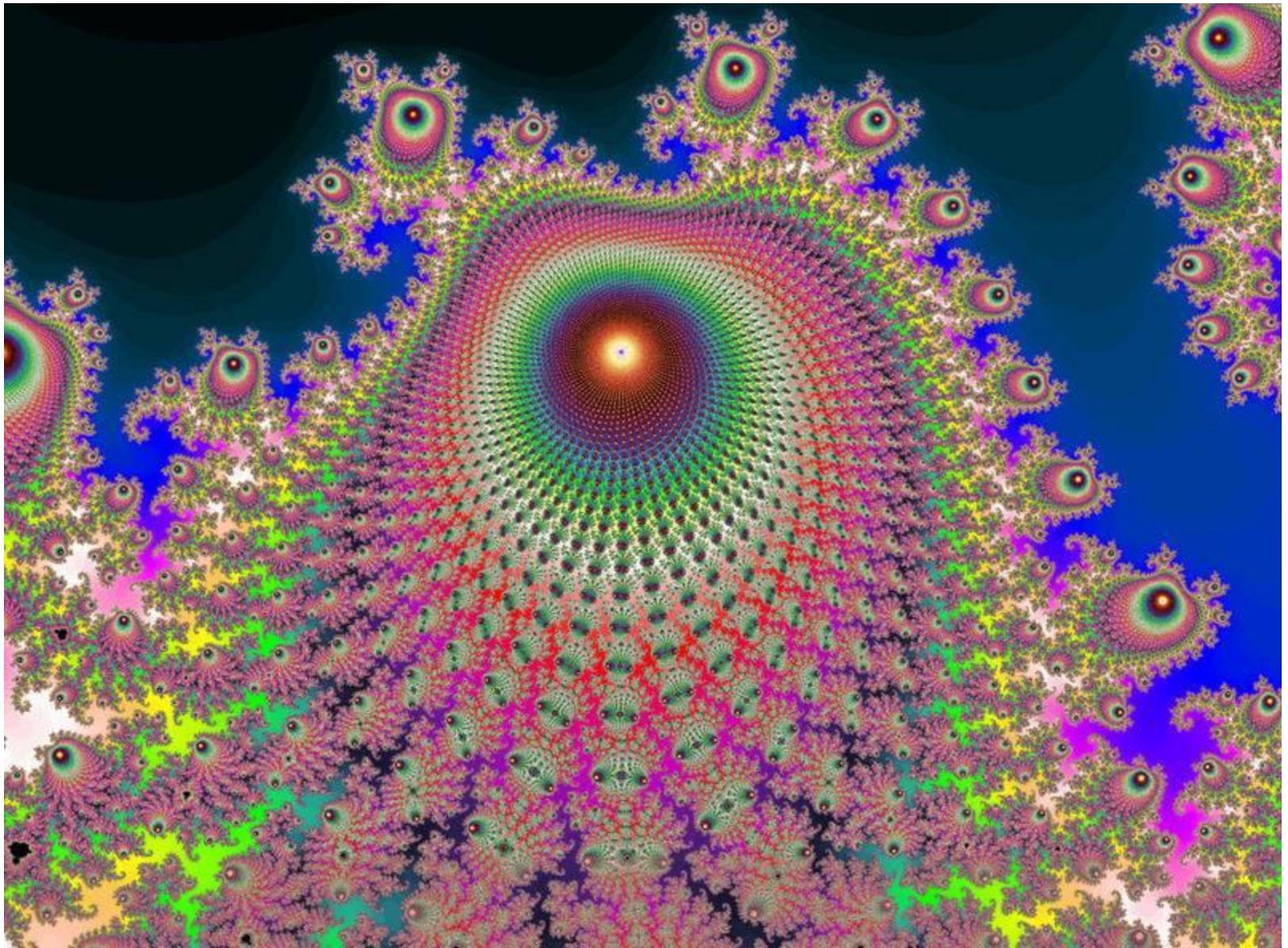
$$c = -.12 - .77i$$



$$c = .28 + .008i$$



https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot



Qual fenômeno está escondido nesta geometria?

1- Percebemos que as figuras são formadas pela repetição de certas estruturas.

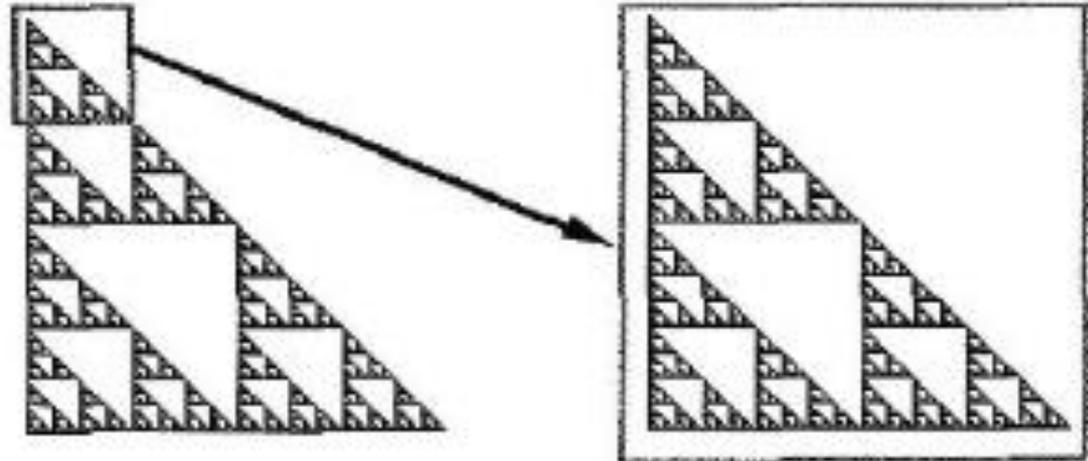
2- Observando mais de perto, existem outras estruturas menores

3- Aproximando ainda mais, vemos que estas pequenas estruturas possuem uma estrutura rica e complexa, as vezes com certa semelhança da estrutura macroscópica

Auto-similaridade

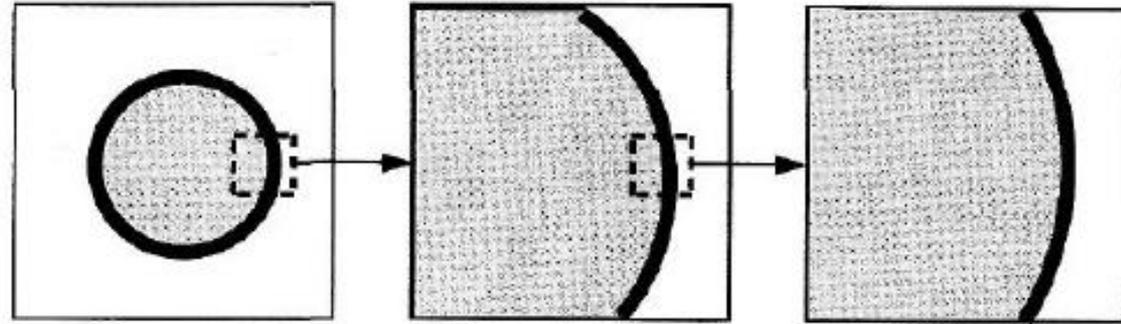
Geometrical

The magnified piece of an object is an exact copy of the whole object.



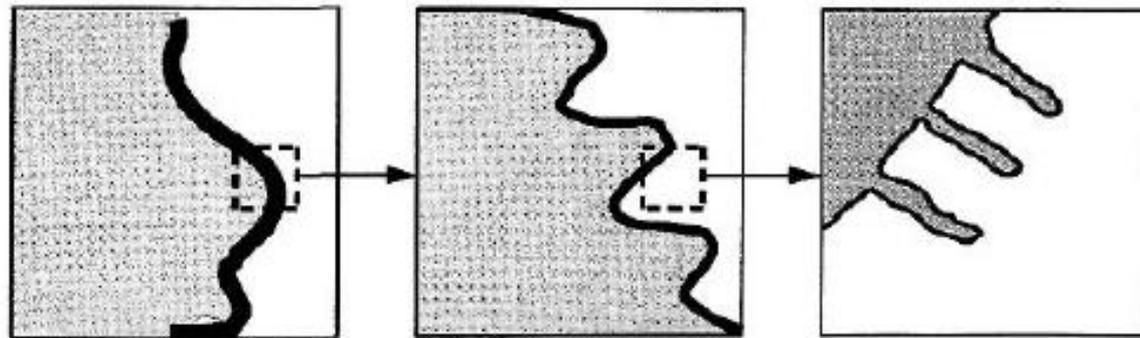
Não – FRACTAIS
o zoom não traz
Novidades ou novas
Característica

Non-Fractal



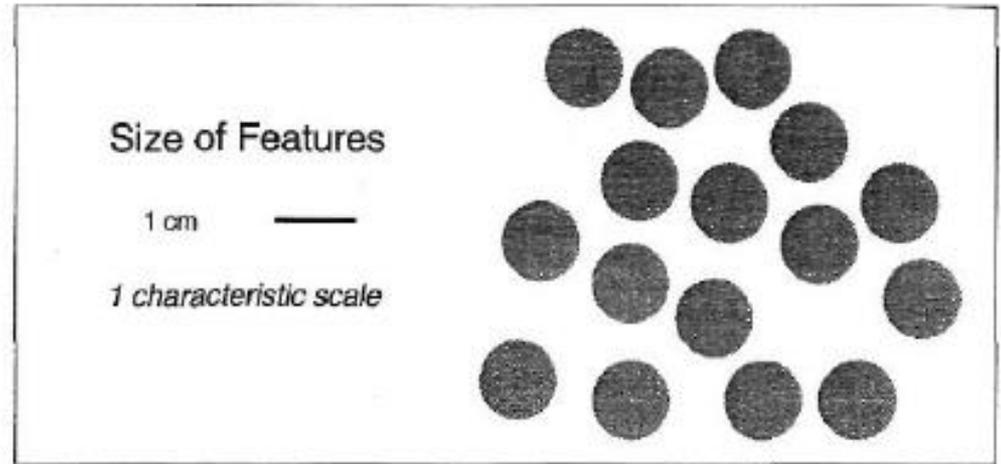
FRACTAIS:
o zoom traz
Novidades ou novas
Característica

Fractal

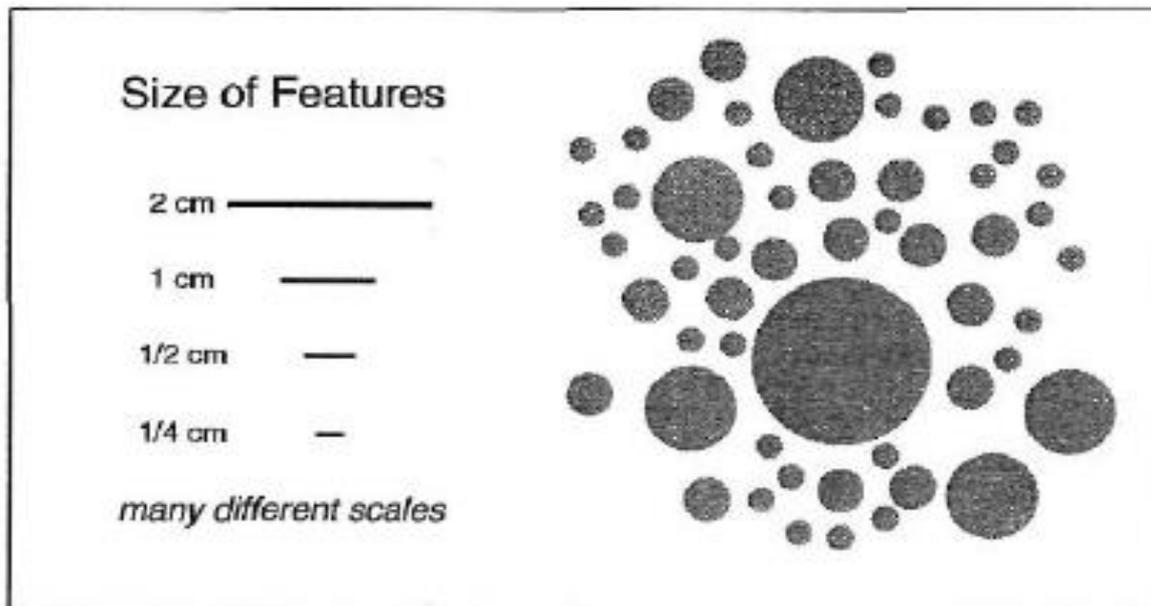


FRACTAIS

Non-Fractal



Fractal



Voltando para a questão da auto-similaridade

Fractais parecem ser estruturas que se manifestam em várias escalas. Seria interessante buscar uma medida que pudesse capturar este Fenômeno.

