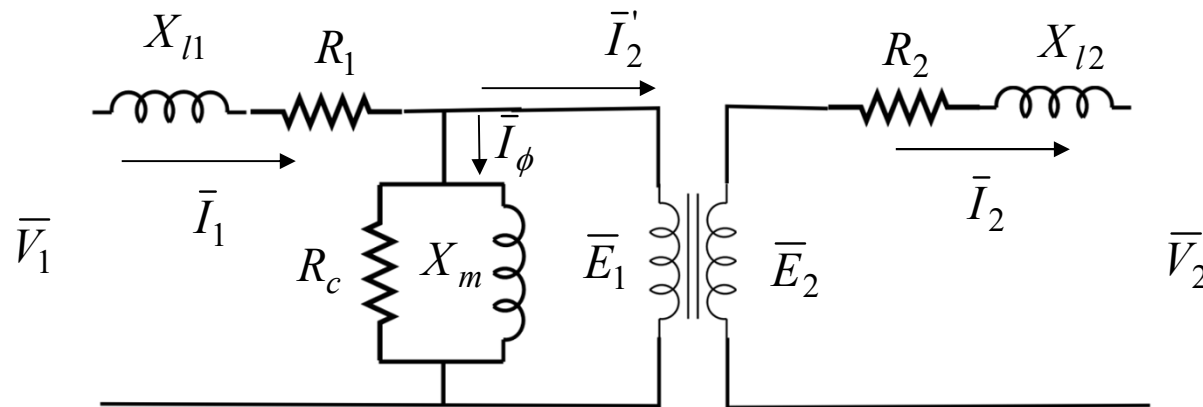


SEL 404 – ELETRICIDADE II

Aula 07

Revisão

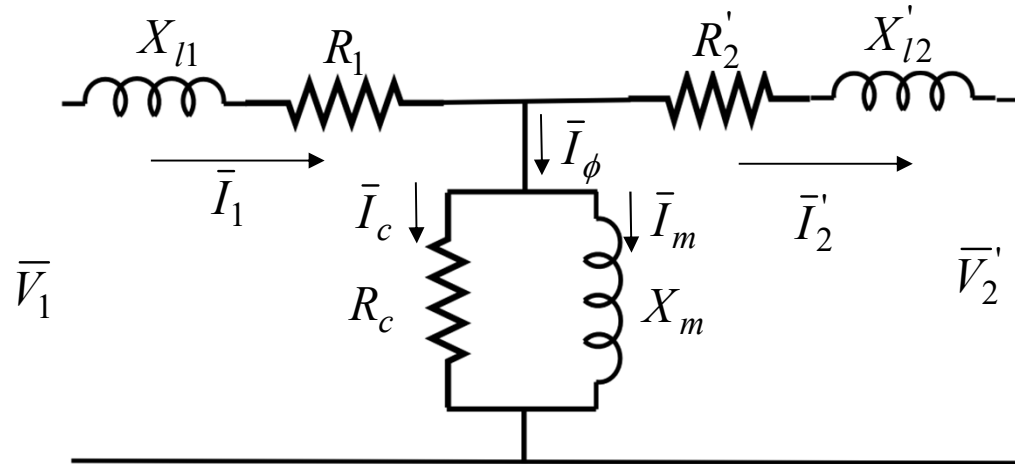


Circuito equivalente de um transformador de dois enrolamentos

Tópicos da Aula de Hoje

- Transformadores
 - ✓ Obtenção dos parâmetros do circuito equivalente
 - ✓ Rendimento
 - ✓ Transformadores Trifásicos

Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

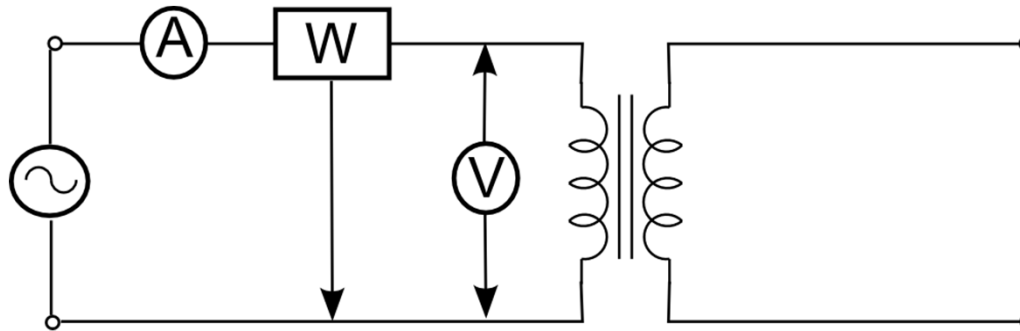


Os parâmetros do circuito equivalente podem ser determinados por meio de dois testes:

- **Teste em vazio** ou **em circuito aberto**
- **Teste em curto-circuito.**

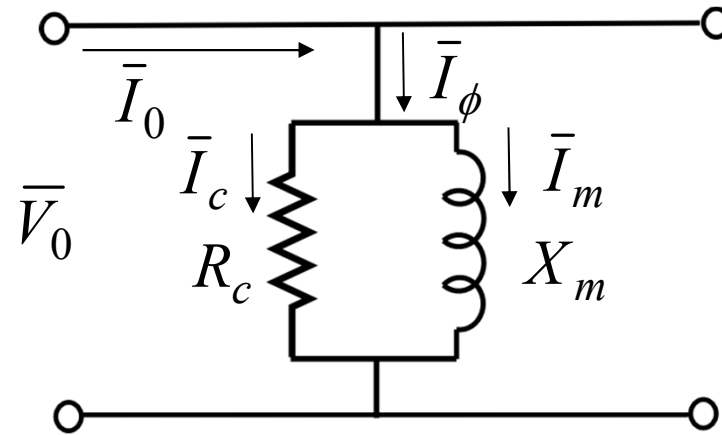
Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

Teste em vazio ou circuito aberto:



- No teste em vazio, o secundário do transformador é deixado em aberto e tensão nominal a frequência nominal é aplicada no primário.
- Usualmente, o lado de baixa tensão é utilizado como primário no teste em vazio (menor valor de tensão nominal).
- Então, mede-se a tensão, a corrente e a potência ativa nos terminais do primário.
- Neste caso, a corrente do primário é composta somente pela corrente de excitação, cujo valor é pequeno, portanto, a queda de tensão na impedância série do primário pode ser desprezada, levando ao seguinte circuito equivalente:

Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

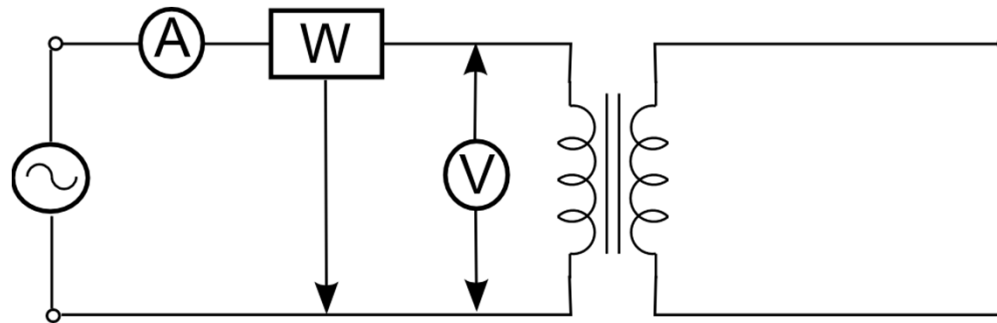


Portanto, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_c = \frac{V_0^2}{P_0} \\ I_c = \frac{V_0}{R_c} \\ I_m = \sqrt{I_0^2 - I_c^2} \\ X_m = \frac{V_0}{I_m} \end{array} \right.$$

