EDITORA ATLAS S.A.
Rua Conselheiro Nébias, 1384 (Campos Elísios)
01203-904 São Paulo (SP)
Tel.: (0_ _11) 3357-9144 (PABX)
www.atlasnet.com.br

José Roberto Securato

DECISÕES FINANCEIRAS EM CONDIÇÕES DE RISCO

SÃO PAULO
EDITORA ATLAS S.A. — 1996

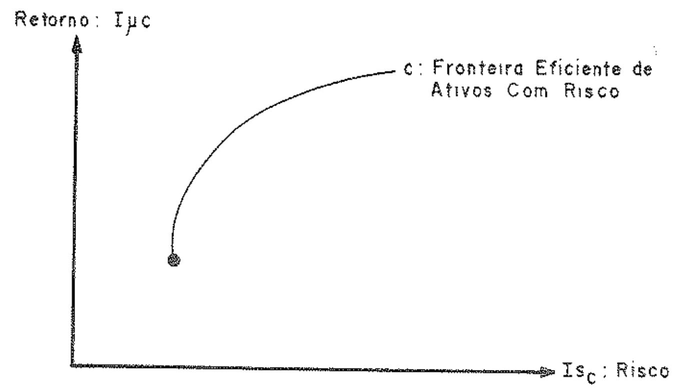
27

6
OS MODELOS DE MARKOWITZ E SHARPE — O CAPM

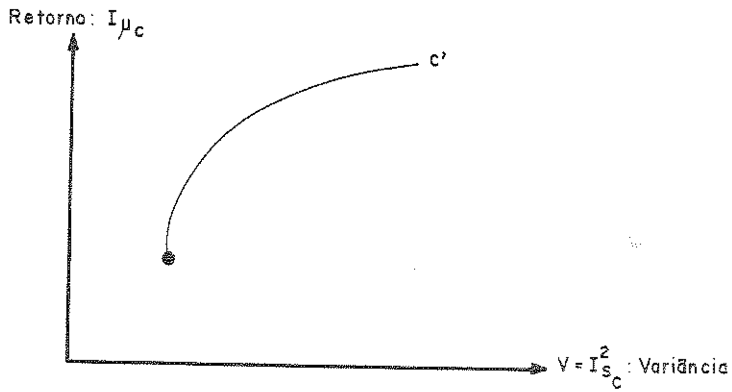
6.1 DETERMINAÇÃO DA "FRONTEIRA EFICIENTE DE ATIVOS COM RISCO" — O MODELO DE MARKOWITZ PARA TRÊS ATIVOS

Consideremos o problema da determinação da fronteira eficiente dos investimentos com risco a partir das carteiras formadas pela composição de três ativos. Para tanto, vamos considerar como dados os ativos A_1, A_2, A_3, em que são conhecidos os retornos médios $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, I_{\mu_3}$, bem como os desvios $I_{S_1}, I_{S_2}, I_{S_3}$, respectivamente. Admitamos, também, como estabelecidas as covariâncias dos retornos dos ativos, dados por: $\text{cov}(I_1, I_2)$, $\text{cov}(I_1, I_3)$ e $\text{cov}(I_2, I_3)$.

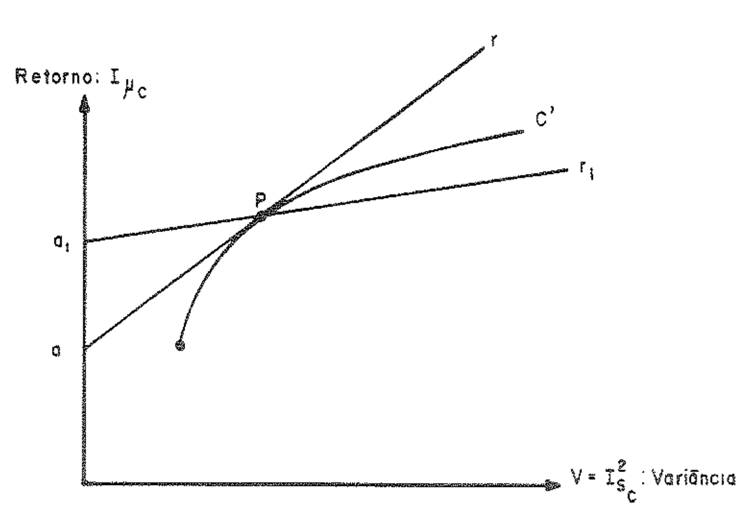
Uma das formas interessantes de obtermos os pontos da fronteira eficiente parte da análise das tangentes à curva representativa da fronteira eficiente de investimentos com risco. No plano risco-retorno esta curva deve ter o aspecto da curva-C, conforme o gráfico seguinte:



Para facilitar a formulação do problema, consideremos a curva-C', obtida a partir dos pontos da curva-C, no plano variância-retorno. Lembrando que a variância é igual ao quadrado do desvio, então a concavidade da curva C' terá o mesmo aspecto que a curva-C. O gráfico seguinte representa a curva-C' no plano variância-retorno:



Consideremos um ponto P qualquer da curva-C' e tracemos a reta r_1 passando por P, conforme o gráfico a seguir:



A equação da reta r_1 será dada por:

$$r_1 : I_{\mu_c} = a_1 + b_1 V \,.$$

Fixando o ponto P, consideremos as demais retas que passam pelo ponto P, em particular a reta r, tangente à curva-C', dada pela equação:

$$r : I_{\mu_c} = a + b_1 V \,.$$

O que caracteriza a reta tangente à curva-C', pelo ponto P, é que, dentre todas as retas que têm um único ponto em comum com a curva, a equação da reta tangente deverá ter o mínimo valor para o termo independente a.

Assim, partindo da reta r_1, com eixo no ponto P, e girando no sentido anti-horário, traçando as retas por P, teríamos que os termos independentes das equações destas retas seriam:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a$$

Observemos que, se continuarmos com o movimento de r_1 para r centrado em P, mesmo após a obtenção da reta tangente, as próximas retas, por P, terão dois pontos em comum com a curva-C'.

Assim, as equações das retas que passam por P são da forma:

$$I_{\mu_c} = a_j + b_j V$$

e a condição para que a reta seja tangente à curva-C' será:

$$a = \text{mínimo}(a_j) = \min\left(I_{\mu_c} - bV\right)$$

Do exposto, podemos examinar quais são as condições para que um ponto P pertença à curva-C'.

Cada ponto P tem coordenadas $P = (V_P ; l_{\mu_P})$, em termos de variância-retorno, ou coordenadas $P = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, em termos de composição da carteira.

Assim, o ponto P deverá satisfazer às condições seguintes:

$$l_{\mu_C} = \omega_1 l_{\mu_1} + \omega_2 l_{\mu_2} + \omega_3 l_{\mu_3}$$

e

$$l_{S_C}^2 = V = \omega_1^2 l_{S_1}^2 + \omega_2^2 l_{S_2}^2 + \omega_3^2 l_{S_3}^2 + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(l_1, l_2) + $$
$$+ 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(l_1, l_3) + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(l_2, l_3)$$

onde $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, com $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$, e a tangente à curva-C', por P, deve ser tal que:

$$a = \min(a_j) = \min(l_{\mu_C} - b.V),$$

o que completa as condições para P pertencer à curva-C'.