Se algo, digamos Q , pode ser medido em várias escalas, então, podemos chamar de Scaling (escalamento) a dependência de Q como função da resolução da medida.

Auto-similaridade especifica como pequenos pedaços se relacionam com grandes pedaços. Podemos dizer que a auto-similaridade pode gerar escalamento (**scaling**).

Medidas da propriedade fractal

• Dimensão fractal

Descreve como o objeto preenche o espaço. Ele fornece a informação do comprimento, área ou volume. Seu valor pode ser inteiro ou fracionário

• Dimensão topológica

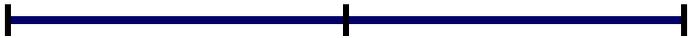
Descreve como os pontos dentro do objeto se conectam entre si. Ele fornece a informação se o objeto é uma linha, superfície ou sólido. Seu valor deve ser inteiro.

Cálculo da Dimensão Fractal

Cobrimo uma reta de comprimento 1 com segmentos menores:



Tamanho	Número
ϵ	$N(\epsilon)$
1	1



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	2



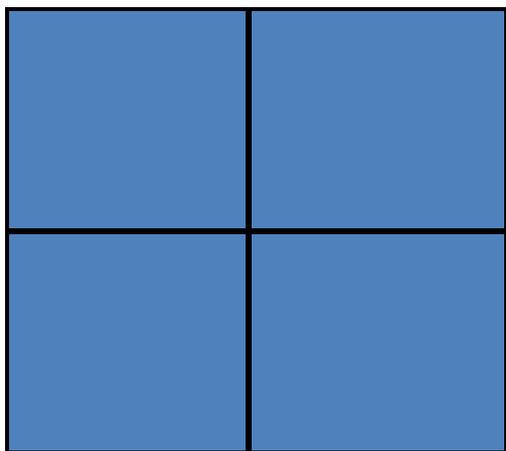
Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	4

Dividindo o lado do segmento por 2, o número de segmentos multiplica por 2.
Veja que $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$.

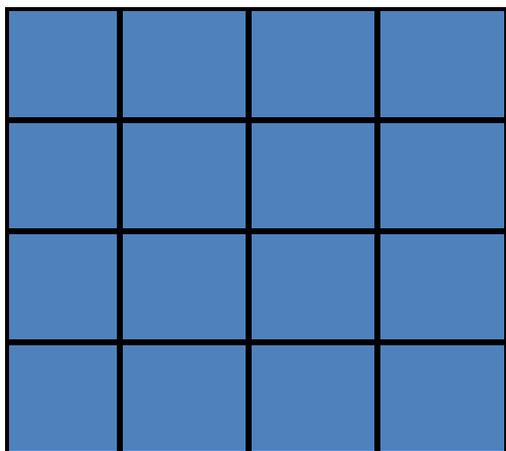
Cobrimo um quadrado de lado 1 com quadrados menores:



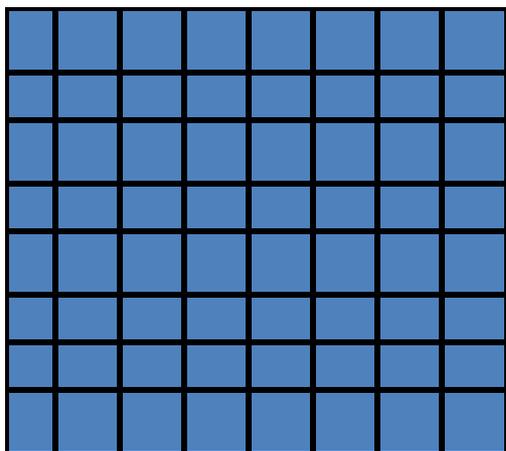
Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$



Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$
$\frac{1}{4}$	$16=4*4=4^2$

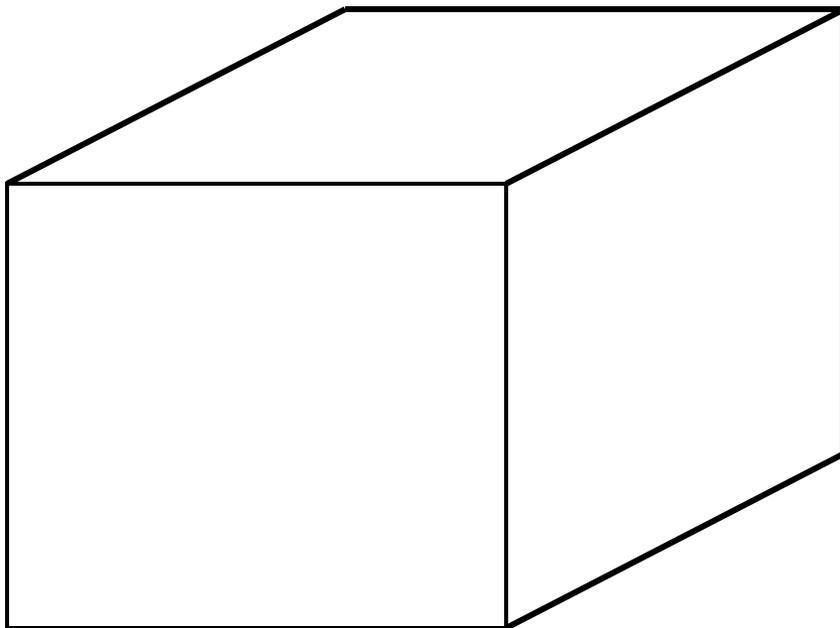


Tamanho ε	Número $N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$4=2^2$
$\frac{1}{4}$	$16=4^2$
$\frac{1}{2^k}$	$(2^k)^2 = (1/\varepsilon)^2$

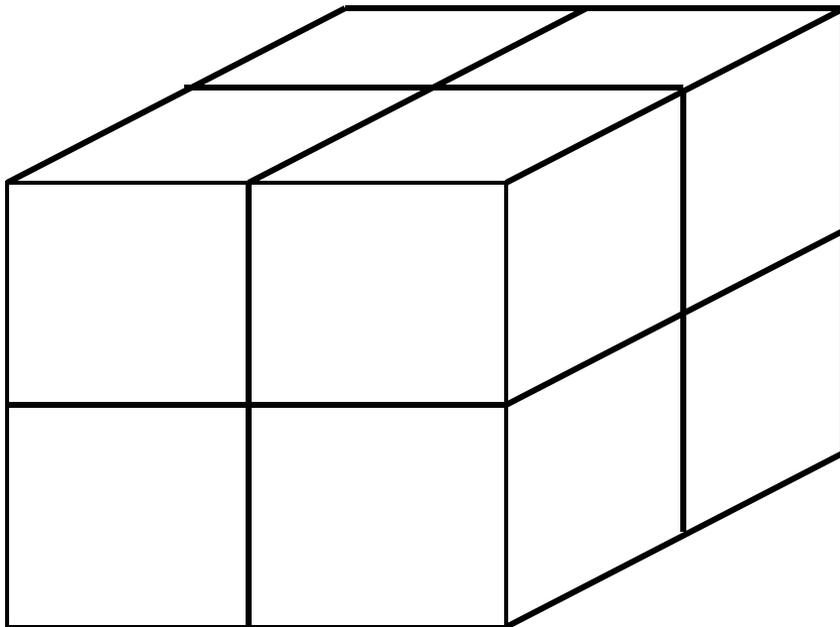
Dividindo o lado por 2, o número de quadrados multiplica por $4 = 2^2$.

Veja que $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^2$.

Cobrimo cubo de lado 1 com cubos menores:



Tamanho	Número
ε	$N(\varepsilon)$
1	1



Tamanho

ε

1

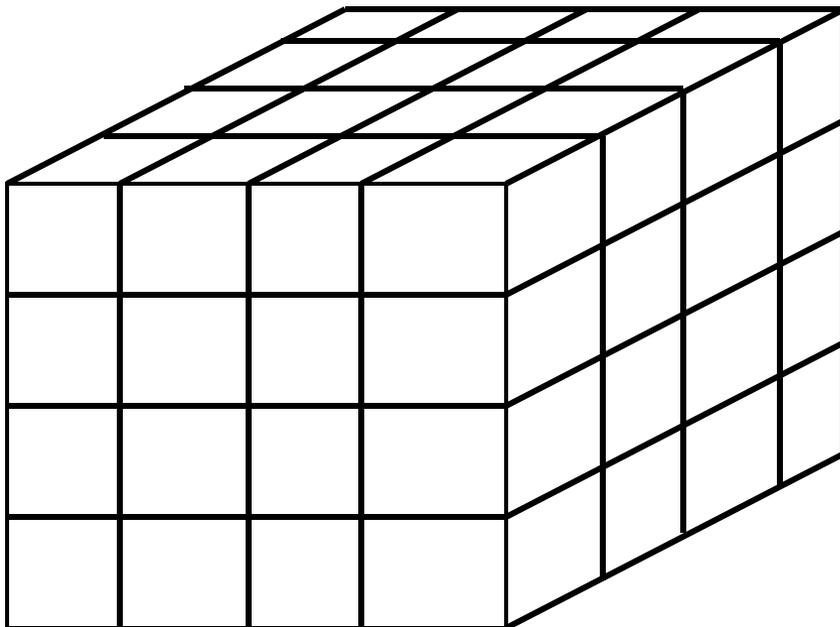
$\frac{1}{2}$

Número

$N(\varepsilon)$

1

$8=2^3$



Tamanho	Número
ε	$N(\varepsilon)$
1	1
$\frac{1}{2}$	$8=2^3$
$\frac{1}{4}$	$64=4^3$
$\frac{1}{2^k}$	$(2^k)^3 = (1/\varepsilon)^3$

Dividindo o lado por 2, o número de cubos multiplica por $8 = 2^3$.