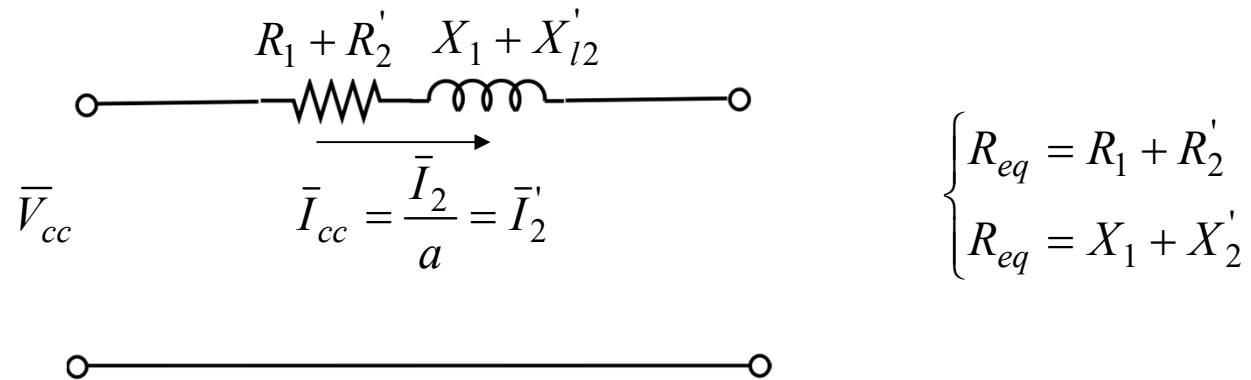
Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

Teste de curto-circuito:



- No teste de curto-circuito, o secundário é curto-circuitado e a tensão aplicada ao primário é gradualmente aumentada até se obter corrente nominal no primário.
- Usualmente, o lado de baixa tensão é curto-circuitado neste teste, pois o lado de alta tensão possui menor valor de corrente nominal.
- Então, mede-se a tensão, a corrente e a potência ativa nos terminais do primário.
- Visto que a tensão aplicada ao primário é bastante reduzida, a corrente de magnetização é também bem reduzida quando comparada com a corrente de carga e, por conseguinte, o ramo de excitação pode ser desprezado, levando ao seguinte circuito equivalente:

Determinação dos parâmetros do circuito equivalente



Portanto, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{eq} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} \\ Z_{eq} = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} \\ X_{eq} = \sqrt{Z_{eq}^2 - R_{eq}^2} \end{array} \right.$$

Caso seja necessário determinar R_1 , R_2 , X_1 e X_2 , o seguinte procedimento é utilizado. Considera-se que em um transformador bem projetado as perdas ôhmicas e a dispersão sejam iguais nos enrolamentos do primário e do secundário. Assim, temos:

Determinação dos parâmetros do circuito equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{X_{eq}}{2} \\ X_2 = \frac{X_{eq}}{2a^2} \\ R_1 = \frac{R_{eq}}{2} \\ R_2 = \frac{R_{eq}}{2a^2} \end{array} \right.$$

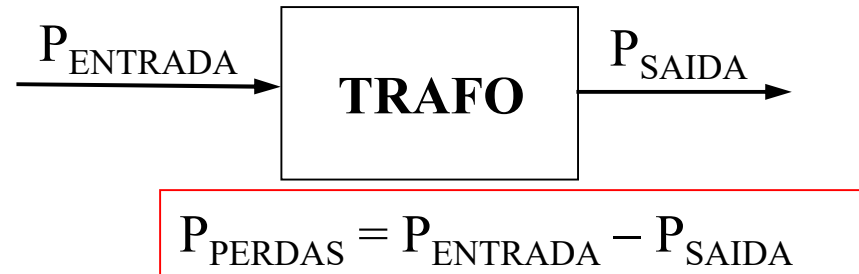
Rendimento

- Os transformadores são projetados para operarem com alto rendimento.
- Os seguintes aspectos contribuem para que os transformadores apresentem valores baixos de perdas:
 - ✓ O transformador é uma máquina estática, ou seja, não tem partes rotativas, não apresentando, portanto, perdas por atrito no eixo e por resistência do ar no entreferro.
 - ✓ O núcleo é constituído por placas laminadas e dopadas de materiais de alta resistência elétrica, as quais têm o objetivo de minimizar as perdas por correntes parasitas.
 - ✓ Materiais com alta permeabilidade magnética são utilizados para diminuir as perdas por histerese.
 - ✓ Transformadores de alta potência apresentam rendimento maior que 99 %.

Rendimento

O rendimento de um transformador pode ser definido por:

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{P_{SAIDA}}{P_{SAIDA} + P_{PERDAS}}$$



As perdas no transformador incluem:

- ✓ Perdas no núcleo (ferro): P_C (perdas por correntes parasitas e perdas por histerese)
- ✓ Perdas no cobre: P_{cu} (perdas ôhmicas)

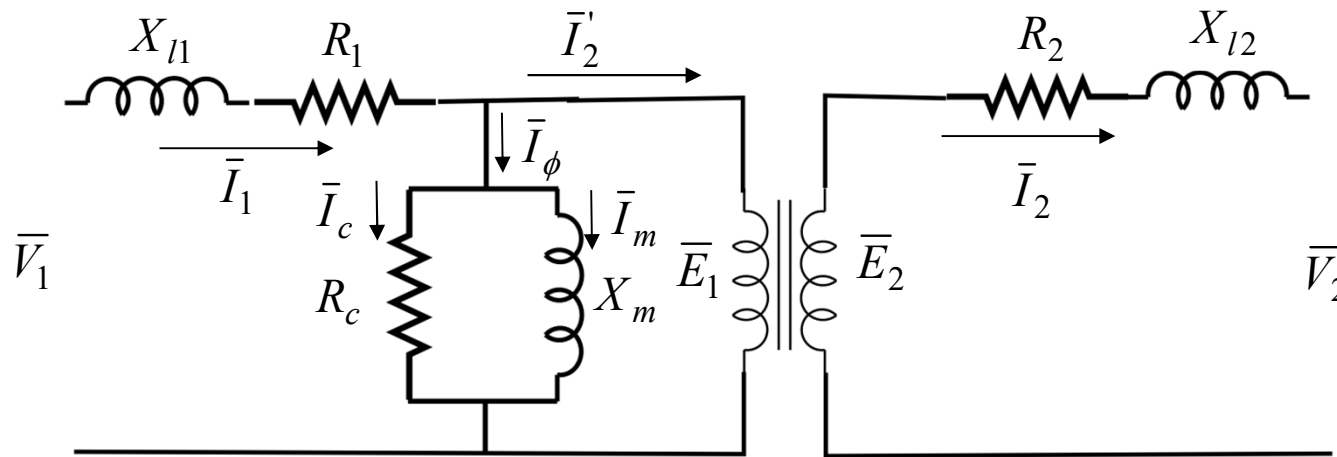
Portanto:

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{P_{SAIDA}}{P_{SAIDA} + P_C + P_{Cu}}$$

Como determinar essas perdas?

Rendimento – Perdas no Cobre

As perdas no cobre podem ser determinadas se os parâmetros do transformador forem conhecidos (corrente nos enrolamentos e resistência dos enrolamentos).



$$P_{Cu} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_{eq,1} = I_2^2 R_{eq,2}$$

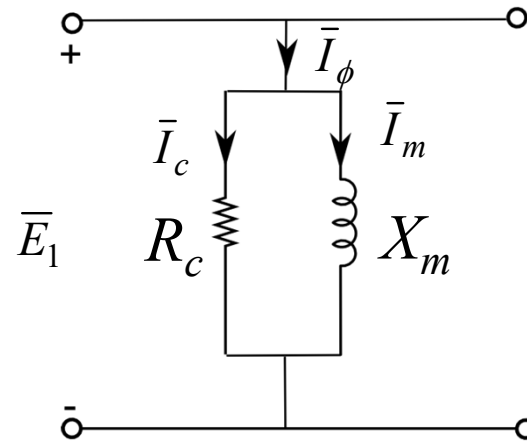
$R_{eq,1}$ = resistência equivalente dos enrolamentos referida ao primário

$R_{eq,2}$ = resistência equivalente dos enrolamentos referida ao secundário

As perdas no cobre são, portanto, proporcionais ao quadrado da corrente de carga.

Rendimento – Perdas no Ferro (Núcleo)

As perdas no núcleo podem ser determinadas pelo teste em vazio, ou a partir dos parâmetros do circuito equivalente.



$$P_C = R_C I_C^2 = R_C \left(\frac{E_1}{R_C} \right)^2 = \frac{E_1^2}{R_C}$$

As perdas no núcleo são, portanto, proporcionais ao quadrado da tensão aplicada.