Notemos que, obtidos os pontos $P = (V_P = l_{S_C}^2 ; l_{\mu_P})$ da curva-C', podemos obter os pontos $P^* = (l_{S_C} ; l_{\mu_P})$, que serão os pontos da curva-C, ou seja, da **fronteira eficiente de investimentos dos ativos com risco**, ambos definidos pela mesma composição $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ das carteiras.

Para obtermos a composição das carteiras que nos dá os pontos do tipo P, pertencentes à curva-C', teremos que obter $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ tais que:

$$a = \min(l_{\mu_C} - b.V)$$

com $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ e $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$.

A solução desta questão é obtida pelo método do multiplicador de Lagrange.[1]

O método consiste em partirmos da função a ser minimizada:

$$a = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = l_{\mu_C} - b.V$$

submetida à restrição $g(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0$ e construirmos a **função objetivo**, dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \lambda.g(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

1. CHIANG, Alpha. *Matemática para economistas.* São Paulo: Edusp/McGraw-Hill, 1982.

O passo seguinte consiste em resolvermos o sistema:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \omega_3} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_2} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

obtendo assim $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ que satisfazem as condições fixadas de mínimo e de soma unitária, significando que são pontos da curva-C'.

Calculando, teremos que a função objetivo será dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = (l_{\mu_C} - b.V) + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1),$$

onde, substituindo os valores de l_{μ_C} e $V = l_{S_C}^2$, teremos:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda) = \omega_1 l_{\mu_1} + \omega_2 l_{\mu_2} + \omega_3 l_{\mu_3} - b\left[\omega_1^2 l_{S_1}^2 + \omega_2^2 l_{S_2}^2 + \omega_3^2 l_{S_3}^2\right] +$$
$$- b\left[2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(l_1, l_2) + 2\omega_1\omega_3 \operatorname{cov}(l_1, l_3) + 2\omega_2\omega_3 \operatorname{cov}(l_2, l_3)\right] +$$
$$+ \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1).$$

Derivando, teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = l_{\mu_1} - 2l_{S_1}^2 b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_2)b\omega_2 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_3)b\omega_3 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_2} = l_{\mu_2} - 2l_{S_2}^2 b\omega_2 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_2)b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(l_2, l_3)b\omega_3 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_3} = l_{\mu_3} - 2l_{S_3}^2 b\omega_3 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_3)b\omega_1 - 2\operatorname{cov}(l_2, l_3)b\omega_2 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0$$

Reescrevendo o sistema, teremos:

$$2l_{S_1}^2.\omega_1 + 2\operatorname{cov}(l_1, l_2).\omega_2 + 2\operatorname{cov}(l_1, l_3).\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{l_{\mu_1}}{b}$$
$$2\operatorname{cov}(l_1, l_2).\omega_1 + 2l_{S_2}^2.\omega_2 + 2\operatorname{cov}(l_2, l_3).\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{l_{\mu_2}}{b}$$
$$2\operatorname{cov}(l_1, l_3).\omega_1 + 2\operatorname{cov}(l_2, l_3).\omega_2 + 2l_{S_3}^2.\omega_3 + \frac{\lambda}{b} = \frac{l_{\mu_3}}{b}$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 0.\frac{\lambda}{b} = 1$$

Que, escrito na forma matricial, nos dará

$$\begin{bmatrix} 2\,l_{S_1}^2 & 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2\,l_{S_2}^2 & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & 2\,l_{S_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu_1}}{b} \\ \frac{l_{\mu_2}}{b} \\ \frac{l_{\mu_3}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou que indicaremos, na forma matricial, por:

$$M.W = U.$$

Resolvendo a equação matricial, virá:

$$W = M^{-1}.U$$

o que nos possibilitará obter $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ em função do coeficiente b.

Dando valores a b, obtemos todas as composições $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ pelos pontos da curva-C' e portanto da curva-C, a menos da condição

$$0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1.$$

Assim, devemos verificar se esta condição está satisfeita; se não estiver devemos verificar a existência de ponto com tais condições que não tenha sido captado pelo presente método. A ocorrência deste fato é possível, pois a condição $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$ não foi implantada no desenvolvimento do problema.

6.2 MODELO DE MARKOWITZ — CASO GERAL — FRONTEIRA EFICIENTE DAS CARTEIRAS COM N ATIVOS

A operação matricial, no caso geral, será dada por:

$$W = M^{-1}.U$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu_1}}{b} \\ \frac{l_{\mu_2}}{b} \\ \vdots \\ \frac{l_{\mu_n}}{b} \\ 1 \end{bmatrix},$$

sendo M dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2l_{S_1}^2 & 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & \cdots & 2\operatorname{cov}(l_1,l_n) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2l_{S_2}^2 & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & \cdots & 2\operatorname{cov}(l_2,l_n) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & 2l_{S_3}^2 & \cdots & 2\operatorname{cov}(l_3,l_n) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_4) & 2\operatorname{cov}(l_2,l_4) & 2\operatorname{cov}(l_3,l_4) & \cdots & 2\operatorname{cov}(l_4,l_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_n) & 2\operatorname{cov}(l_2,l_n) & 2\operatorname{cov}(l_3,l_n) & \cdots & 2l_{S_n}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvida a equação matricial, obtemos o vetor W que nos dá a composição das carteiras que são pontos da fronteira eficiente de investimentos.

Exemplo — Fronteira eficiente para carteiras com três ativos — Modelo de Markowitz

Consideremos os ativos A_1, A_2, A_3 onde são dados os retornos médios, desvios e covariâncias, como segue:

$$\begin{aligned} l_{\mu_1} &= 0{,}15; & l_{S_1} &= 0{,}05; & \operatorname{cov}(l_1,l_2) &= 0{,}00245 \\ l_{\mu_2} &= 0{,}25; & l_{S_2} &= 0{,}07; & \operatorname{cov}(l_1,l_3) &= 0{,}00100 \\ l_{\mu_3} &= 0{,}35; & l_{S_3} &= 0{,}10; & \operatorname{cov}(l_2,l_3) &= 0{,}00350 \end{aligned}$$

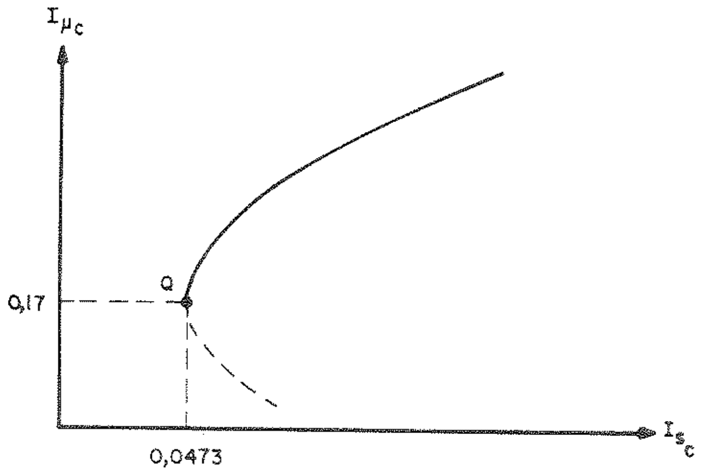
onde os retornos são dados para um prazo fixado.