Agora temos que $N(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^3$.

Podemos então definir a dimensão de uma figura com base nesse processo:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d$$

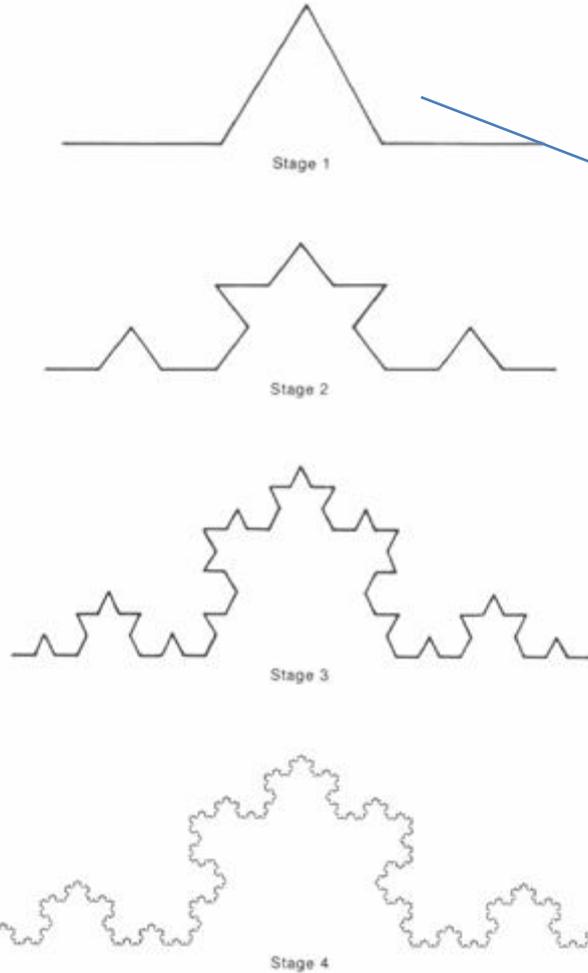
Tomando o logaritmo dos dois lados podemos isolar d :

$$\log[N(\varepsilon)] = \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d = d \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

e

$$d = \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log[1/\varepsilon]}$$

Dimensão da Curva de Koch:



Adapted from Benoit Mandelbrot, *Fractals*.

Tamanho
 ϵ

1

1/3

1/9

1/27

1/3^k

Número
N(ϵ)

1

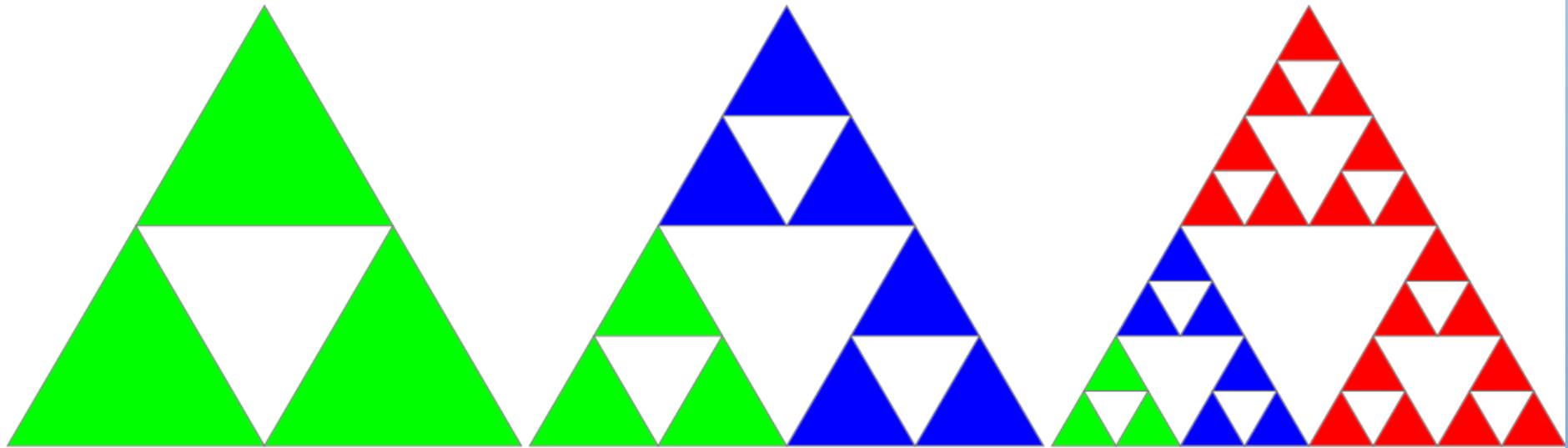
4

16=4²

64=4³

4^k

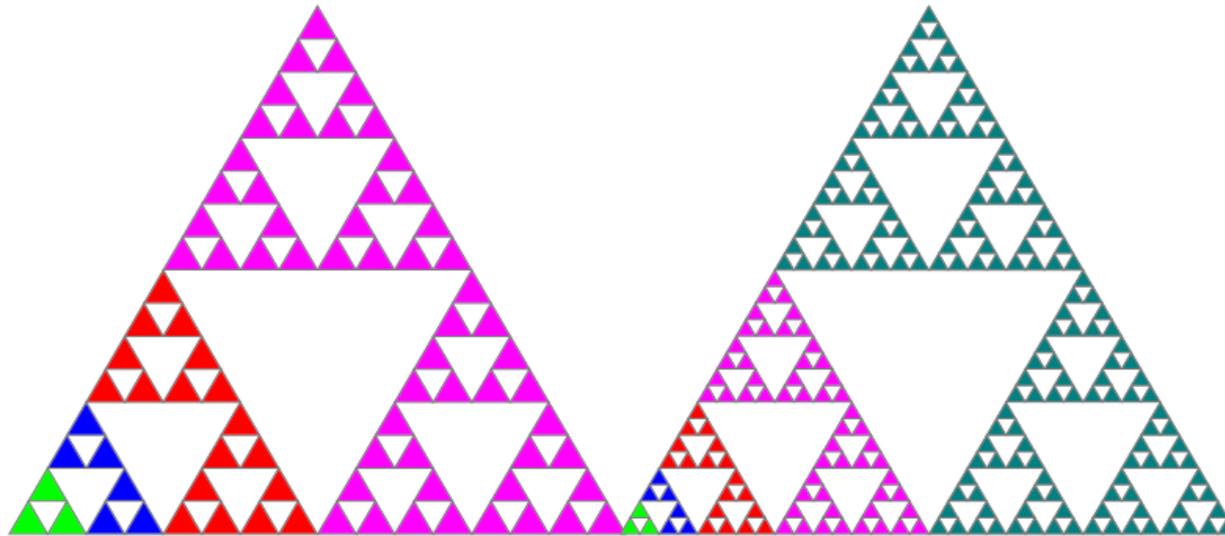
$$d = \frac{\log[N(\epsilon)]}{\log[1/\epsilon]} = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{k \log 4}{k \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\dots$$



First stage

Second stage

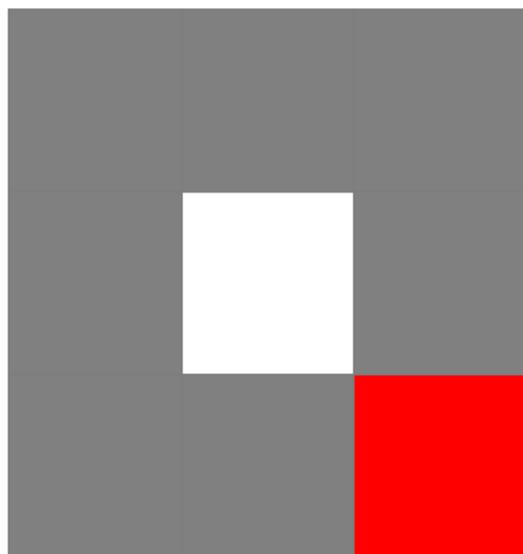
Third stage



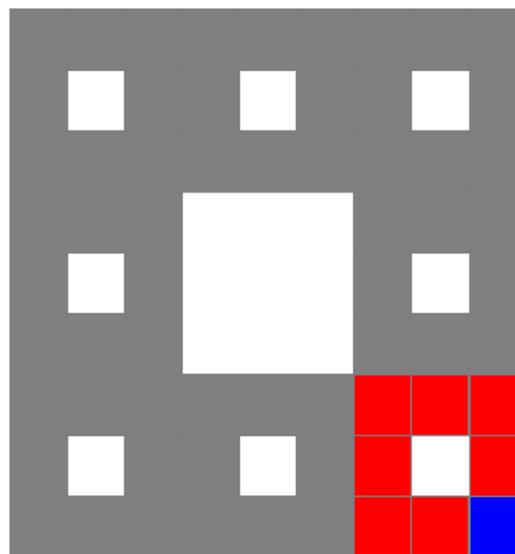
Fourth stage

Fifth stage...