Rendimento – Potência de Saída

A potência de saída do transformador pode ser obtida por:

$$P_{SAIDA} = V_2 I_2 \cos \theta_2$$

onde, V_2 e I_2 representam a tensão e corrente na saída (carga) do transformador, respectivamente. E o ângulo θ_2 representa a defasagem angular entre os fasores V_2 e I_2 , ou seja θ_2 é o ângulo da carga.

Finalmente, a partir da obtenção dos valores de perdas no núcleo e no cobre, o rendimento do transformador em estudo pode ser obtido, para qualquer condição de operação por:

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{V_2 I_2 \cos \theta_2}{V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{E_1^2}{R_C} + I_2^2 R_{eq,2}}$$

➤ Considerando que a tensão na carga é mantida constante e que as perdas no núcleo praticamente não variam com o carregamento, pode-se concluir que o rendimento depende da corrente exigida pela carga (I_2) e do fator de potência da carga ($\cos \theta_2$)

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{V_2 I_2 \cos \theta_2}{V_2 I_2 \cos \theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2}}$$

Condições para Rendimento Máximo

Considerando a tensão na carga (V_2) e o fator de potência ($\cos\theta_2$) constantes, e avaliando somente a variação da corrente de carga (I_2), tem-se que o rendimento máximo ocorre para:

$$\frac{d\eta}{dI_2} = 0$$

Lembrando que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Temos que:

$$\frac{d\eta}{dI_2} = \frac{V_2 \cos\theta_2 (V_2 I_2 \cos\theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2}) - V_2 I_2 \cos\theta_2 (V_2 \cos\theta_2 + 2I_2 R_{eq,2})}{(V_2 I_2 \cos\theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2})^2} = 0$$

Condições para Rendimento Máximo

Logo, temos que:

$$V_2 I_2 \cos \theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2} = V_2 I_2 \cos \theta_2 + 2I_2^2 R_{eq,2}$$

E, finalmente, isolando P_C :

$$P_C = I_2^2 R_{eq,2} = P_{Cu}$$

Do resultado acima, pode-se concluir que o rendimento máximo ocorre quando as **perdas no núcleo se igualam às perdas no cobre.**

Condições para Rendimento Máximo

Considerando agora somente a variação do ângulo θ_2 , tem-se que o rendimento máximo ocorre para:

$$\frac{d\eta}{d\theta_2} = 0$$

Temos que:

$$\frac{d\eta}{d\theta_2} = \frac{-V_2 I_2 \operatorname{sen} \theta_2 (V_2 I_2 \cos \theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2}) - V_2 I_2 \cos \theta_2 (-V_2 I_2 \operatorname{sen} \theta_2)}{(V_2 I_2 \cos \theta_2 + P_C + I_2^2 R_{eq,2})^2} = 0$$

Simplificando a expressão acima, obtém-se:

$$V_2 I_2 (P_C + I_2^2 R_{eq,2}) \operatorname{sen} \theta_2 = 0$$

Para que a equação acima seja válida:

$$\operatorname{sen} \theta_2 = 0$$

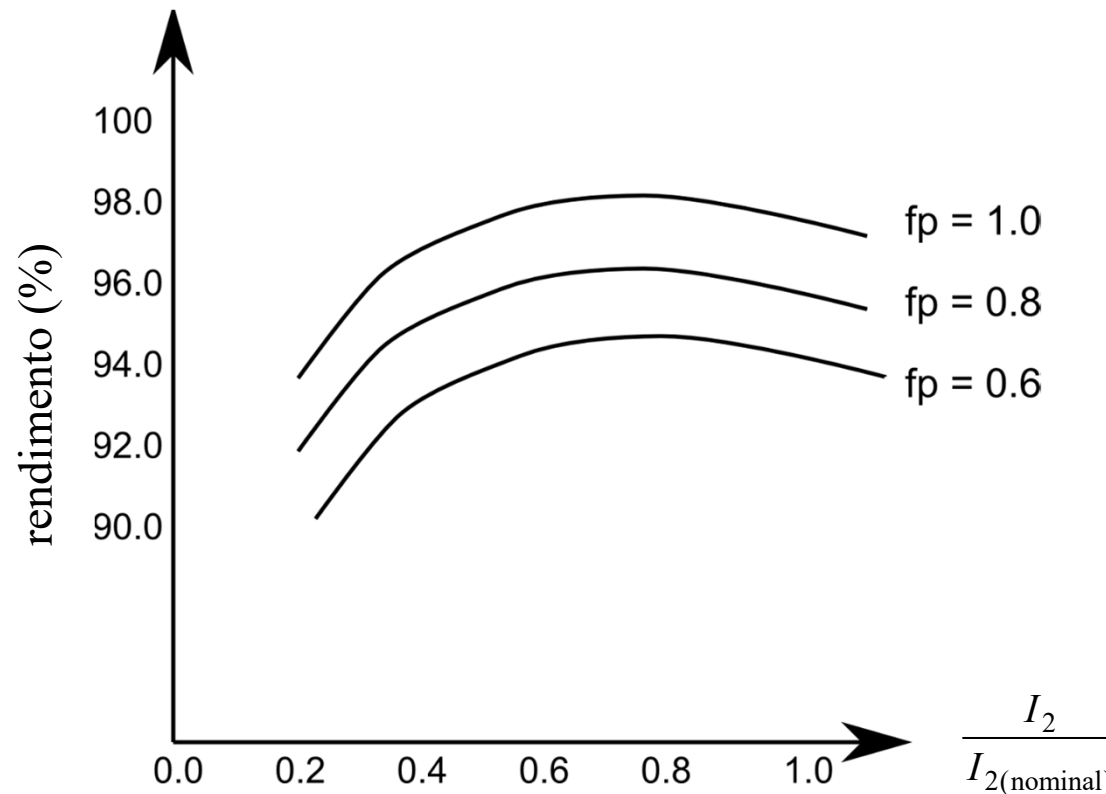
ou

$$\theta_2 = 0 \Rightarrow \cos \theta_2 = 1 \text{ (fator de potência unitário)}$$

Portanto, o rendimento máximo ocorre para quando o **fator de potência da carga** ($\cos \theta_2$) é unitário.

Rendimento

Usualmente, emprega-se um gráfico que representa a variação do rendimento com a corrente de carga e o fator de potência da carga.



O transformador pode ser projetado para apresentar rendimento máximo para corrente no secundário (I_2) próxima da nominal.

Rendimento Diário

Transformadores utilizados para atender as cargas do secundário em sistemas de distribuição usualmente atendem uma carga bastante variável. Neste caso, uma figura de mérito importante é o rendimento diário (ou rendimento energético). O qual pode ser calculado por:

$$\eta_D = \frac{\text{energia de saída em 24 horas}}{\text{energia de entrada em 24 horas}} = \frac{\text{energia de saída em 24 horas}}{\text{energia de saída em 24 horas} + \text{perdas em 24 horas}}$$

Exemplo 1

A partir de testes realizados em um transformador monofásico de 10 kVA, 2200/220 V, 60 Hz, os seguintes resultados são obtidos:

	teste em vazio	teste de curto-circuito
Voltímetro:	220 V	150 V
Amperímetro:	2,5 A	4,55 A
Wattímetro:	100 W	215 W

(a) calcule os parâmetros dos circuito equivalente referidos ao lado de baixa e alta tensão.

(b) expresse a corrente de excitação em termos da corrente nominal.