Partimos da equação matricial $W = M^{-1}.U$, dada por:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2l_{S_1}^2 & 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_2) & 2l_{S_2}^2 & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & 1 \\ 2\operatorname{cov}(l_1,l_3) & 2\operatorname{cov}(l_2,l_3) & 2l_{S_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_{\mu_1}}{b} \\ \frac{l_{\mu_2}}{b} \\ \frac{l_{\mu_3}}{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo os dados na equação matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \frac{\lambda}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(0{,}05)^2 & 2\times0{,}00245 & 2\times0{,}00100 & 1 \\ 2\times0{,}00245 & 2\times(0{,}07)^2 & 2\times0{,}00350 & 1 \\ 2\times0{,}00100 & 2\times0{,}00350 & 2\times(0{,}10)^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{0{,}15}{b} \\ \frac{0{,}25}{b} \\ \frac{0{,}35}{b} \\ 1 \end{bmatrix} =$$



e) Lembrando que o coeficiente b representa o coeficiente angular das retas tangentes à curva-C', no plano variância-retorno, então, fazendo $b \to \infty$ obtemos o ponto de mínimo risco e mínimo retorno. Assim, na equação

$$I_{\mu_C} = 0{,}1700 + \frac{2{,}6079}{b},$$

para $b \to \infty$, teremos $I_{\mu_C} = 0{,}1700$.

Note-se que este ponto também corresponde ao vértice Q da hipérbole.

Podemos calcular o valor do desvio para a carteira com $I_{\mu_C} = 0{,}1700$, obtendo:

$$I^2_{S_C} = 0{,}002233 \Rightarrow I_{S_C} = 0{,}0473.$$

Em relação à composição da carteira, basta fazer $b \to \infty$ nas equações de ω_1, ω_2, e ω_3, o que nos dará:

$$\omega_1 = 0{,}9836 \Rightarrow 98{,}36\%$$
$$\omega_2 = -0{,}1671 \Rightarrow -16{,}71\%$$
$$\omega_3 = 0{,}1835 \Rightarrow 18{,}35\%,$$

obtendo assim uma carteira de composição alavancada, ou seja, para cada 100 de capital, tomamos emprestados 16,71% segundo as condições do

ativo A_2. O total obtido de 116,71% é investido 98,36% no ativo A_1 e 18,35% no ativo A_3, o que nos dá a carteira com retorno $I_{\mu_C} = 0{,}17$ e risco $I_{S_C} = 0{,}0473$.

Ocorre que uma carteira deste tipo não satisfaz a condição:

$$0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1,$$

significando que a curva obtida não tem todos os seus pontos pertencentes à **fronteira eficiente de investimentos de ativos com risco**, no sentido em que esta foi definida. Assim, a curva obtida nos dá os pontos da fronteira eficiente no sentido amplo, onde são permitidas as carteiras alavancadas.

f) Determinemos os valores de b para os quais $0 \le \omega_1, \omega_2, \omega_3 \le 1$. Obteremos assim os valores de b que nos dão pontos da fronteira eficiente.

Para tanto, devemos ter satisfeitas as seguintes condições:

$b > 0$; pois b é coeficiente da reta tangente com inclinação para a direita

$$0 \le \omega_1 = 0{,}9836 - \frac{19{,}8760}{b} \le 1$$

$$0 \le \omega_2 = -0{,}1671 + \frac{13{,}6726}{b} \le 1$$

e

$$0 \le \omega_3 = -0{,}0044 + \frac{0{,}1700}{b} \le 1$$

Resolvendo as inequações, teremos:

$$b > 0$$
$$b \ge -1211{,}9512 \text{ e } b \ge 20{,}2074$$
$$11{,}7150 \le b \le 81{,}8199$$
$$0{,}1693 \le b \le 38{,}6364$$

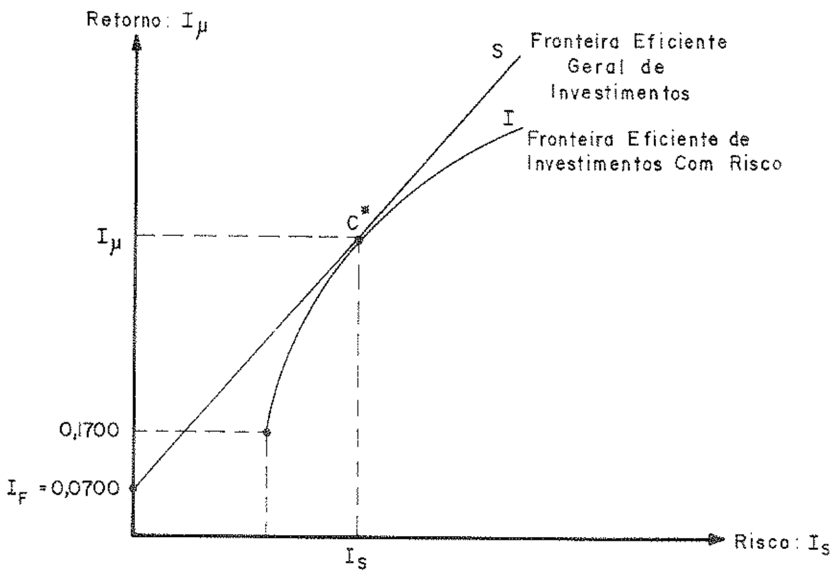
logo, os valores de b que satisfazem simultaneamente as inequações serão:

$$20{,}2074 \le b \le 38{,}6364.$$

Dentro destas condições, substituindo na equação dos retornos e dos desvios, obteremos:

para $b = 20{,}2074$, teremos $I_{\mu_C} = 0{,}2991$ e $I_{S_C} = 0{,}0737$;

para $b = 38{,}6364$, teremos $I_{\mu_C} = 0{,}2375$ e $I_{S_C} = 0{,}0557$.