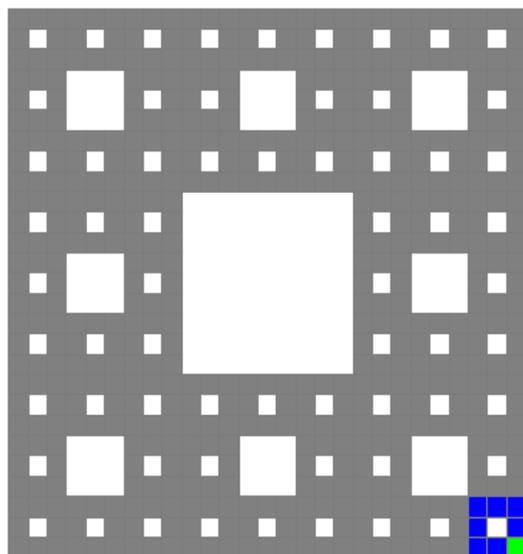
First stage



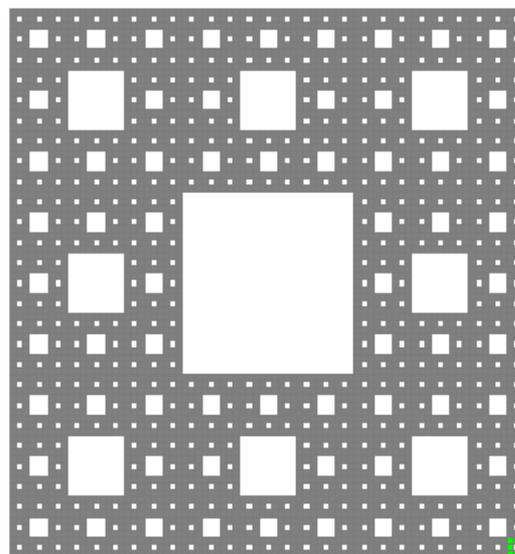
Second stage

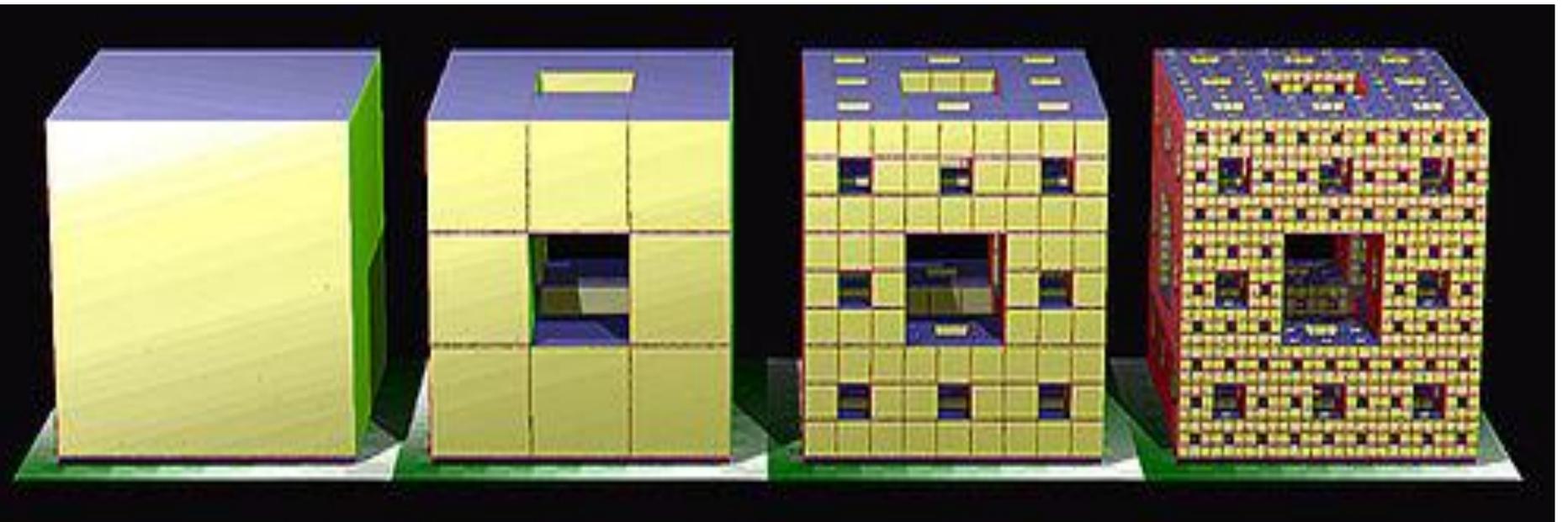


Third stage



Fourth stage





■ ■

■ ■

■ ■

■ ■

■ ■

■ ■

■ ■

■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

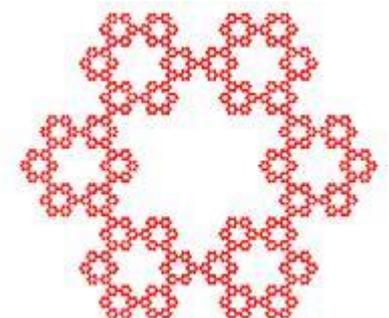
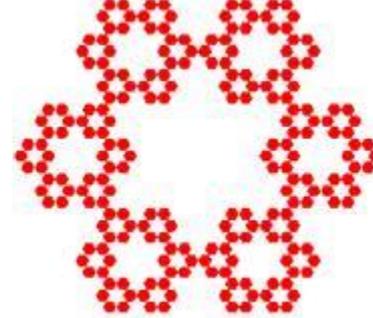
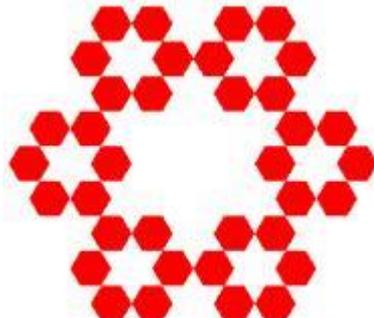
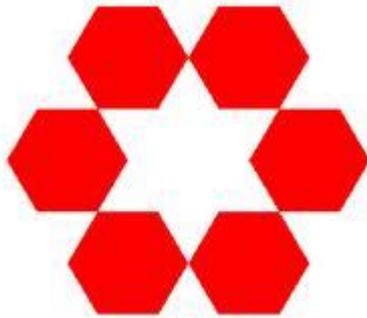
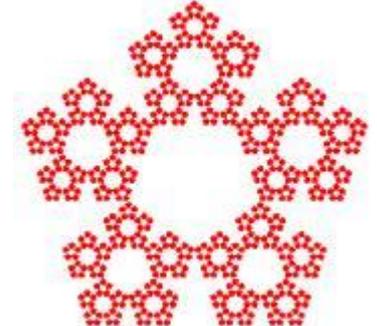
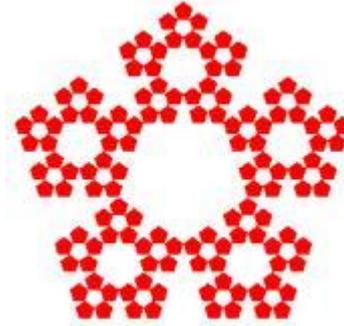
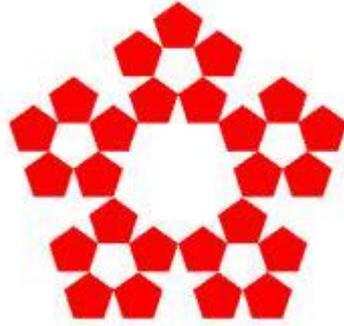
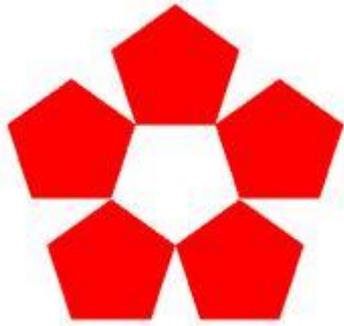
■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

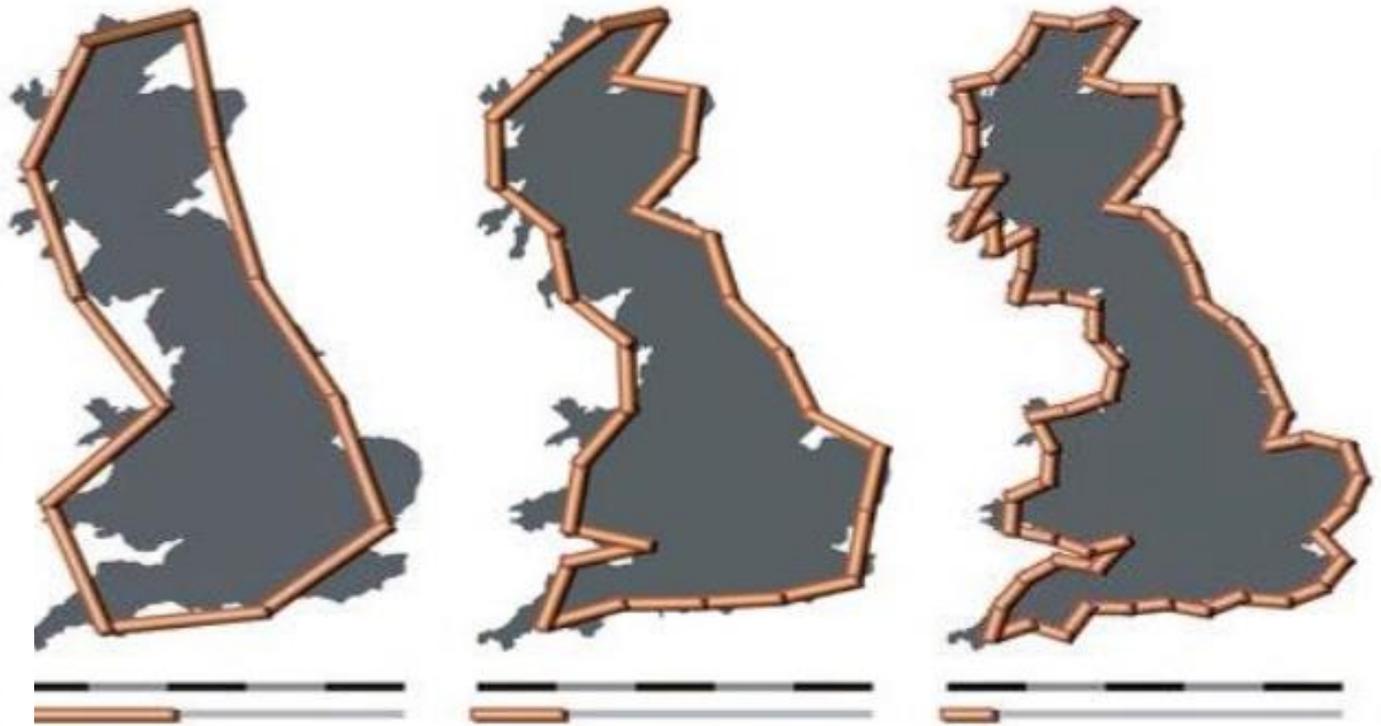


Approximate dimension of Cauliflower



Mandelbrot's example:
Measuring the length of the coastline of Great Britain

What size ruler should you use?