Exemplo 1

(a) O **teste em vazio** foi realizado aplicando-se tensão nominal ao lado de baixa tensão. Assim, temos:

- Perdas no núcleo:

$$P_0 = \frac{V_0^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{V_0^2}{P_0} = \frac{220^2}{100} = 484 \quad \Omega$$

- Corrente de perdas:

$$I_c = \frac{V_0}{R_c} = \frac{220}{484} = 0,45 \quad \text{A}$$

- Corrente de magnetização:

$$I_\phi = I_0 = 2,5 \quad \text{A}$$

$$I_m = \sqrt{I_\phi^2 - I_c^2} = \sqrt{2,5^2 - 0,45^2} = 2,46 \quad \text{A}$$

- Reatância de magnetização:

$$X_m = \frac{V_0}{I_m} = \frac{220}{2,46} = 89,4 \quad \Omega$$

Exemplo 1

Referido ao lado de baixa:

$$R_c = 484 \, \Omega \text{ e } X_m = 89,4 \, \Omega$$

Referido ao lado de alta ($a = V_H/V_L = 2200/220 = 10$):

$$R_c = 48.400 \, \Omega \text{ e } X_m = 8.940 \, \Omega$$

O **teste de curto-circuito** foi realizado aplicando-se tensão no lado de alta tensão até obter corrente nominal ($10 \text{ kVA}/2,2 \text{ kV} = 4,55 \text{ A}$). Assim, temos:

$$P_{cc} = R_{eq} I_{cc}^2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} = \frac{215}{4,55^2} = 10,4 \, \Omega$$

$$Z_{eq} = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} = \frac{150}{4,55} = 32,97 \, \Omega$$

$$X_{eq} = \sqrt{Z_{eq}^2 - R_{eq}^2} = \sqrt{32,97^2 - 10,4^2} = 31,3 \, \Omega$$

Referido ao lado de alta:

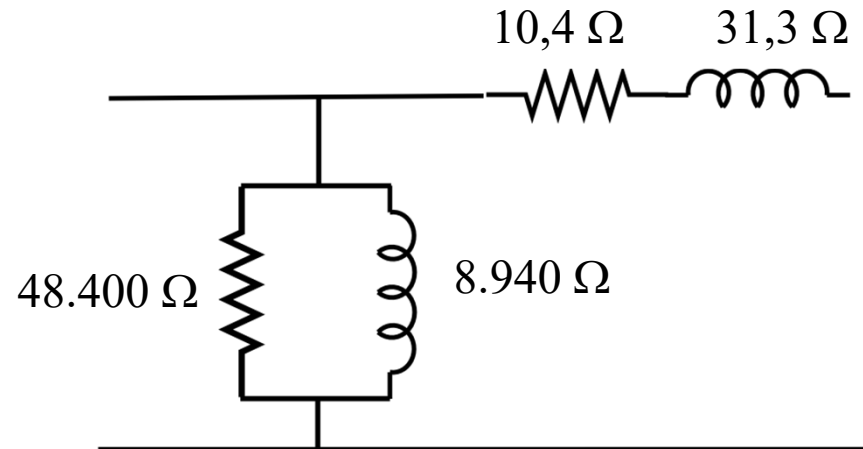
$$R_{eq} = 10,4 \, \Omega \text{ e } X_{eq} = 31,3 \, \Omega$$

Referido ao lado de baixa ($a = V_L/V_H = 220/2200 = 0,1$):

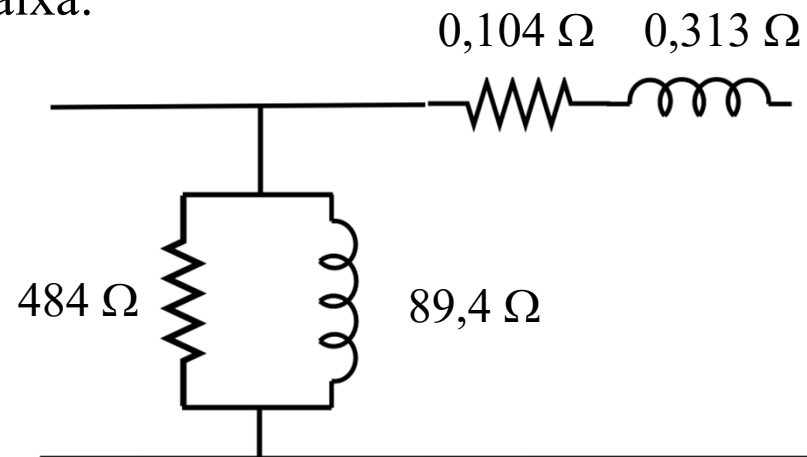
$$R_{eq} = 0,104 \, \Omega \text{ e } X_{eq} = 0,313 \, \Omega$$

Exemplo 1

Referido ao lado de alta:



Referido ao lado de baixa:



Exemplo 1

(b) expresse a corrente de excitação em termos da corrente nominal

No teste em vazio, a corrente medida é igual à corrente de excitação. Além disso, o teste é realizado do lado de baixa, assim, temos:

$$\frac{I_{\phi}}{I_n} = \frac{2,5}{(10.000 \text{ VA} / 220 \text{ V})} \times 100 = \frac{2,5}{45,5} \times 100 = 5,5\%$$

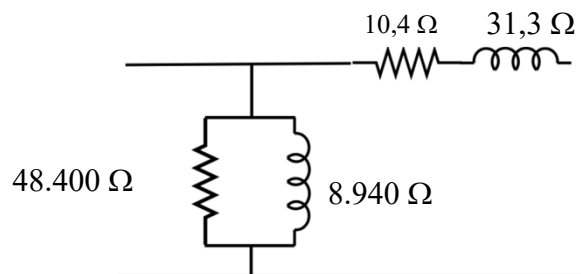
Exemplo 2

Para o transformador analisado anteriormente, determine:

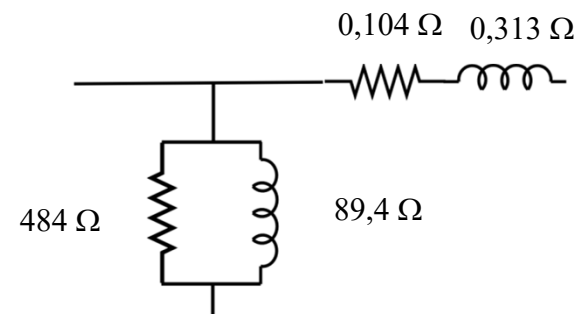
- o rendimento para carregamento de 75% da carga nominal e $fp = 0,6$ (fator de potência).
- A potência de saída para que o rendimento seja máximo e o valor do rendimento máximo. Para qual valor de porcentagem da carga nominal, o rendimento máximo ocorre?
- Qual o rendimento com carga nominal e fp unitário?

	teste em vazio	teste de curto-circuito
Voltímetro:	220 V	150 V
Amperímetro:	2,5 A	4,55 A
Wattímetro:	100 W	215 W

Referido ao lado de alta:



Referido ao lado de baixa:



Exemplo 2

(a)

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{P_{SAIDA}}{P_{SAIDA} + P_C + P_{Cu}}$$

(1) $S_N = 10000 \text{ VA}$ (potência nominal do transformador)

$\cos \theta = 0,6$ (fator de potência da carga)

$$P_{SAIDA} = 0,75 S_N \cos \theta = 0,75 \times 10000 \times 0,6 = 4500 \text{ W}$$

(2)

$P_C = 100 \text{ W}$ (perdas no núcleo do teste a vazio)

(3)

$$P_{Cu} = I_H^2 R_{eq} = (0,75 \times 4,55)^2 \times 10,4 = 121 \text{ W (calculado com parâmetros do lado de alta)}$$

Portanto:

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA}} = \frac{4500}{4500 + 100 + 121} \times 100\% = 95,32\%$$

Exemplo 2

(b) Sabemos que para rendimento máximo:

$$P_C = P_{Cu} = 100 \text{ W} \quad \text{e} \quad \text{fp} = 1,0$$

A partir da condição acima, a corrente de carga I_2 pode ser determinada:

$$P_{Cu} = I_2^2 R_{eq} = 100 \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{100}{0,104}} = 31 \text{ A}$$

Obs 1: $I_{\text{Nominal, Baixa}} = 45,5 \text{ A}$

Obs 2: Resistência R_{eq} do lado de baixa

Logo, a potência de saída pode ser obtida por:

$$P_{SAIDA}^{\eta \max} = V_2 I_2 \cos \theta_2 = 220 \times 31 \times 1 = 6820 \text{ W}$$

E o valor do rendimento máximo é :

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA} + P_C + P_{Cu}} = \frac{6820}{6820 + 100 + 100} \times 100\% = 97,15\%$$