A equação da reta s é dada por:

$$s \div I_\mu - 0{,}07 = m(I_S - 0).$$

Como $C^* = (I_S; I_\mu)$ é ponto da reta e da hipérbole, teremos:

$$I_S = \frac{I_\mu - 0{,}07}{m}$$

que, substituído na equação da hipérbole, nos dará:

$$\frac{\left(\frac{I_\mu - 0{,}07}{m}\right)^2}{(0{,}0473)^2} - \frac{(I_\mu - 0{,}17)^2}{(0{,}1079)^2} = 1$$

ou

$$\left(\frac{I_\mu - 0{,}07}{m}\right)^2 = 0{,}191729 I_\mu^2 - 0{,}065183 I_\mu + 0{,}007773$$

$$I_\mu^2 - 0{,}14 I_\mu + 0{,}0049 = 0{,}191729 m^2 I_\mu^2 - 0{,}065183 m^2 I_\mu + 0{,}007773 m^2$$

que, simplificando, nos dará:

$$\left(1 - 0{,}191729m^2\right)I_\mu^2 - \left(0{,}14 - 0{,}065183m^2\right)I_\mu + \left(0{,}0049 - 0{,}007773m^2\right) = 0,$$

o que nos dá uma equação de segundo grau, onde a condição de tangência é obtida para o discriminante igual a zero, o que nos permite obter o valor de m. Assim, teremos:

$$0{,}001712\, m^4 - 0{,}016599\, m^2 = 0$$

ou

$$m^2\left(0{,}001712m^2 - 0{,}016599\right) = 0$$

ou, ainda,

$$0{,}001712\, m^2 = 0{,}016599.$$

Como $m > 0$, pois a reta tangente é inclinada para a direita, teremos:

$$m = 3{,}1138.$$

Logo, a equação da reta tangente será dada por:

$$I_\mu - 0{,}07 = 3{,}1138 I_S$$

ou

$$I_\mu - 3{,}1138 I_S + 0{,}07.$$

Devemos determinar as coordenadas do ponto C^* e verificar se não temos uma carteira alavancada.

Para tanto, basta substituir o valor de $m = 3{,}1138$ na equação:

$$\left(1 - 0{,}191729m^2\right)I_\mu^2 - \left(0{,}14 - 0{,}065183m^2\right)I_\mu + \left(0{,}0049 - 0{,}007773m^2\right) = 0$$

o que nos dará:

$$-0{,}858957 I_\mu^2 + 0{,}491998 I_\mu - 0{,}070465 = 0.$$

Lembrando que o discriminante é zero, então o retorno da carteira será:

$$I_\mu = \frac{-0{,}491998}{2 \times (-0{,}858957)} = 0{,}2864,$$

e o risco $I_S = 0{,}0695$.

Assim, $C^* = \left(I_S = 0{,}0695;\ I_\mu = 0{,}2864\right)$ é ponto da hipérbole e satisfaz as condições de ponto da fronteira eficiente de investimentos com risco.

Daí a equação da reta tangente à hipérbole pelo ponto C^*, passando pelo ponto correspondente ao ativo livre de risco, será dada por

$$I_\mu = 0{,}07 + 3{,}1138 I_S,$$

que é a equação da **fronteira eficiente geral de investimentos**.

6.3 CARTEIRA DE MÁXIMA RAZÃO RECOMPENSA — VARIABILIDADE

Conforme a definição de Sharpe,[3] a razão recompensa-variabilidade de um ativo A, indicada por RV_A, é dada por:

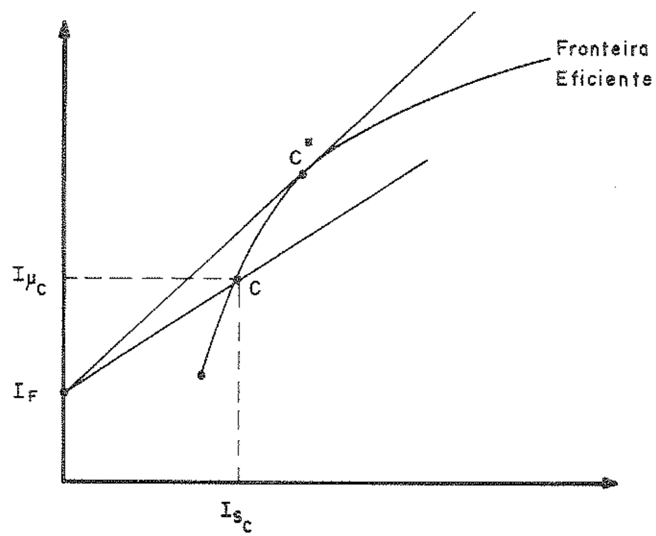
$$RV_A = \frac{I_{\mu_A} - I_F}{I_{S_A}}.$$

Estendendo o conceito para uma carteira C, teremos:

$$RV_C = \frac{I_{\mu_C} - I_F}{I_{S_C}},$$

o que nos dá a relação entre o retorno adicional da carteira e seu risco adicional em comparação ao ativo livre de risco.

Vamos considerar no plano risco-retorno a curva da **fronteira eficiente de investimentos com risco** e as retas que passam por I_F, representação do ativo livre de risco, secantes à fronteira, conforme o gráfico:



3. SHARPE, William F. *Portfolio theory and capital markets.* New York: McGraw-Hill, 1970.

As equações das retas secantes serão da forma:

$$I_{\mu_C} = I_F + \frac{I_{\mu_C} - I_F}{I_{S_C}} . I_S,$$

onde os coeficientes angulares das retas são as razões recompensa-variabilidade de cada carteira C da fronteira eficiente de investimentos com risco, dados por:

$$RV_C = \frac{I_{\mu_C} - I_F}{I_{S_C}}.$$

Assim, quando obtemos a reta tangente à fronteira eficiente de investimentos com risco, passando por I_F, obtemos a carteira C^* que nos dá a **máxima razão recompensa-variabilidade**, ou seja, obtemos o máximo coeficiente angular das retas que passam por I_F e tem um ponto em comum com a fronteira eficiente, logo:

$$RV_{max} = \frac{I_{\mu_{C^*}} - I_F}{I_{S_{C^*}}}.$$

6.4 CARTEIRAS DE RISCO MÍNIMO PARA UM RETORNO FIXADO

Uma das formas mais comuns de obtermos carteiras candidatas a pontos da fronteira eficiente de investimentos com risco consiste em procurarmos as carteiras que tenham o mínimo risco para um retorno fixado.

Assim, dados os ativos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, em que são conhecidos os retornos médios, os desvios e as covariâncias, o problema será o de obter o

$$\text{mínimo}\left(I_{S_C}\right),$$

ou seja, obter a carteira que tenha o mínimo desvio.

A determinação do mínimo $\left(I_{S_C}\right)$ é equivalente a obter o mínimo $\left(I_{S_C}^2\right)$, visto que $I_{S_C} \geq 0$.

Assim, sendo

$$I_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 I_{S_j}^2 + 2 \sum_{j>k} \omega_j \omega_k \operatorname{cov}\left(I_j, I_k\right),$$

devemos obter:

$$\text{mínimo}\left(I_S^2\right)$$

sob as condições seguintes:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$$

$$l_{\mu_C} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j l_{\mu_j},$$

onde l_{μ_C} é o retorno médio da carteira,

e

$$0 \le \omega_j \le 1;\ j = 1, n.$$

Para resolvermos o problema, lembremos o método dos *Multiplicadores de Lagrange*,[4] que consiste em:

— dada a função

$$l_{S_C}^2 = f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

— onde as variáveis $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ estão sujeitas às condições:

$$g(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = l_{\mu_C} - \sum_{j=1}^{n} \omega_j l_{\mu_j}$$

e

$$h(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \omega_j;$$

então, construindo a função objetivo:

$$F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \lambda_1, \lambda_2) = f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \\ + \lambda_1 . g(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \lambda_2 . h(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

os valores de $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ que satisfazem o sistema

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial \omega_2} = 0; \ldots;\ \frac{\partial F}{\partial \omega_n} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0$$

são candidatos a pontos que otimizam a função. Em nosso caso, minimizam o risco, caracterizado pela variância.