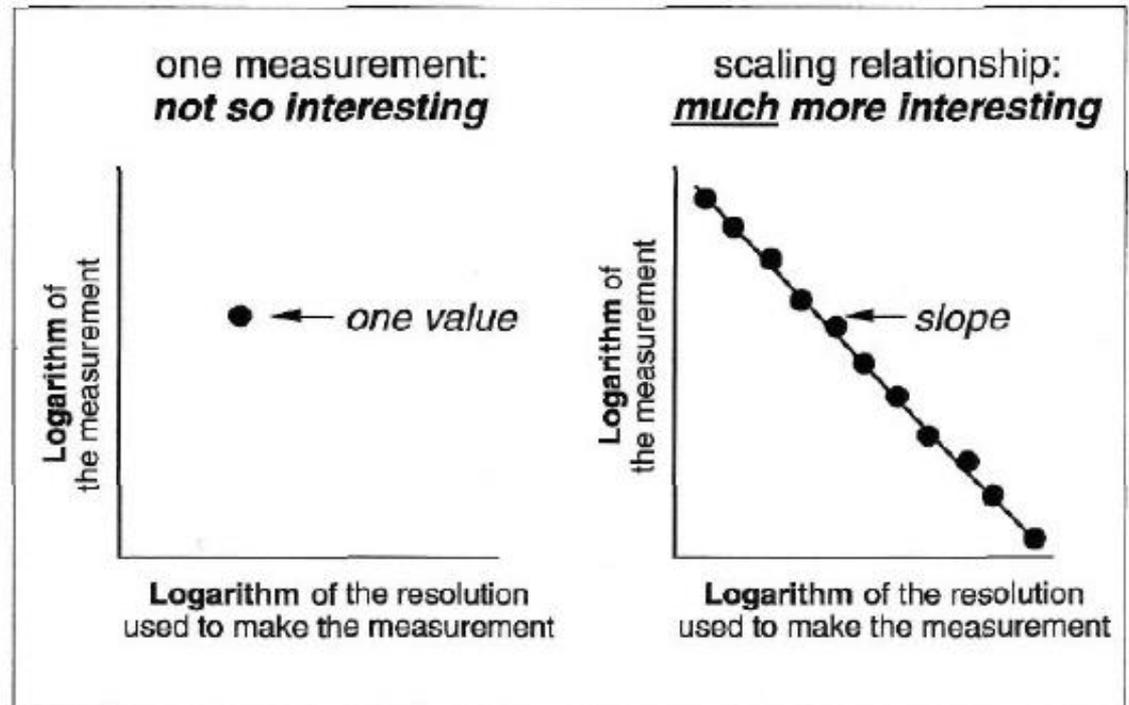
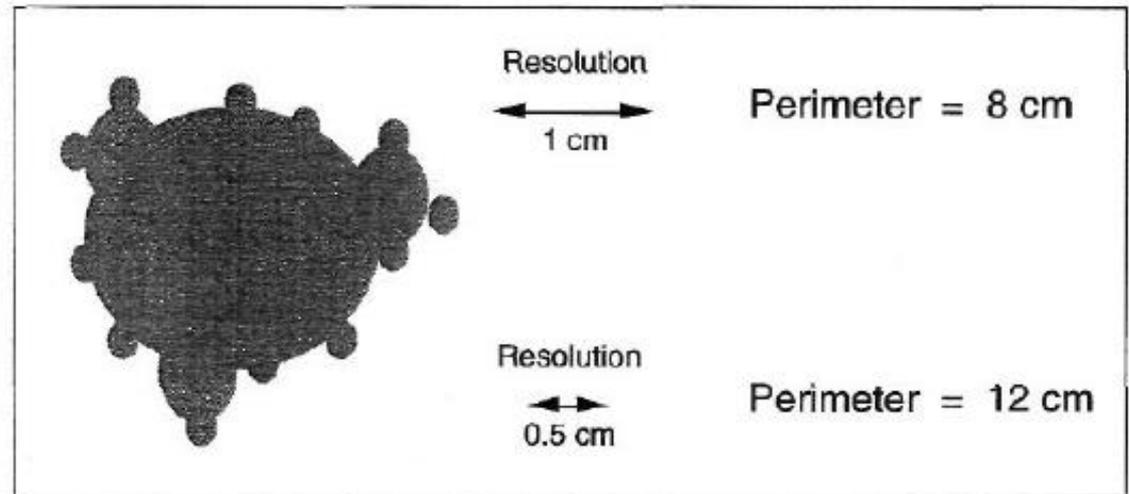
Benoit Mandelbrot, 1924–2010

Scaling

Objetos fractais não tem um valor único para a medida Q .

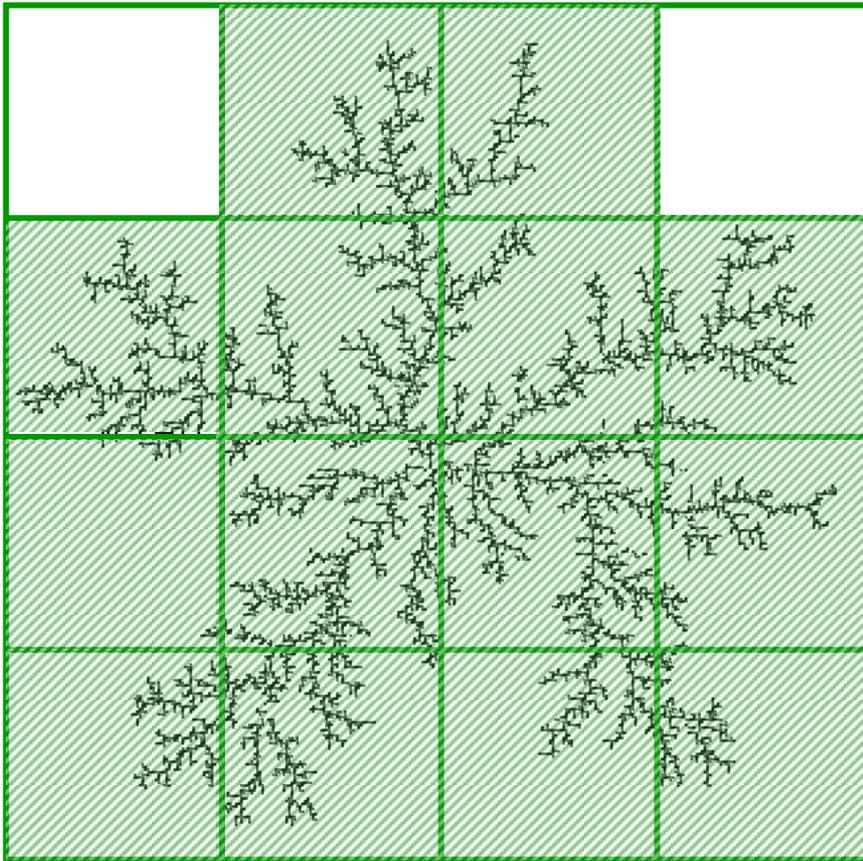
Para objetos fractais: medidas em diferentes resoluções terão valores diferentes

Uma medida pontual Não diz muito no caso de objetos fractais. É preciso obter a dependência funcional Com a escala (SCALING)



Measuring fractal dimension

Box-counting: resolution-dependent measurement of D

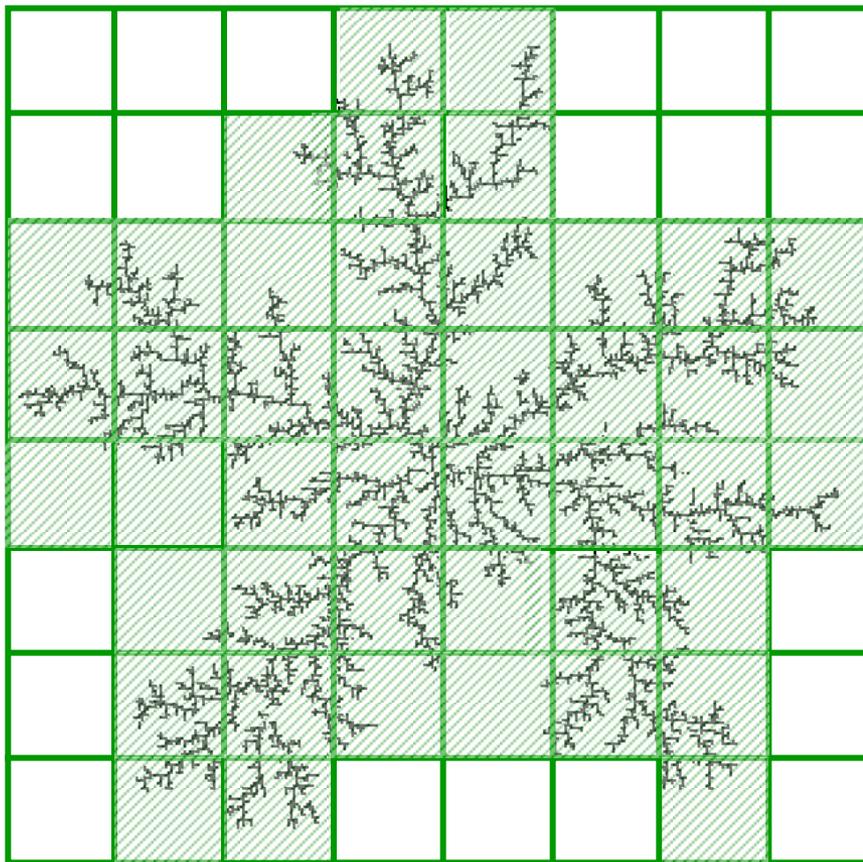


- cobrir o objeto com caixas de tamanho ϵ
- conte o número de caixas não vazias
- repetir para outros valores de ϵ

< ϵ >

Measuring fractal dimension

box-counting: resolution-dependent measurement

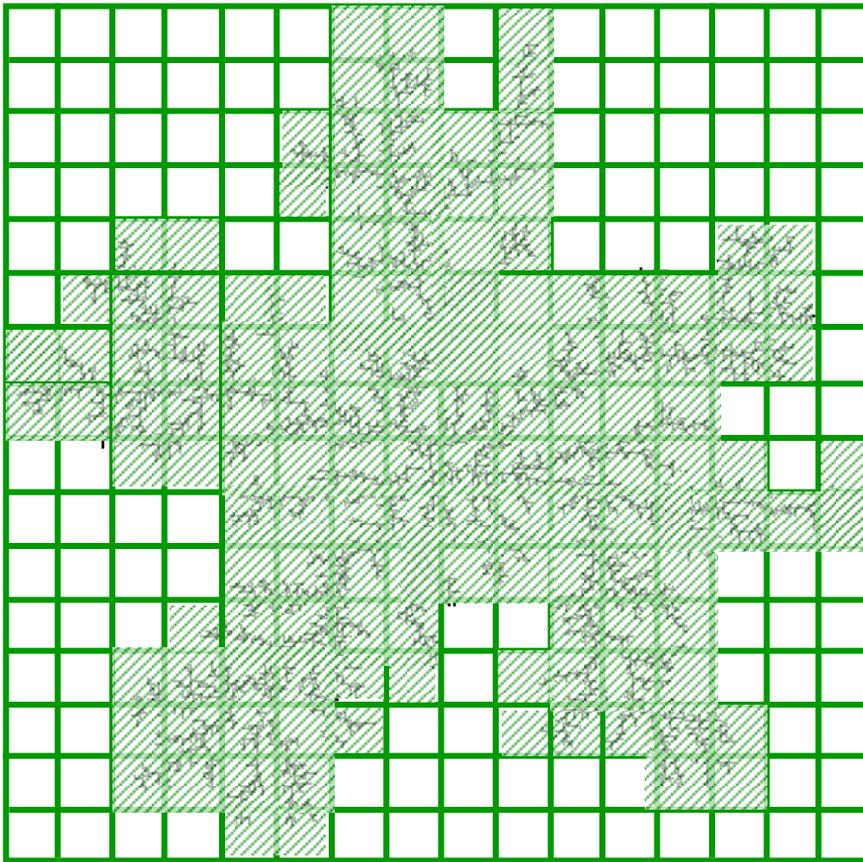


$\langle \epsilon \rangle$

- cobrir o objeto com caixas de tamanho ϵ
- conte o número de caixas não vazias
- repetir para outros valores de ϵ

Measuring fractal dimension

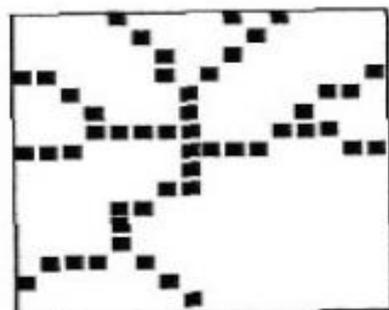
box-counting: resolution-dependent measurement



- cobrir o objeto com caixas de tamanho ϵ
- conte o número de caixas não vazias
- repetir para outros valores de ϵ
- **Grafique a função número de caixas em função de ϵ**
(no limite $\epsilon \rightarrow 0$)