Saída em kVA = 6,82

kVA nominal = 10

Portanto, o rendimento máximo η_{\max} ocorre para 68,2% do carregamento nominal

Exemplo 2

(c) Rendimento η para carga nominal e $\text{fp} = 1$:

$$I_H = 4,55 \text{ A}, R_{eq,H} = 10,4 \Omega \Rightarrow P_{Cu} = I_H^2 R_{eq,H} = 215,7 \text{ W}$$

para $\text{fp} = 1,0 \Rightarrow$ melhor caso

$$P_{SAIDA} = V_2 I_2 \cos \theta_2 = 220 \times 45,5 = 10000 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_{SAIDA}}{P_{ENTRADA} + P_C + P_{Cu}} = \frac{10000}{10000 + 100 + 215,7} \times 100\% = 96,94\%$$

Transformadores trifásicos

Os transformadores trifásicos podem ser construídos de duas maneiras:

- (a) banco trifásico (composto por 3 transformadores monofásicos)
- (b) núcleo trifásico (composto por um único núcleo – mononuclear)

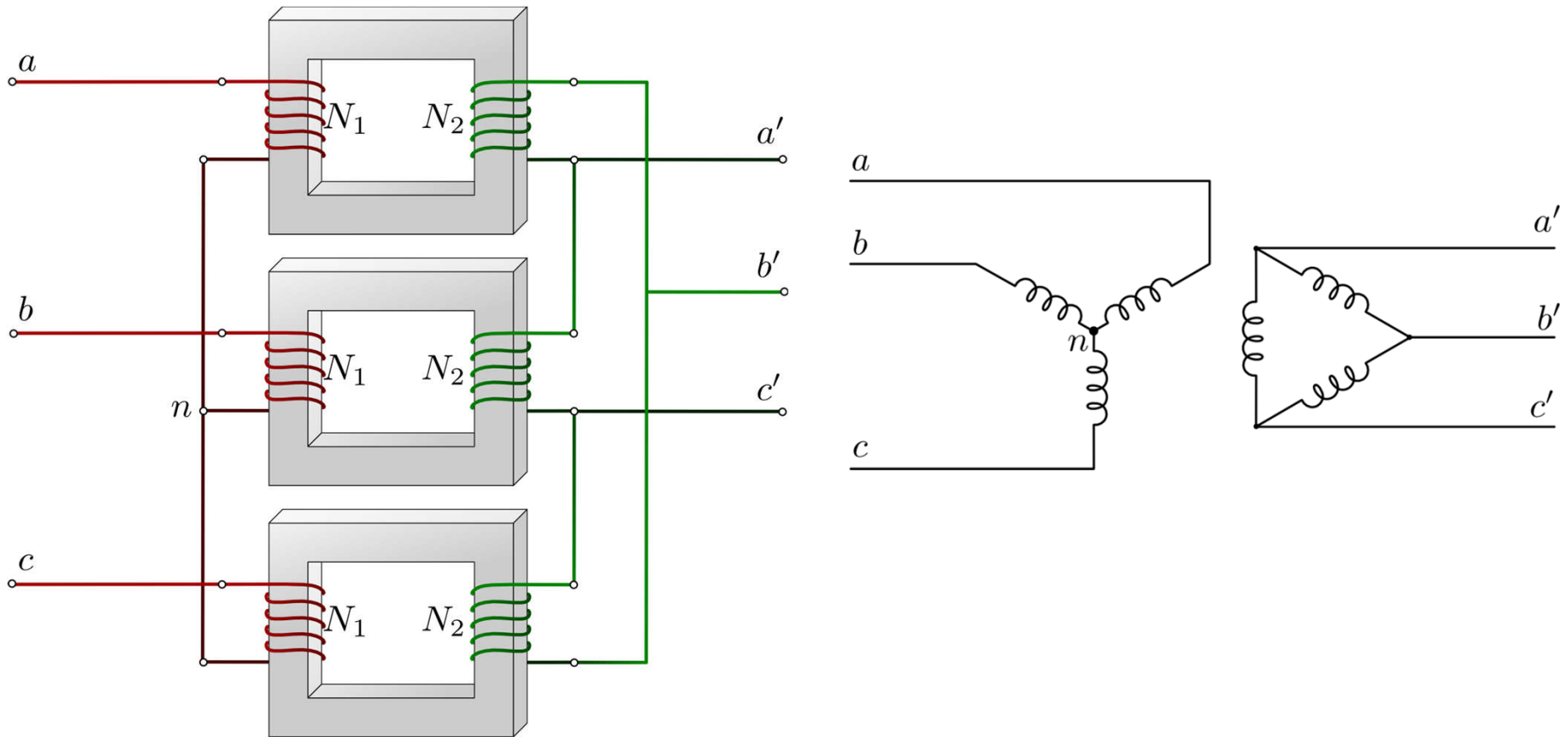
Um transformador trifásico é constituído de pelo menos três enrolamentos no primário e três enrolamentos no secundário, os quais (como qualquer componente trifásico) podem ser conectado em Estrela (Y) ou Delta (Δ). Por conseguinte, temos quatro possibilidades de ligação (conexão):

Primário	Secundário
Y	Y
Y	Δ
Δ	Y
Δ	Δ

Cada conexão possui determinadas características que determinam o uso mais adequado conforme a aplicação.

Transformadores trifásicos

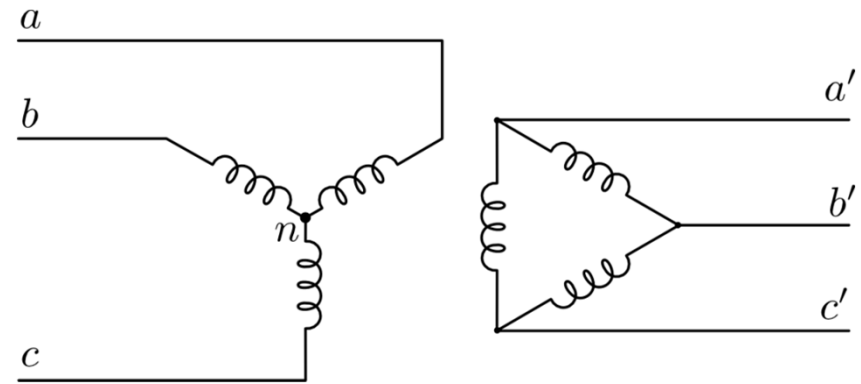
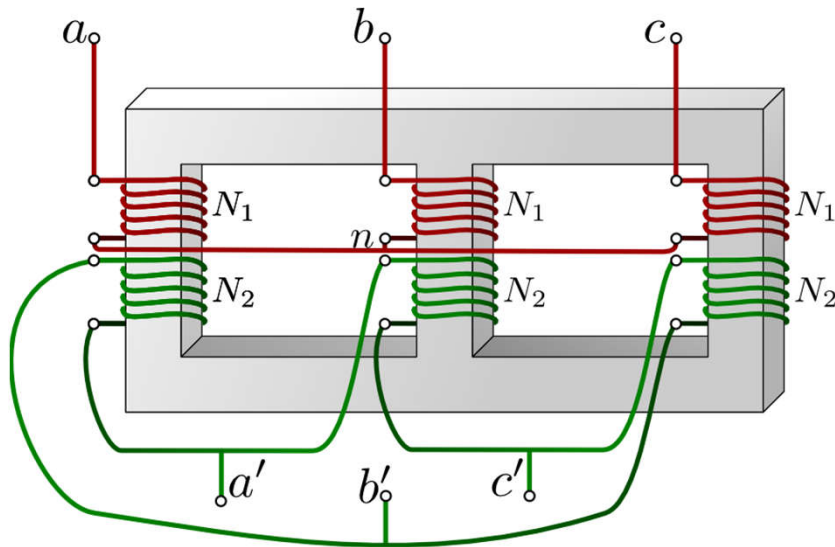
Exemplo de conexão Y- Δ



Vantagem: a conexão em banco trifásico facilita a manutenção e substituição dos transformadores.

Transformadores trifásicos

Exemplo de conexão Y- Δ



Vantagem: esta forma de ligação resulta em transformadores menores e mais baratos devido à necessidade de menos material ferromagnético, porém com menor flexibilidade de manutenção.