O sistema obtido, escrito na forma matricial será:

$$W = M^{-1}.U$$

4. DRAPER, Jean E., KLINGMAN, Janes S. *Matemática para administracion y economia*. México: Harla, 1976, p. 375-378.

onde W é a matriz das incógnitas

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

M a matriz dos retornos, covariâncias e desvios, dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2l_{S_1}^2 & 2\mathrm{cov}(l_1, l_2) & 2\mathrm{cov}(l_1, l_3) & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_1, l_n) & l_{\mu_1} & 1 \\ 2\mathrm{cov}(l_1, l_2) & 2l_{S_2}^2 & 2\mathrm{cov}(l_2, l_3) & \cdots & 2\mathrm{cov}(l_2, l_n) & l_{\mu_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\mathrm{cov}(l_1, l_n) & 2\mathrm{cov}(l_2, l_n) & \cdots & \cdots & 2l_{S_n}^2 & l_{\mu_n} & 1 \\ l_{\mu_1} & l_{\mu_2} & \cdots & \cdots & l_{\mu_n} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e U a matriz que possui o retorno médio da carteira, dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ l_{\mu_C} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então, resolvendo a equação matricial

$$W = M^{-1}.U,$$

obtemos as composições $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ que nos dão as carteiras de risco mínimo para um nível de retorno fixado. Estas carteiras são candidatas a pontos da fronteira eficiente de investimentos.

Exemplo

Consideremos os dados do exemplo apresentado no item 6.3., onde tínhamos três ativos tais que:

$$l_{\mu_1} = 0{,}15, \quad l_{S_1} = 0{,}05;$$

$$l_{\mu_2} = 0{,}25, \quad l_{S_2} = 0{,}07;$$

$$l_{\mu_3} = 0{,}35, \quad l_{S_3} = 0{,}10;$$

$$\text{cov}(I_1, I_2) = 0{,}00245$$
$$\text{cov}(I_1, I_3) = 0{,}00100$$
$$\text{cov}(I_2, I_3) = 0{,}00350$$

Com a finalidade de minimizarmos a variância $I_{S_C}^2$ e, com isto, o risco da carteira para um nível de retorno fixado, devemos resolver o sistema obtido a partir do método dos multiplicadores de Lagrange.

O sistema na forma matricial será $W = M^{-1}.U$, onde:

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{\mu_C} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz M^{-1} dada por:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2\times(0{,}05)^2 & 2\times0{,}00245 & 2\times0{,}00100 & 0{,}15 & 1 \\ 2\times0{,}00245 & 2\times(0{,}07)^2 & 2\times0{,}00350 & 0{,}25 & 1 \\ 2\times0{,}00100 & 2\times0{,}00350 & 2\times(0{,}10)^2 & 0{,}35 & 1 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Assim, a equação matricial $W = M^{-1}.U$ pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00500 & 0{,}00490 & 0{,}00200 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}00490 & 0{,}00980 & 0{,}00700 & 0{,}25 & 1 \\ 0{,}00200 & 0{,}00700 & 0{,}02000 & 0{,}35 & 1 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{\mu_C} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Com a finalidade de não apresentarmos zeros na diagonal principal da matriz, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0{,}00500 & 0{,}00490 & 0{,}00200 & 0{,}15 & 1 \\ 0{,}00490 & 0{,}00980 & 0{,}00700 & 0{,}25 & 1 \\ 0{,}00200 & 0{,}00700 & 0{,}02000 & 0{,}35 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 \\ I_{\mu_C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz, teremos:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}2790 & -7{,}6213 & 48{,}5436 & -97{,}0873 & 48{,}5436 \\ -1{,}0582 & 5{,}2427 & -97{,}0873 & 194{,}1747 & -97{,}0873 \\ -0{,}2208 & 2{,}3786 & 48{,}5436 & -97{,}0813 & 48{,}5436 \\ 0{,}0651 & -0{,}3834 & -7{,}6213 & 5{,}2427 & 2{,}3786 \\ 0{,}0155 & 0{,}0651 & 2{,}2791 & -1{,}0582 & -0{,}2208 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ I_{\mu_C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

resolvendo, teremos:

$$\omega_1 = +2{,}2790 - 7{,}6213 I_{\mu_C}$$
$$\omega_2 = -1{,}0582 + 5{,}2477 I_{\mu_C}$$
$$\omega_3 = -0{,}2208 + 2{,}3786 I_{\mu_C}$$

com os multiplicadores de Lagrange dados por:

$$\lambda_1 = +0{,}0651 - 0{,}3834 I_{\mu_C}$$
$$\lambda_2 = -0{,}0155 + 0{,}0651 I_{\mu_C}.$$

Observações

Vejamos algumas considerações que podemos estabelecer, obtidas as expressões de ω_1, ω_2 e ω_3 em função do nível de retorno da carteira a ser fixado.

a) Podemos verificar as duas condições impostas para a obtenção do risco mínimo. A primeira delas é que

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

o que pode ser verificado somando-se as expressões de ω_1, ω_2, e ω_3, assim:

$$\left(2{,}2790 - 7{,}6213 I_{\mu_C}\right) + \left(-1{,}0582 + 5{,}2427 I_{\mu_C}\right) + \left(-0{,}2208 + 2{,}3786 I_{\mu_C}\right) =$$
$$= 1 + 0.I_{\mu_C} = 1.$$

b) A segunda verificação é em relação à expressão do retorno médio da carteira, ou seja, devemos verificar que

$$I_{\mu_C} = \omega_1 I_{\mu_1} + \omega_2 I_{\mu_2} + \omega_3 I_{\mu_3}$$

ou seja:

$$I_{\mu_C} = \left(2{,}2790 - 7{,}6213 I_{\mu_C}\right).0{,}15 + \left(-1{,}0582 + 5{,}2427 I_{\mu_C}\right).0{,}25 +$$
$$+ \left(-0{,}2208 + 2{,}3786 I_{\mu_C}\right).0{,}35 =$$
$$= 0{,}00002 + 0{,}99999 I_{\mu_C},$$

o que, por aproximação, satisfaz a condição imposta.