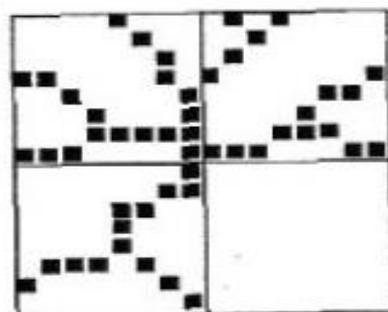
$r = \text{Box Size}$

$N(r) = \text{Number of Boxes Needed to Cover the Set}$



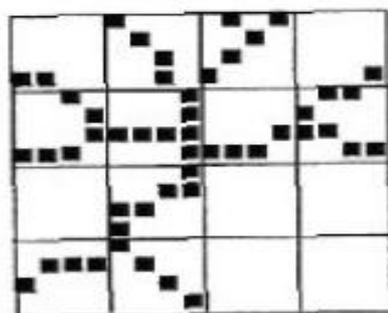
$r = 1$

$N = 1$



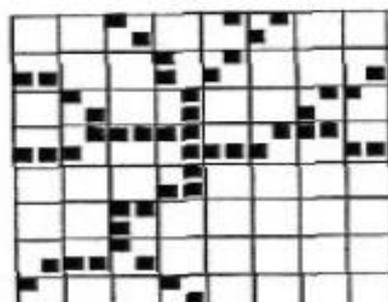
$r = 1/2$

$N = 3$



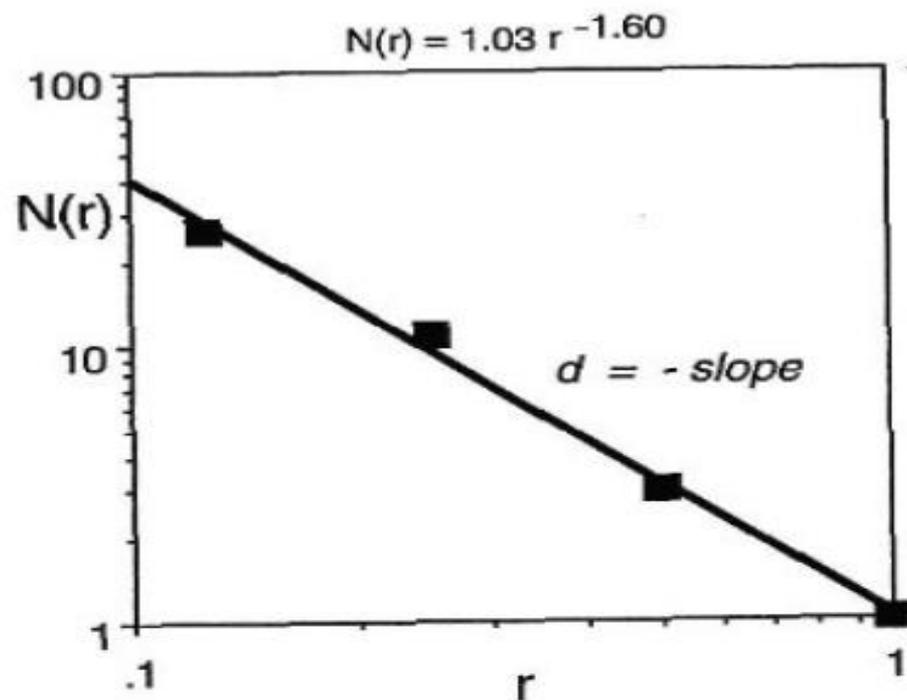
$r = 1/4$

$N = 11$



$r = 1/8$

$N = 26$



$$d = \frac{\Delta \text{Log } N(r)}{\Delta \text{Log } (1/r)}$$

$$= - \frac{\Delta \text{Log } N(r)}{\Delta \text{Log } (r)} = 1.60$$

Fast Box Counting Algorithms:

Liebovitch & Tóth 1989 Phys. Lett. A141:386-390.

Hou et al. 1990 Phys. Lett. A151:43-46.

Box Counting Method



Box Counting Method

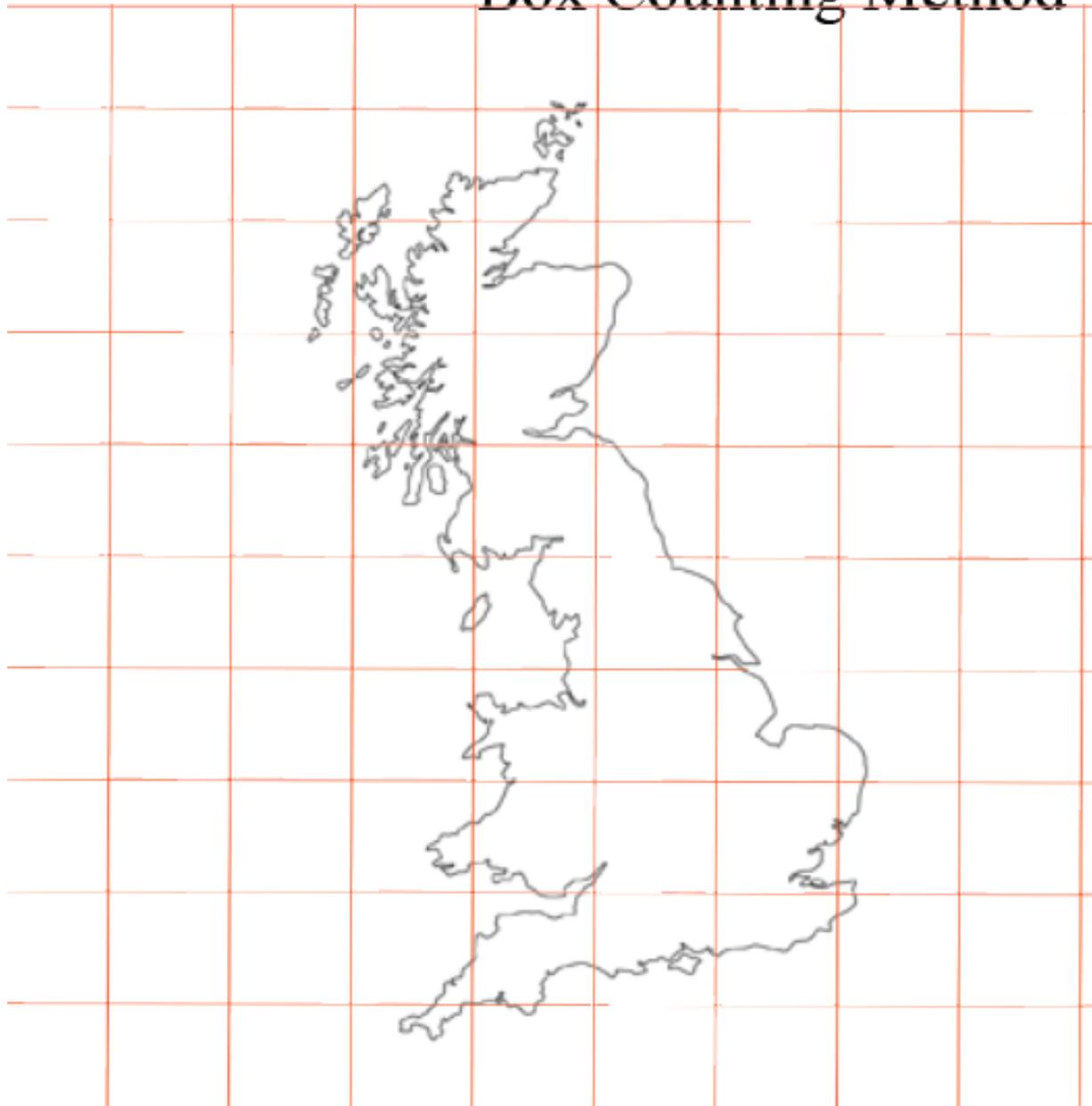


Number of boxes Length of side

36

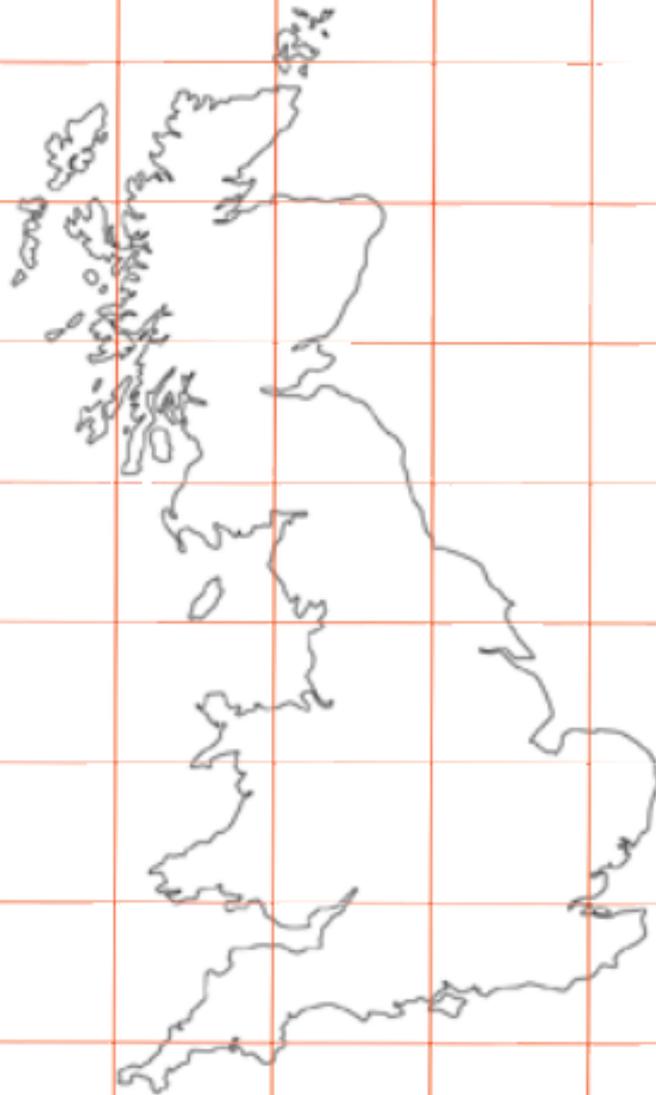
10

Box Counting Method



<u>Number of boxes</u>	<u>Length of side</u>
36	10
34	11

Box Counting Method



Number of boxes Length of side

36

10

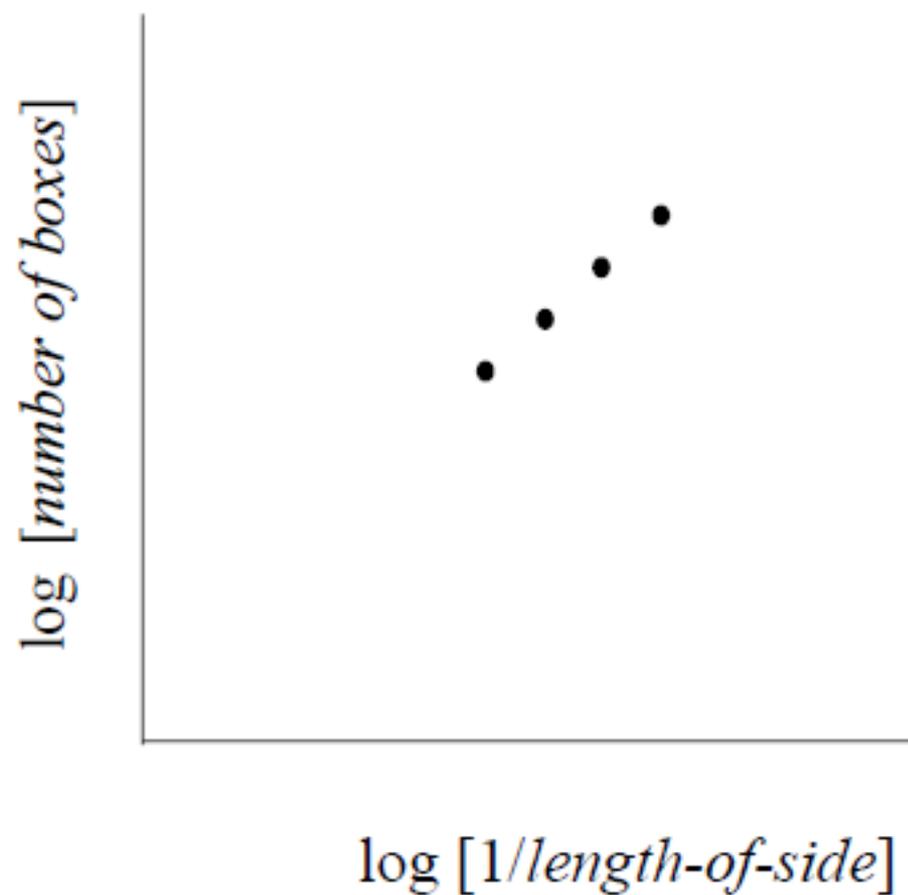
34

11

27

12

$$\log [\textit{number of boxes}] = D \log [1/\textit{box-size}]$$



Approximate fractal dimension of coastlines (Shelberg, Moellering, and Lam, 1982)