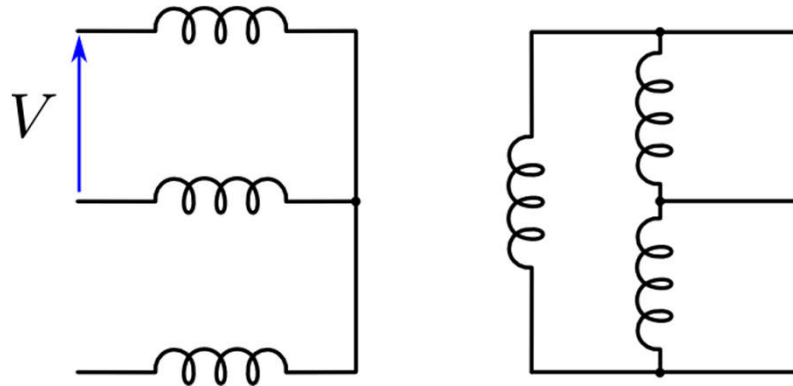
Transformadores trifásicos

Relação de transformação:

Em transformadores trifásicos, a **relação de transformação** é definida pela relação entre a tensão de linha do primário e a tensão de linha do secundário.

Portanto, dependendo da ligação, a relação de transformação pode ser diferente da relação de espiras, como será visto a seguir.

Conexão Y- Δ :



Se a tensão de linha no lado Y é V , qual a tensão de linha do lado Δ ?

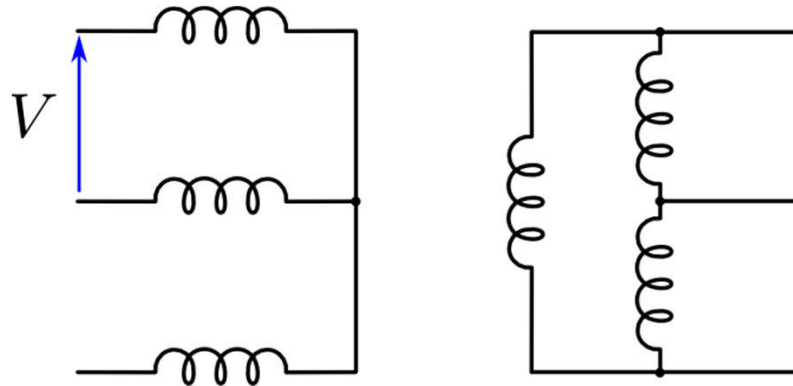
Transformadores trifásicos

Relação de transformação:

Em transformadores trifásicos, a **relação de transformação** é definida pela relação entre a tensão de linha do primário e a tensão de linha do secundário.

Portanto, dependendo da ligação, a relação de transformação pode ser diferente da relação de espiras, como será visto a seguir.

Conexão Y- Δ :



Se a tensão de linha no lado Y é V , qual a tensão de linha do lado Δ ?

Transformadores trifásicos

Definições:

Tensão de fase: tensão entre uma fase e o neutro.

Tensão de linha: tensão entre duas fases

Dadas as tensões de fases do lado Y:

$$V_{an} = V_f \cos(\omega t)$$

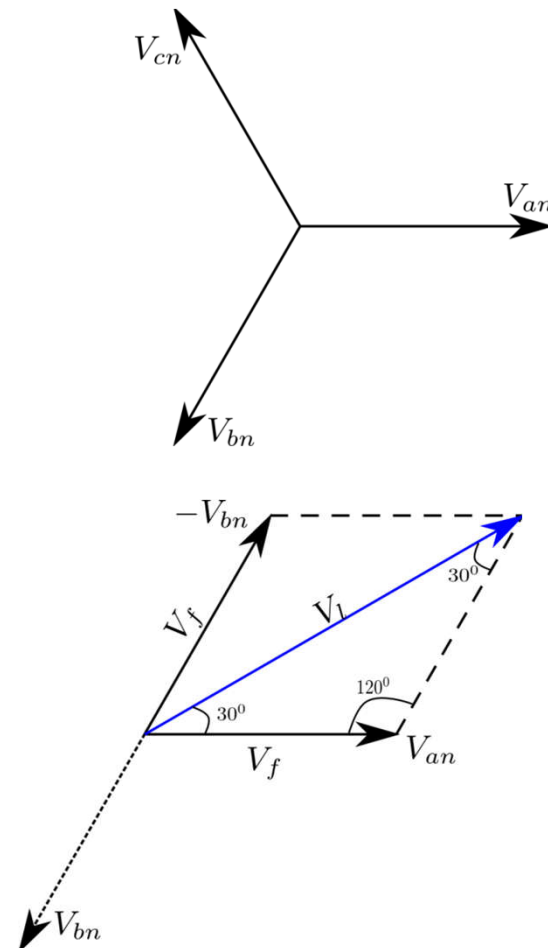
$$V_{bn} = V_f \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$V_{cn} = V_f \cos(\omega t + 120^\circ)$$

A tensão de linha é dada por:

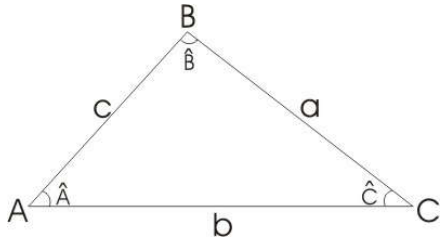
$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn}$$

Graficamente, temos:



Transformadores trifásicos

Lei dos cossenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

$$V_l^2 = V_f^2 + V_f^2 - 2 V_f \cdot V_f \cos(120^\circ)$$

$$V_l^2 = 2 V_f^2 - 2 V_f^2 (-1/2)$$

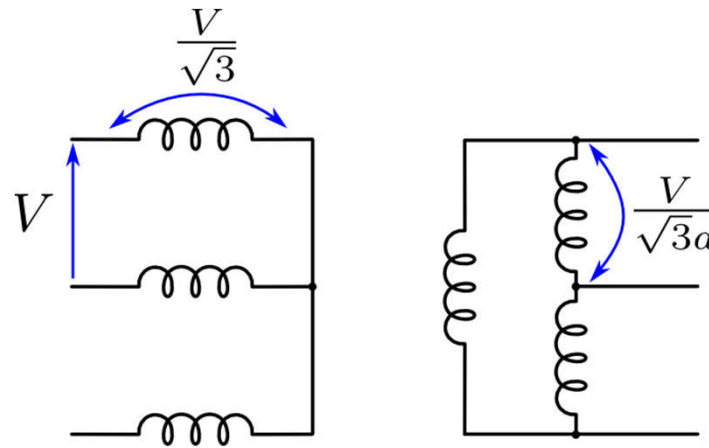
$$V_l^2 = 3 V_f^2$$

$$V_l = \sqrt{3} V_f$$

$$V_f = \frac{V_l}{\sqrt{3}}$$

Transformadores trifásicos

Ou seja, se uma tensão de linha V é aplicada a um enrolamento trifásico ligado em Y, a tensão efetiva sobre a fase é dada por $V/\sqrt{3}$. Esta tensão é que será refletida ao enrolamento no secundário do transformador. Portanto, sendo o secundário em Δ , temos:



A tensão de linha no lado em Δ será $V/\sqrt{3}a$, onde a é a relação do número de espiras. Assim, a relação de transformação de um transformador ligado Y- Δ em é:

$$RT = \frac{V_{l,Y}}{V_{l,\Delta}} = \frac{V}{\frac{V}{\sqrt{3}a}} = \sqrt{3}a$$

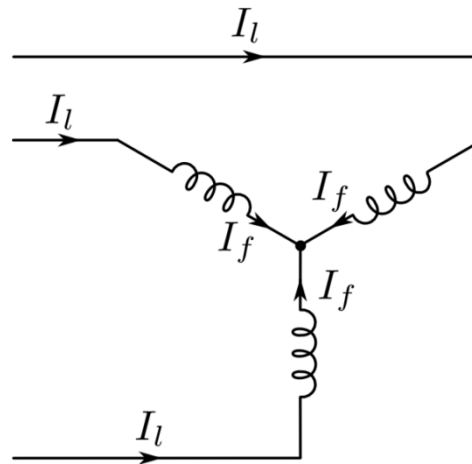
Relação de correntes – conexão YΔ

Definições:

Corrente de linha: percorre as linhas do sistema.