No exemplo, sendo $R_{\mu_M} = 0{,}0448$, teremos:

ATIVO	Retorno Próprio	Influência do Sistema	Retorno do Ativo
	a_j	$b_j R_{\mu_M}$	l_{μ_j}
Ouro	0,0473	-0,1943 x 0,0448 = -0,0087	0,0386
Renda Fixa	0,0446	-0,1283 x 0,0448 = -0,0058	0,0388
Telebrás	-0,0014	1,3369 x 0,0448 = 0,0599	0,0585
BB	0,0035	0,6821 x 0,0448 = 0,0306	0,0341
Imóveis	0,0420	-0,6062 x 0,0448 = -0,0272	0,0148

6.7 FRONTEIRA EFICIENTE DE INVESTIMENTOS DOS ATIVOS COM RISCO — MODELO DE SHARPE

6.7.1 Fronteira Eficiente — Modelo de Sharpe

Sabemos que o retorno médio da carteira é dado por:

$$l_{\mu_C} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(a_j + b_j R_{\mu_M}\right)$$

ou que

$$l_{\mu_C} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j + R_{\mu_M} \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j .$$

Indiquemos o retorno médio do mercado R_{μ_M} por a_{n+1} e façamos

$$\omega_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j .$$

Com esta conveniente notação podemos escrever que:

$$l_{\mu_C} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j a_j .$$

Procuremos um artifício semelhante para a expressão da variância da carteira.

Como a variância é dada por:

$$l_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \left(b_j^2 R_{S_M}^2 + e_{S_j}^2\right) + 2 \sum_{j<k}^{n} \omega_j \omega_k b_j b_k R_{S_M}^2 ,$$

então, podemos escrever:

$$l_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 e_{S_j}^2 + R_{S_M}^2 \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 b_j^2 + R_{S_M}^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{j \neq k=1}^{n} \omega_j \omega_k b_j b_k ,$$

ou então,

$$l_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 e_{S_j}^2 + R_{S_M}^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_j \omega_k b_j b_k .$$

Indicando $R_{S_M}^2$ por $e_{S_{n+1}}^2$ e fazendo

$$\omega_{n+1}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_j \omega_k b_j b_k ,$$

então, podemos escrever:

$$l_{S_C}^2 = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 e_{S_j}^2 .$$

Para obtermos os pontos, definidos pelas composições

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

candidatos à fronteira eficiente de investimentos, devemos minimizar a variância da carteira $l_{S_C}^2$.

Assim, devemos determinar as composições $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ tais que:

minimize $l_{S_C}^2$,

sob as condições de que:

$$l_{\mu_C} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 e_{S_j}^2$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \quad \text{e} \quad 0 \leq \omega_j \leq 1; \quad j = 1, n.$$

Utilizemos o método dos multiplicadores de Lagrange para resolvermos o problema.

Assim, partimos da função:

$$l_{S_C}^2 = f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j^2 \, e_{S_j}^2 ,$$

onde $e_{S_{n+1}}^2 = R_{S_M}^2$ sujeita às condições:

$$g(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j \, a_j - l_{\mu_C}$$

e

$$h(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j - 1.$$

Observemos que os resultados obtidos deverão levar em conta a condição $0 \leq \omega_j \leq 1$, que não está introduzida no método de Lagrange.

Em seguida, construímos a função objetivo dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \lambda_1, \lambda_2) = f + \lambda_1 h + \lambda_2 g.$$

Calculemos as derivadas parciais de F,

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_j}; \; j = 1, n$$

e, ainda,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \; e \; \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}.$$

Igualando a zero estas derivadas, obtemos um sistema de n+3 equações com n+3 incógnitas dadas por $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \lambda_1, \lambda_2$. A solução deste sistema é que nos fornecerá as composições $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ candidatas a pontos da fronteira eficiente de investimentos com risco.

6.7.2 Caso das Carteiras com três ativos — Generalização

Neste caso, a função objetivo será dada por:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= \sum_{j=1}^{4} \omega_j^2 e_{S_j}^2 + \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^{4} \omega_j - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^{4} \omega_j a_j - l_{\mu_C} \right);$$

ou, desenvolvendo:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \lambda_1, \lambda_2) = \omega_1^2 e_{S_1}^2 + \omega_2^2 e_{S_2}^2 + \omega_3^2 e_{S_3}^2 + \omega_4^2 e_{S_4}^2 + \\ + \lambda_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1) + \\ + \lambda_2(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \omega_3 a_3 + \omega_4 a_4),$$

onde

$$e_{S_4}^2 = R_{S_M}^2 : \text{variância de mercado}$$

e

$$a_4 = R_{\mu_M} : \text{retorno médio do mercado.}$$

Calculando as derivadas parciais e igualando a zero, teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 2\omega_1 e_{S_1}^2 + \lambda_1 + \lambda_2 a_1 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_2} = 2\omega_2 e_{S_2}^2 + \lambda_1 + \lambda_2 a_2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_3} = 2\omega_3 e_{S_3}^2 + \lambda_1 + \lambda_2 a_3 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \omega_4} = 2\omega_4 e_{S_4}^2 + \lambda_1 + \lambda_2 a_4 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \omega_3 a_3 + \omega_4 a_4 - l_{\mu_C} = 0$$

Sabendo que $e_{S_C}^2 = R_{S_M}^2$ e $a_4 = R_{\mu_M}$, então, escrevendo o sistema na forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2e_{S_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 2e_{S_2}^2 & 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 2e_{S_3}^2 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2R_{S_M}^2 & 0 & R_{\mu_M} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & R_{\mu_M} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ l_{\mu_C} \end{bmatrix}$$

ou seja, obtemos um sistema da forma

$$M.W = U$$

onde

$$W = M^{-1}.U,$$

o que nos permitirá obter $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, em função do retorno médio da carteira l_{μ_C}.

$$I_{S_C}^2 = \left(-0{,}0312 + 11{,}6685\, I_{\mu_C}\right)^2 . \,0{,}000197 + \left(0{,}1500 + 7{,}2358\, I_{\mu_C}\right)^2 . \,0{,}000156 + \left(0{,}8811 - 18{,}9043\, I_{\mu_C}\right)^2 . \,0{,}000574 + \left(-0{,}0888 + 2{,}2074\, I_{\mu_C}\right)^2 . \,0{,}005285$$

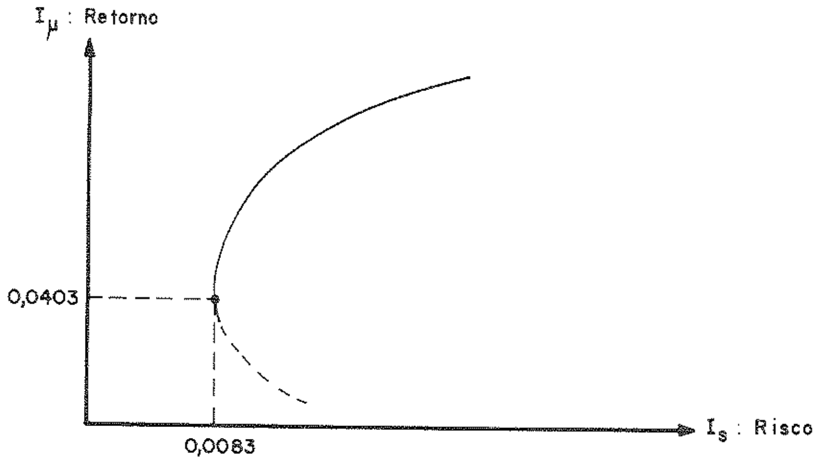
ou

$$I_{S_C}^2 = 0{,}000491 - 0{,}020969 I_{\mu_C} + 0{,}260427 I_{\mu_C}^2$$

que também pode ser escrita na forma

$$\frac{\left(I_{S_C} - 0\right)^2}{(0{,}0083)^2} - \frac{\left(I_{\mu_C} - 0{,}0403\right)^2}{(0{,}0163)^2} = 1,$$

o que nos dá a equação de uma hipérbole, conforme o gráfico abaixo.