West Coast of Great Britain:
 $D \approx 1.25$



Coast of Australia:
 $D \approx 1.13$



Coast of South Africa:
 $D \approx 1.02$

Approximate dimension of Cauliflower



Fractal Structure of a White Cauliflower

Sang-Hoon Kim*

*Division of Liberal Arts, Mokpo National Maritime University, Mokpo 530-729 and
Institute for Condensed Matter Theory, Chonnam National University, Gwangju 500-757*

(Received 17 September 2004)

The fractal structure of a white cauliflower is analyzed by the box-counting method on its cross section in the horizontal direction. From the box-counting method, the vertical cross section of a cauliflower is discussed. We discuss the connection between the fractal structure of a cauliflower and the vertical cross section of a cauliflower. The vertical cross section has an angle of 67° in our model.

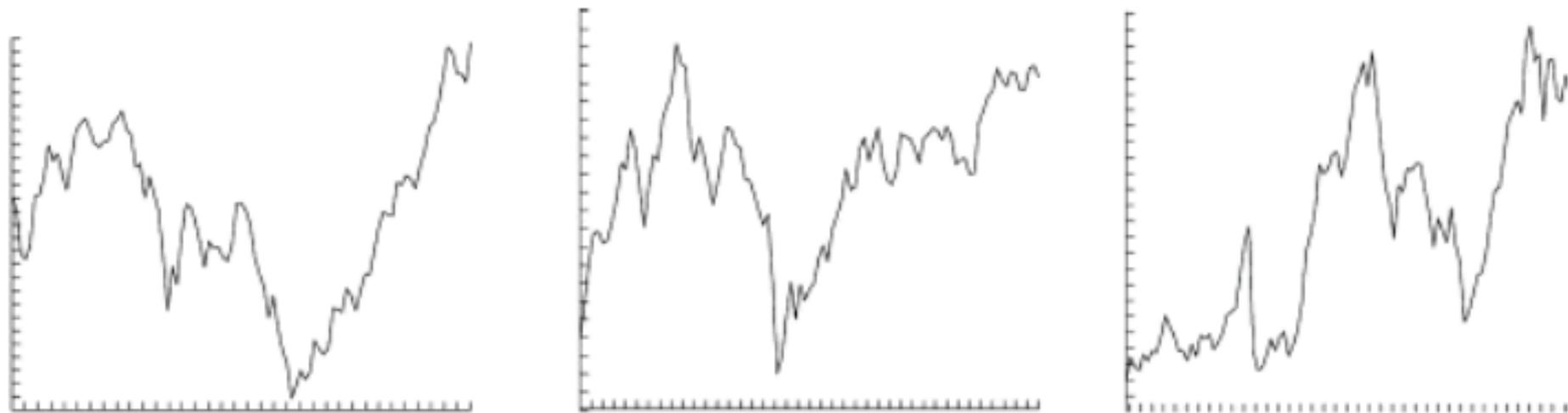
$$D \approx 2.8$$

the box-counting method on its cross section in the horizontal direction. From the box-counting method, the vertical cross section of a cauliflower is discussed. We discuss the connection between the fractal structure of a cauliflower and the vertical cross section of a cauliflower. The vertical cross section has an angle of 67° in our model.

Fractal dimension of stock prices

(J. A. Skjeltorp, Scaling in the Norwegian stock market, Physica A, 2000)

Oslo stock exchange general index



Question: Are stock prices following a “random walk”?

Project: Compare fractal dimension of stock prices with fractal dimension of “random walk”

Análise R/S

No exemplo do S & P 500 , tomei uma série com 15.821 retornos diários . Então, eu escolhi as seguintes faixas, todas as potências de dois :

Tamanho de cada intervalo	Número de pontos (n)
1	15.821
1/2	7.910
1/4	3.955
1/8	1.977
1/16	988
1/32	494

1. Calcule a média para cada faixa (intervalo)

$$mean_s = m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. Criar uma série de desvios para cada faixa

$$Y_t = X_t - m; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

3. Criar uma série que é o valor acumulado dos desvios da média .

$$y_j = \sum_{i=1}^j Y_i$$

4. Calcula-se a maior diferença na série dos desvios

$$R_t = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_t) - \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_t); \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

5. Calcular o desvio padrão para cada faixa

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (X_i - m)^2}; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

6. Calcule o intervalo redimensionados para cada faixa da série histórica

$$\text{rescaled range} = \left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{R_t}{\sigma_t}; \text{ for } t = 1, 2, \dots, n$$

6. Calcular a média dos valores da faixa escalonados para cada região para resumir cada intervalo.

Como exemplo, considere o intervalo $\frac{1}{4}$ com $n= 3.955$ neste caso partimos a série original em 4 partes, assim

Parte 1	83.04
Parte 2	63.51
Parte 3	84.16
Parte 4	88.09
Valor médio=	79.70

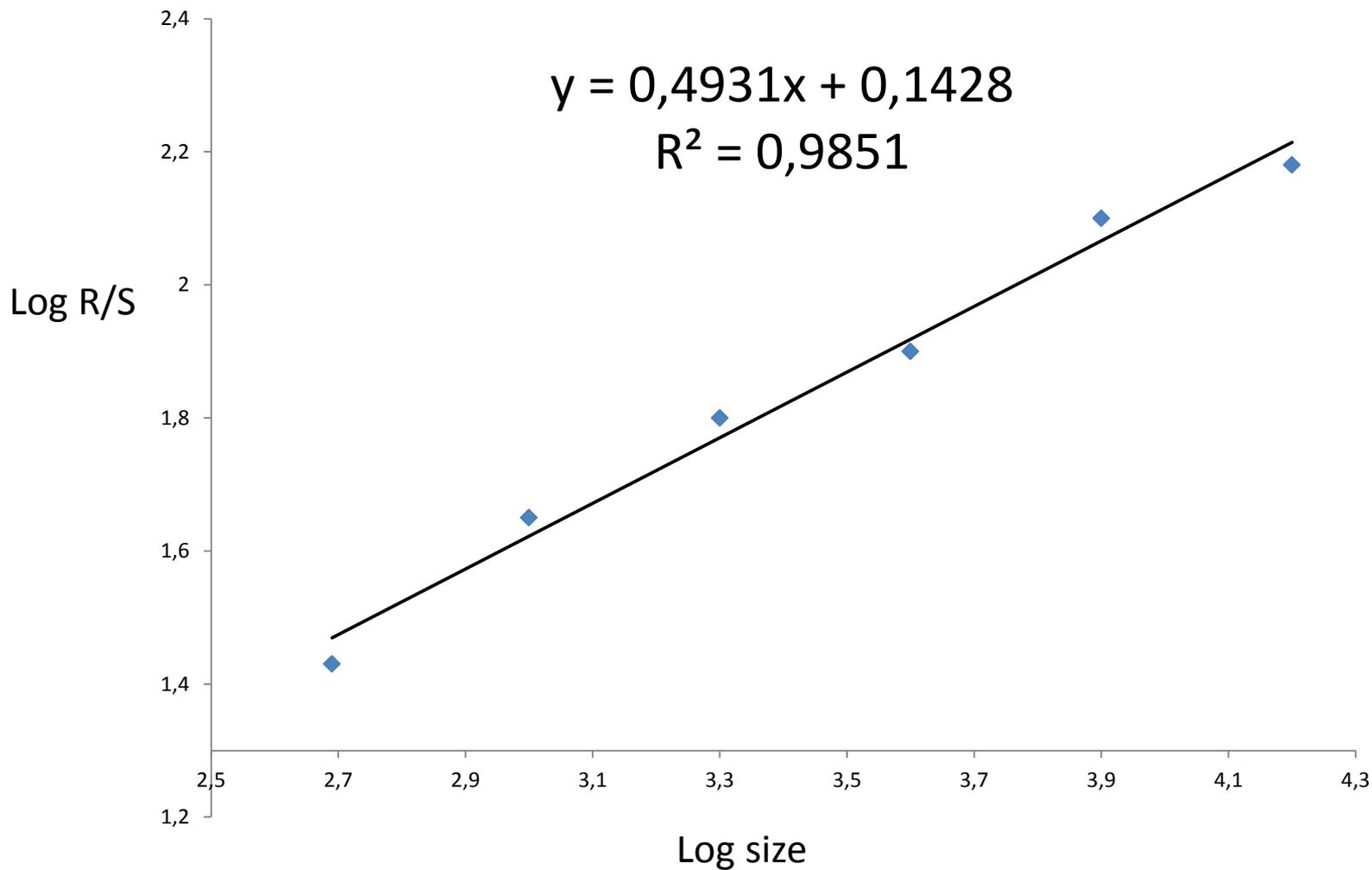
Temos os seguintes valores para os intervalos escalonados :

Number of Ranges in Region	Average Data Points in Each Range of Region	<i>R/S</i>
1	15,821	151.77
2	7,911	126.52
4	3,955	79.70
8	1,978	63.36
16	989	44.96
32	495	27.15

Calcular os logarítmicos para o tamanho de cada região e para o intervalo escalonado de cada região

Log Size (x)	Log R/S (y)
4.20	2.18
3.90	2.10
3.60	1.90
3.30	1.80
3.00	1.65
2.69	1.43

Plot the logarithm of the size (x axis) of each series versus the logarithm of the rescaled range (y axis)



forma, o interesse estará em determinar o expoente H na relação:

$$(R/S)_s \sim s^H. \quad (4.9)$$

O parâmetro H , chamado de Expoente de Hurst, representa as propriedades de correlação da série temporal, da seguinte maneira:

- Se $H = 0.5$, não existem correlações de longo alcance presentes na série.
- Se $0 < H < 0.5$, a série é antipersistente e possui autocorrelações negativas.
- Se $0.5 < H < 1$, a série é persistente e possui autocorrelações positivas.