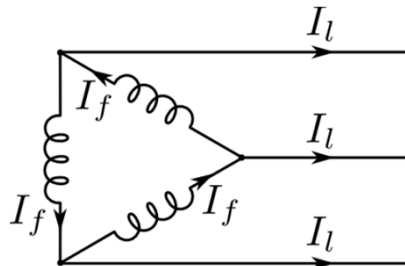
Corrente de fase: percorre os enrolamentos do transformador (cada fase da carga, gerador).

Em Y, a corrente de linha é igual à corrente de fase:



$$I_l = I_f$$

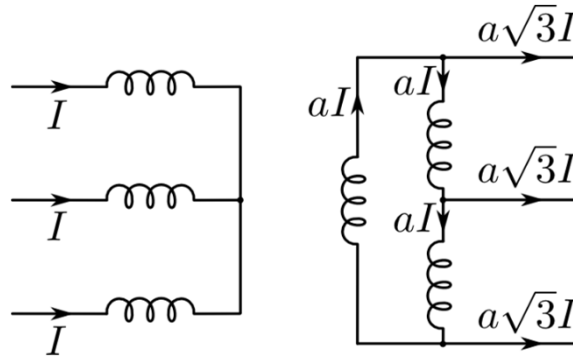
Em Δ, a corrente de linha é $\sqrt{3}$ vezes a corrente de fase:



$$I_l = \sqrt{3}I_f$$

Relação de correntes – conexão $Y\Delta$

Assim, a corrente I no enrolamento do primário será refletida no enrolamento do secundário como aI . E a corrente de linha no Δ será, portanto, $aI\sqrt{3}$.



a relação de correntes é:

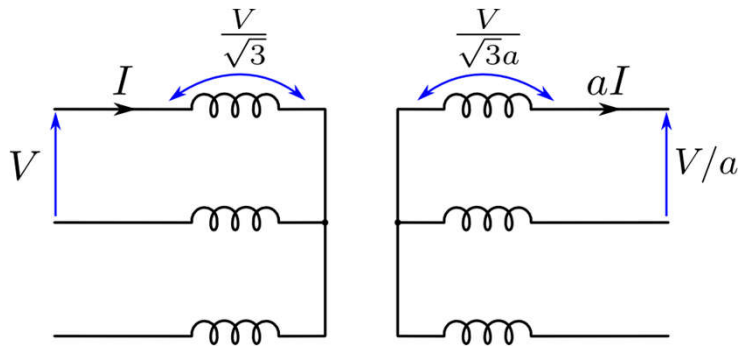
$$\frac{I_{l,Y}}{I_{l,\Delta}} = \frac{I}{a\sqrt{3}I} = \frac{1}{a\sqrt{3}}$$

que é o inverso da relação de tensão.

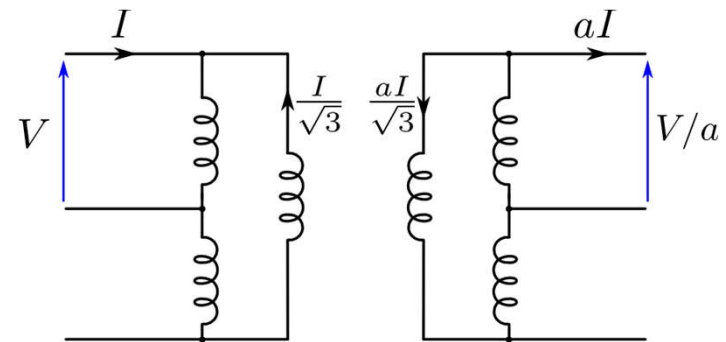
Relação de correntes – conexão $\Delta \Delta$ ou YY

Nas conexões Y-Y e Δ - Δ as relações de transformação são dadas por:

$$RT = \frac{V_{l,Y}}{V_{l,Y}} = a$$



$$RT = \frac{V_{l,\Delta}}{V_{l,\Delta}} = a$$



e as relações de correntes são dadas por:

$$\frac{I_{l,Y}}{I_{l,Y}} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{I_{l,\Delta}}{I_{l,\Delta}} = \frac{1}{a}$$

Defasagem introduzida por transformadores trifásicos

As conexões Y- Δ e Δ -Y envolvem defasagens de 30° entre as tensões de linha do primário e o secundário.

Prova: considere as seguintes tensões de fase aplicadas ao primário de um transformador Y- Δ :

$$V_{an} = V \cos(\omega t)$$

$$V_{bn} = V \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$V_{cn} = V \cos(\omega t + 120^\circ)$$

Pode-se mostrar que V_{ab} , V_{bc} e V_{ca} são:

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = \sqrt{3}V \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} = \sqrt{3}V \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} = \sqrt{3}V \cos(\omega t + 150^\circ)$$

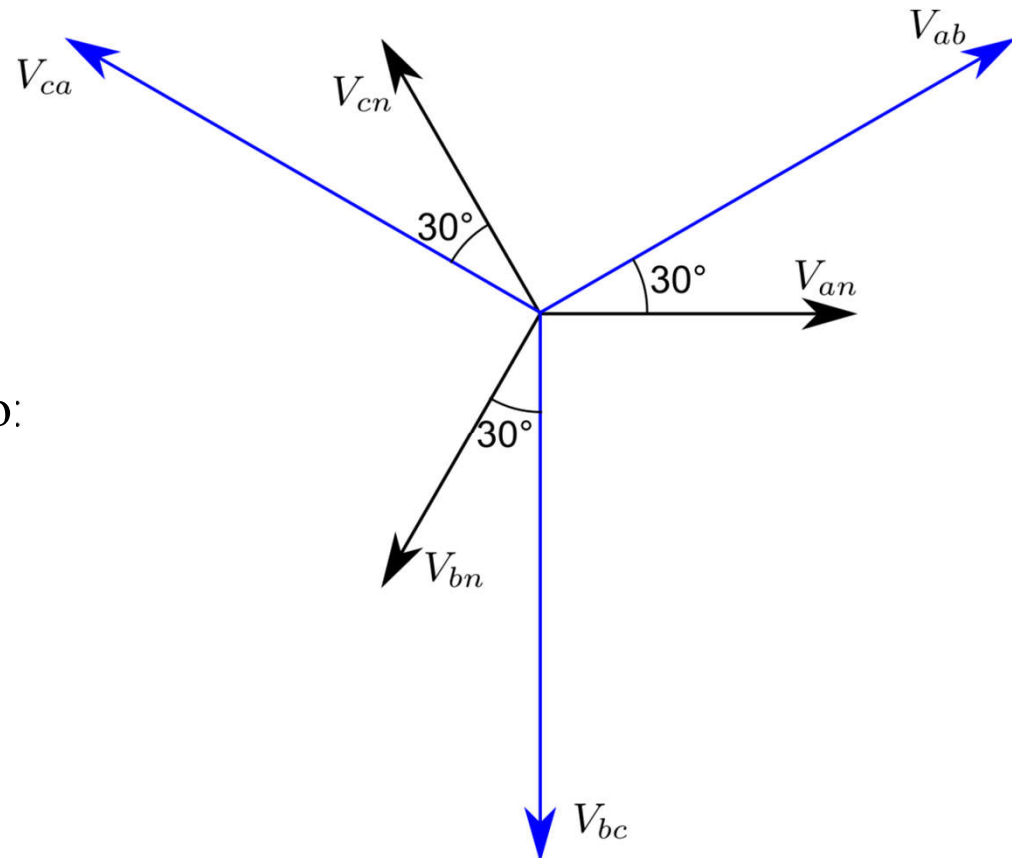
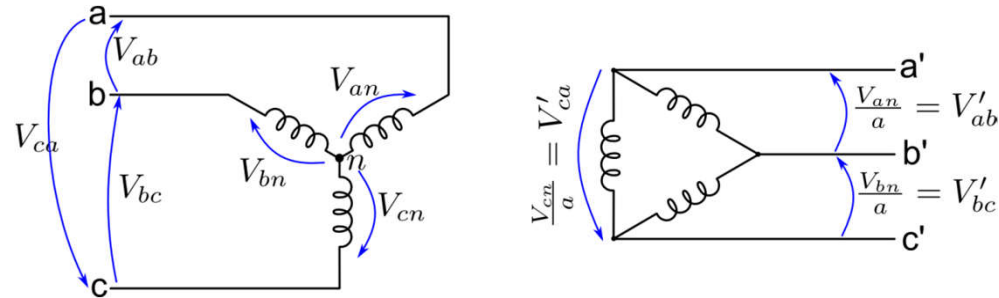