Observemos que os pontos do ramo superior da hipérbole representam carteiras candidatas a pontos da fronteira eficiente de investimentos com risco.

B) PONTOS DA FRONTEIRA EFICIENTE

Para obtermos os pontos da hipérbole que são da fronteira eficiente, devemos impor a condição $0 \le \omega_j \le 1$, $j = 1, 2, 3$.

Então, escrevendo as inequações para ω_1, ω_2 e ω_3, teremos:

$$0 \le 0{,}0312 + 11{,}6685 I_{\mu_C} \le 1$$
$$0 \le 0{,}1500 + 7{,}2358 I_{\mu_C} \le 1$$
$$0 \le 0{,}8811 - 18{,}9043 I_{\mu_C} \le 1$$

que resolvidas nos dão:

$$0{,}0027 \le I_{\mu_C} \le 0{,}0884$$
$$-0{,}0207 \le I_{\mu_C} \le 0{,}1589$$
$$-0{,}0063 \le I_{\mu_C} \le 0{,}0466.$$

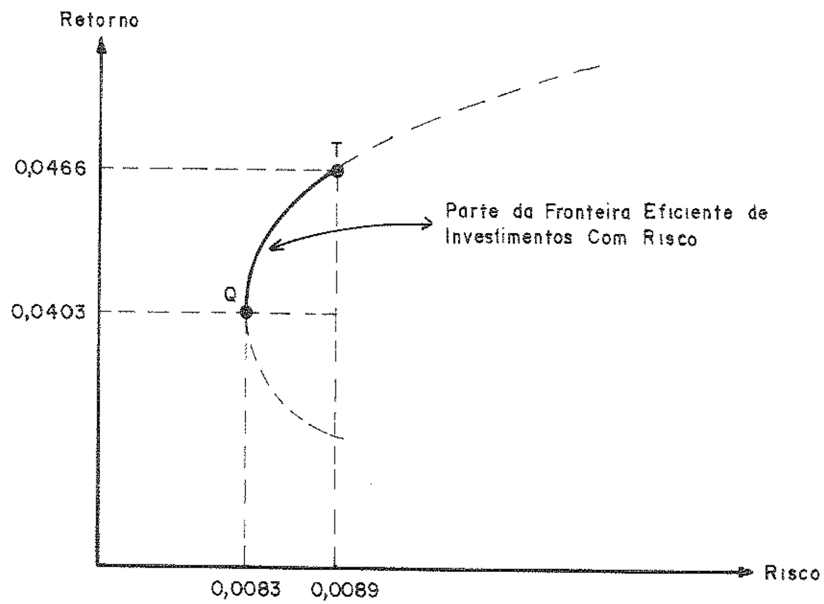
A solução simultânea do sistema será:

$$0{,}0027 \le I_{\mu_C} \le 0{,}0466.$$

Como a parte da hipérbole que corresponde às carteiras candidatas a fronteira apresentam $I_{\mu_C} \ge 0{,}0403$, então, a condição final para o retorno será:

$$0{,}0403 \le I_{\mu_C} \le 0{,}0466$$

Representando graficamente teremos:



Observemos que a localização dos pontos M e A, da hipérbole, são apenas exemplos.

A partir destas condições, podemos examinar o que ocorre com o risco e retorno à medida que variarmos a proporção ω do ativo A na carteira. Esta variação pode ser medida calculando

$$\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega} \text{ e } \frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega},$$

que nos dão os incrementos de retorno e risco à medida que damos um acréscimo, positivo ou negativo, a ω.

Assim, teremos:

$$\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega} = l_{\mu_A} - R_{\mu_M}$$

$$\frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega} = \frac{2\omega l_{S_A}^2 - 2(1-\omega)R_{S_M}^2 + 2(1-2\omega)\operatorname{cov}(l_A, R_M)}{2\sqrt{\omega^2 l_{S_A}^2 + (1-\omega)^2 R_{S_M}^2 + 2\omega(1-\omega)\operatorname{cov}(l_A, R_M)}}$$

o que nos possibilita calcular os coeficientes angulares das retas tangentes à hipérbole, formada pelas carteiras de A e M, para cada proporção ω_0 fixada.

Coeficiente angular das retas tangentes à hipérbole =

$$m_{\omega_0} = \left.\frac{\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega}}{\frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega}}\right|_{\omega_0}$$

6.8.3 Condições de Equilíbrio de Mercado — A Equação Fundamental do CAPM

Consideremos a Carteira de Mercado M e o ativo de risco A, sendo que, naturalmente, o ativo A faz parte da carteira M. Assim, quando nos propomos a elaborar carteiras do tipo C, formadas pela composição de A com M na proporção $(\omega, 1-\omega)$, estamos também alterando a carteira de mercado M. Esta alteração ocorre devido à procura pelo ativo A na proporção ω, o que corresponde a um acréscimo em relação à participação de A na carteira de mercado M.

Assim, a condição de equilíbrio do mercado ocorre para $\omega = 0$, ou seja, quando não há procura do ativo A em proporções maiores do que sua participação na carteira de mercado M.

Desta forma, tomando as carteiras do tipo C, formadas pela composição de A e M, o mercado estará em equilíbrio para C = M, ou seja, quando $\omega = 0$.

Então, o coeficiente angular da reta tangente à hipérbole pelo ponto M, ou seja, nas condições de equilíbrio do mercado, será dado pela equação dos coeficientes angulares das retas tangentes a hipérbole para $\omega = 0$, assim:

$$m_{\omega=0} = \left.\frac{\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega}}{\frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega}}\right|_{\omega=0} = \frac{l_{\mu_A} - R_{\mu_M}}{\frac{\operatorname{cov}(l_A, R_M) - R_{S_M}^2}{R_{S_M}}}$$

Por outro lado, para as carteiras C, formadas pelos ativos A e M, sabemos que a razão recompensa-variabilidade de uma carteira é dada por:

$$\mathrm{RV}_C = \frac{l_{\mu_C} - l_F}{l_{S_C}}.$$

A condição de máxima razão recompensa-variabilidade pode ser obtida pela determinação de ω tal que:

$$\frac{\partial \mathrm{RV}_C}{\partial \omega} = 0$$

Derivando a razão, temos:

$$\frac{\partial \mathrm{RV}_C}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega}.l_{S_C} - \frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega}.\left(l_{\mu_C} - l_F\right)}{l_{S_C}^2}$$

e, impondo a igualdade a zero, obtemos:

$$\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega}.l_{S_C} - \frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega}\left(l_{\mu_C} - l_F\right) = 0$$

ou, ainda,

$$\frac{\frac{\partial l_{\mu_C}}{\partial \omega}}{\frac{\partial l_{S_C}}{\partial \omega}} = \frac{l_{\mu_C} - l_F}{l_{S_C}},$$

onde o primeiro membro da equação é o coeficiente angular das retas tangentes à hipérbole definida pelas carteiras do tipo C, formadas pelos ativos A e M. O segundo membro corresponde à razão recompensa-variabilidade da carteira C de máxima razão.