O Expoente de Hurst está diretamente relacionado à Dimensão Fractal D_f , que é a medida da rugosidade do sistema considerado. A relação é dada pela Equação 4.10:

$$D_f = 2 - H. \quad (4.10)$$

Quanto menor o expoente H , maior o valor de D_f , indicando maior rugosidade.

Detrended Fluctuation Analysis - DFA

$$r(t) = \{r(1), \dots, r(L)\}$$

No segundo passo, deve-se calcular a série integrada $Y(i)$:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i \{r(k) - \bar{r}\},$$

onde \bar{r} é a média da série de retornos e $i = \{1, \dots, L\}$. Não é

O quarto passo consiste em calcular, para cada segmento v , a *Função de Flutuação* ou Variância:

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v^m(i)\}^2, \quad (4.14)$$

com $y_v^m(i)$ representando o ajuste polinomial de ordem m (tendência local) em cada segmento v . Pode-se utilizar polinômios de ordem $m = 1, 2, 3, \dots$, obtendo respectivamente

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N [\{F^2(s, v)\}^{q/2}] \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.17)$$

onde a variável q pode assumir qualquer valor real exceto zero. O valor de $F_q(s)$ não pode ser determinado diretamente quando $q = 0$, por causa do expoente divergente da Equação

$F_q(s)$ deve seguir uma lei de potência:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}.$$

Para séries temporais estacionárias, $h(2)$ é idêntico ao Expoente de Hurst H . Então, $h(q)$ é chamada de Expoente de Hurst Generalizado [11].

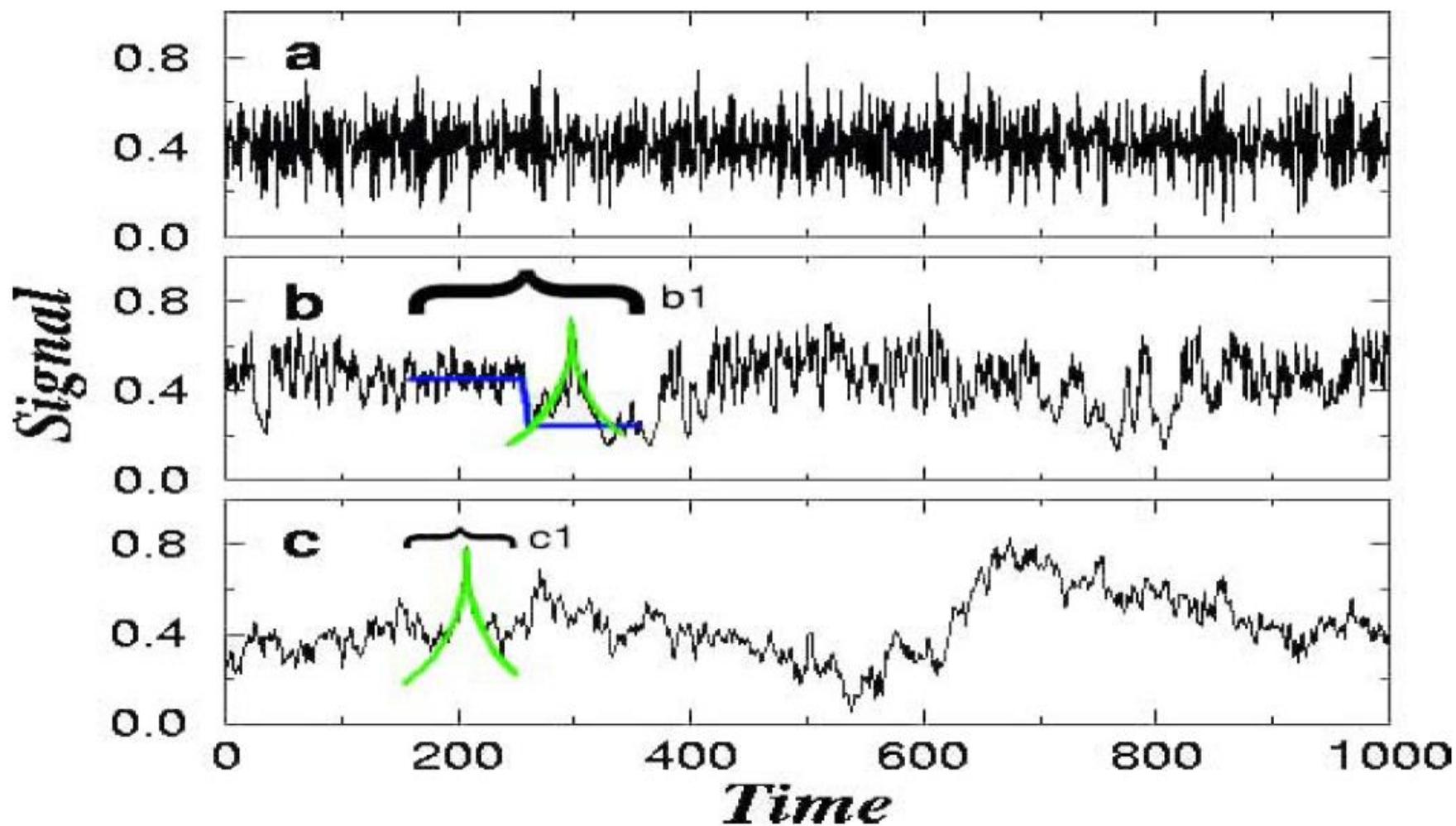
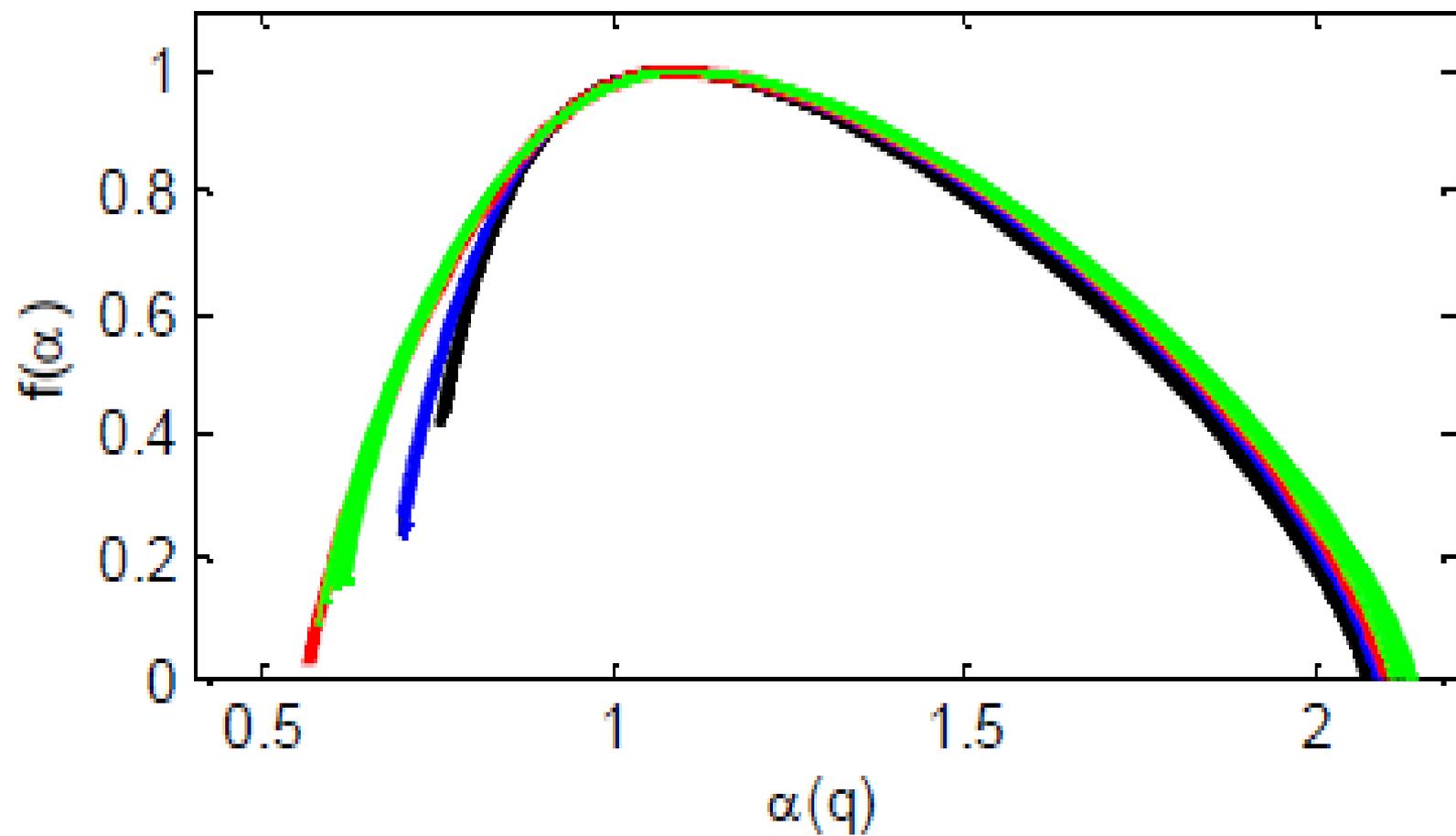


Figura 4.2: Característica fractal presente em séries reais e simuladas

Espectro Multifractal

(d)



O QUE SÃO FRACTAIS?

1 – Fractais são conjuntos auto-similares: ampliações sucessivas do conjunto reproduzem exatamente o mesmo conjunto.

2 – Para o conjunto de Mandelbrot, os fractais são conjuntos quase auto-similares: ampliações sucessivas são parecidas com o conjunto inicial, mas não idênticas. O importante é que cada ampliação revele novas estruturas.

Característica importante: conjuntos fractais tem dimensão fracionaria!

Books About Fractals

classic

B. B. Mandelbrot

The Fractal Geometry of Nature 1983 W. H. Freeman

mathematics

G. A. Edgar

Measure, Topology, and Fractal Geometry

1990 Springer-Verlag

M. Barnsley

Fractals Everywhere 1988 Academic Press

physics & chemistry

J. Feder

Fractals 1988 Plenum

D. Avnir

The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry

1989 John Wiley & Sons

biomedical

J. Bassingthwaite, L. Liebovitch, & B. West

Fractal Physiology 1994 Oxford Univ. Press

P. M. Iannaccone & M. Khokha

Fractal Geometry in Biological Systems 1996 CRC Press

BIBLIOGRAFIA

- **Nível introdutório:**
 - *Caos – fazendo uma nova ciência* – James Gleick
 - *Acaso e caos* – David Ruelle
 - *Caos e Complexidade* – Moises Nussenzveig
- **Nível intermediário:**
 - *Caos – uma introdução* – N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. de Prado
 - *Chaos in dynamical systems* - Edward Ott
- **Nível avançado:**
 - *An introduction to chaotic dynamical systems* – R.L. Devaney

Cubo em 4 dimensão projetado em 3D : Tesseract