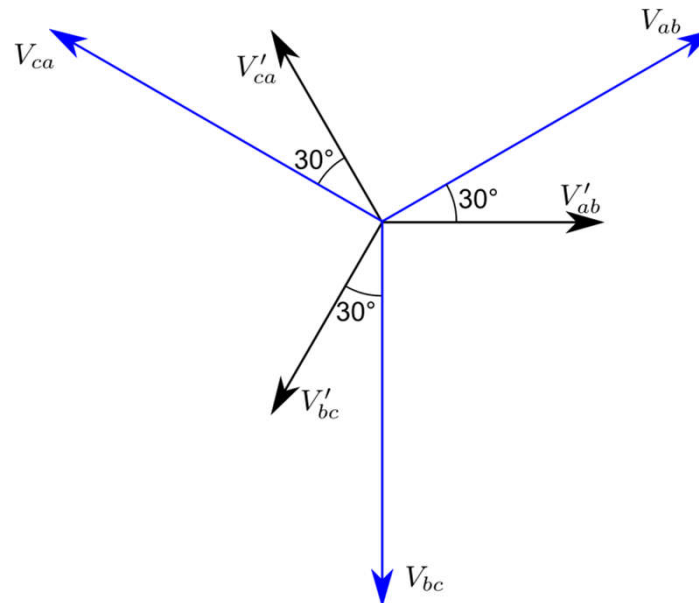
Diagrama fasorial

Defasagem introduzida por transformadores trifásicos



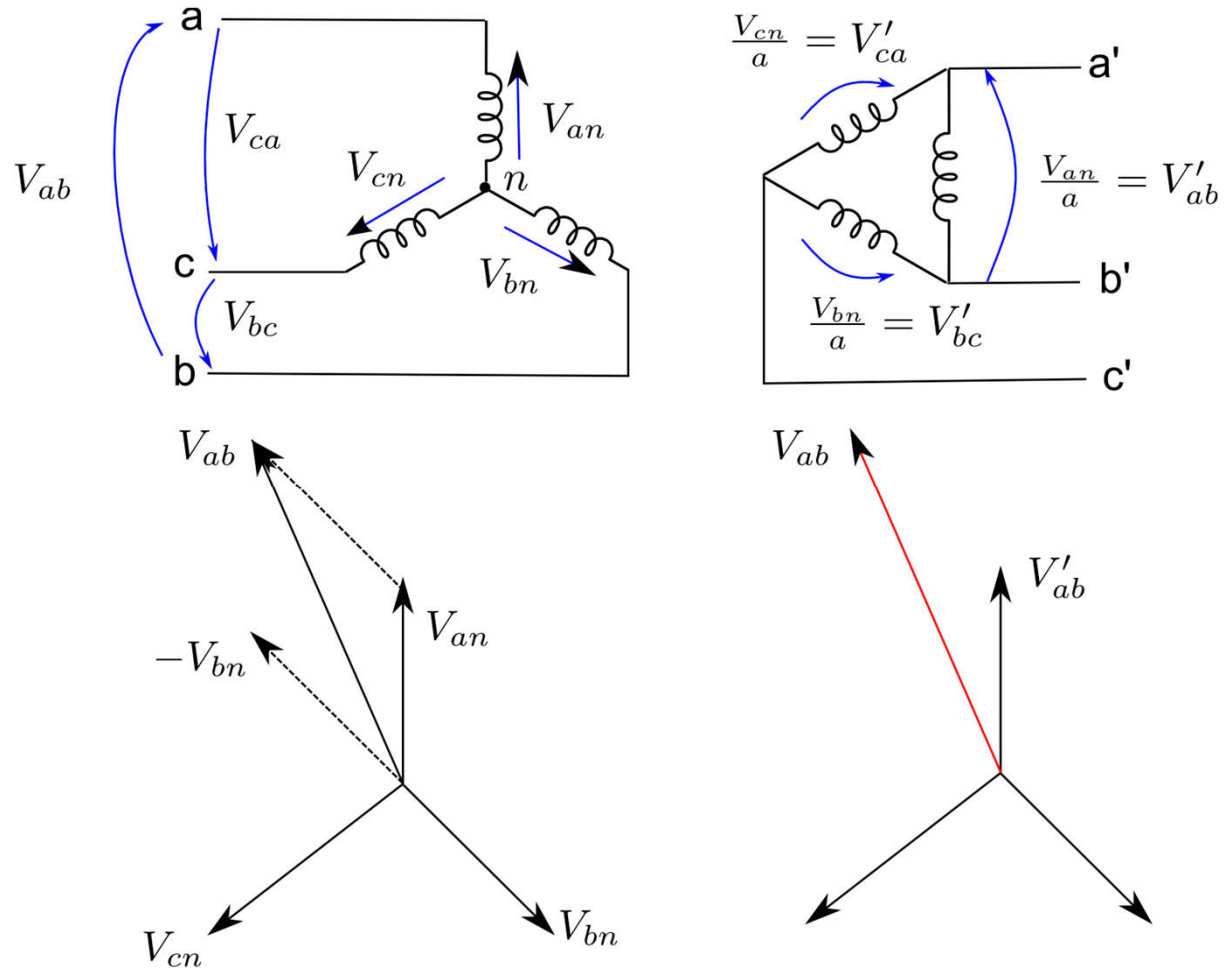
As tensões que são efetivamente refletidas ao enrolamentos do secundário são V_{an} , V_{bn} e V_{cn} , resultando em V'_{ab} , V'_{bc} e V'_{ca} com as mesmas fases de V_{an} , V_{bn} e V_{cn}

Diagrama fasorial:



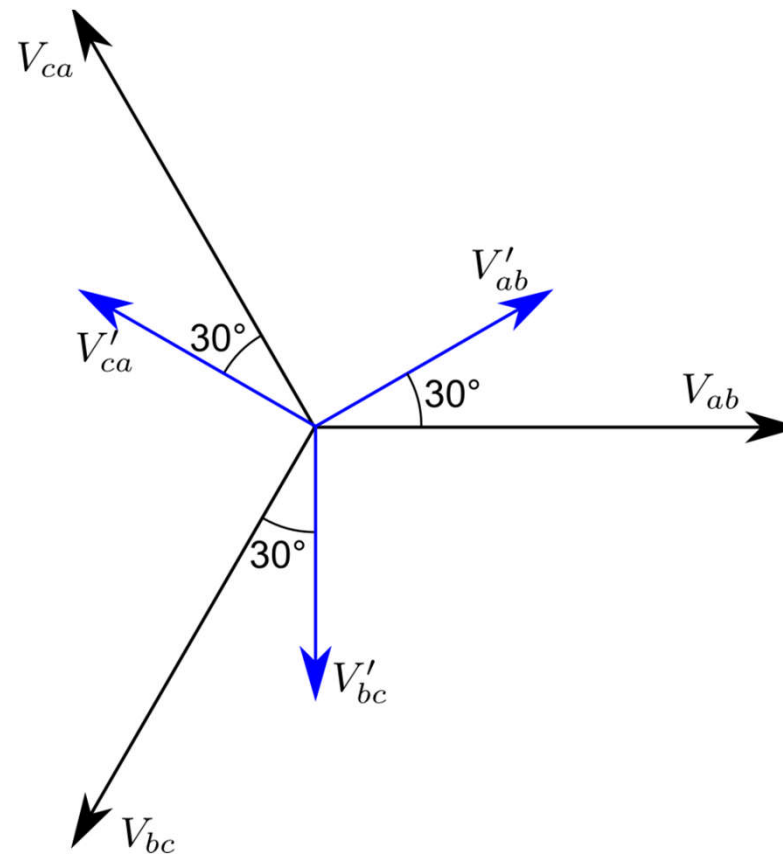
Existem uma defasagem de -30° entre as tensões de linha do primário e do secundário.

Defasagem introduzida por transformadores trifásicos



Defasagem introduzida por transformadores trifásicos

Conexão Δ -Y:



Existe uma defasagem de $+30^\circ$ entre as tensões de linha do primário e do secundário.