Assim, em condições de equilíbrio de mercado teremos $\omega = 0$, ou seja, C = M, então, a igualdade terá a forma:

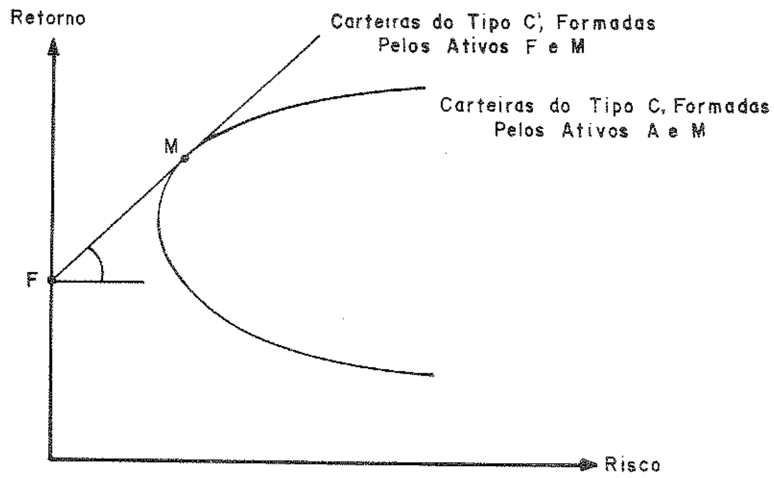
$$\left.\frac{\frac{\partial I_{\mu C}}{\partial \omega}}{\frac{\partial I_{SC}}{\partial \omega}}\right|_{\omega=0} = \frac{R_{\mu_M} - I_F}{R_{S_M}}$$

Observemos que as carteiras do tipo C' formadas pelos ativos M e F, livres de risco, são pontos de uma reta com coeficiente angular dado por RV_M, ou seja:

$$I_{\mu C'} = I_F + \frac{R_{\mu_M} - I_F}{R_{S_M}}.I_{S_{C'}}.$$

Assim, a equação da reta por F e M será tangente em M à hipérbole formada pelas carteiras do tipo C formadas pelos ativos A e M.

O gráfico seguinte nos mostra as carteiras do tipo C e C'.



Igualando as expressões que nos dão o coeficiente angular da reta tangente à hipérbole pelo ponto M, teremos:

$$\frac{I_{\mu_A} - R_{\mu_M}}{\frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M) - R_{S_M}^2}{R_{S_M}}} = \frac{R_{\mu_M} - I_F}{R_{S_M}}.$$

Então,

$$I_{\mu_A} = R_{\mu_M} + \frac{R_{\mu_M} - I_F}{R_{S_M}}.\frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M) - R_{S_M}^2}{R_{S_M}}$$

ou

$$I_{\mu_A} = I_F + \left(R_{\mu_M} - I_F\right) + \left(R_{\mu_M} - I_F\right).\frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M) - R_{S_M}^2}{R_{S_M}^2},$$

que nos dá a expressão final:

$$I_{\mu_A} = I_F + \frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M)}{R_{S_M}^2}.\left(R_{\mu_M} - I_F\right).$$

Esta expressão, obtida por Sharpe, é a equação fundamental do CAPM (modelo de precificação de ativos financeiros), caracterizando que o preço de um ativo A, ou seja, seu retorno médio I_{μ_A}, é formado por duas parcelas:

— I_F, que corresponde ao preço do ativo livre de risco;
— uma segunda parcela, formada por um ganho básico dado por $\left(R_{\mu_M} - I_F\right)$ do qual o ativo recebe uma proporção

$$\frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M)}{R_{S_M}^2},$$

que caracteriza o nível de risco do ativo em relação ao mercado.

6.8.4 Coeficiente β de um ativo

A partir da equação básica do CAPM, que nos dá o retorno médio de um ativo A, em função do retorno I_F de um ativo livre de risco e do risco-retorno da carteira de mercado M, expressa por:

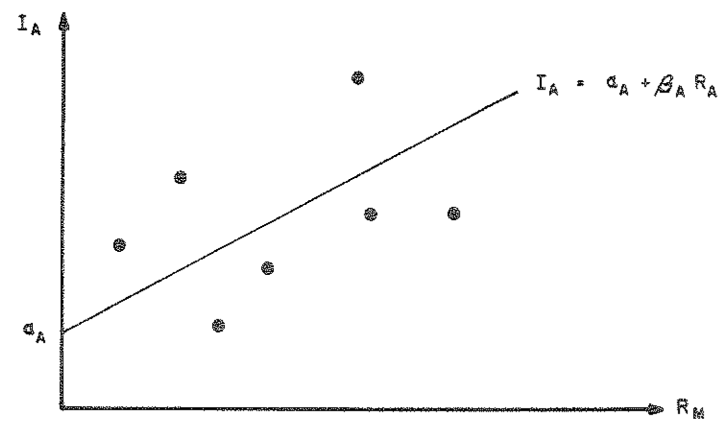
$$I_{\mu_A} = I_F + \frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M)}{R_{S_M}^2}.\left(R_{\mu_M} - I_F\right);$$

definimos o coeficiente beta do ativo A, indicado por β_A, por:

$$\beta_A = \frac{\operatorname{cov}(I_A, R_M)}{R_{S_M}^2}.$$

Assim, a equação pode ser escrita como:

$$I_{\mu_A} = I_F + \beta_A\left(R_{\mu_M} - I_F\right).$$



onde β_A, coeficiente angular da reta, caracteriza o risco sistemático, ou conjuntural, do ativo em relação ao mercado.

Partindo da equação $I_A = a_A + \beta_A R_M$ e examinando o caso em que o ativo A é o próprio mercado M, então a equação tomaria a forma:

$$I_M = R_M$$

e, nestas condições, o coeficiente β, do mercado, será $\beta_M = 1$.

Então, dado um ativo A e calculado β_A, podemos compará-lo com o índice beta do mercado β_M. Teremos as seguintes possibilidades:

1) $\beta_M = \beta_A = 1$. Neste caso, o ativo A se comporta da mesma forma que o mercado. Se o mercado sobe, o ativo sobe no mesmo percentual, o mesmo ocorrendo se houver uma baixa do mercado. Estes ativos são chamados **tipo médio**.[9]

2) $\beta_A > \beta_M = 1$. Estes ativos são do **tipo agressivo**.[10] Se o mercado sobe em determinado percentual, o ativo sobe mais do que o mercado e se o mercado cai em determinado percentual, o ativo cai mais que o mercado.

3) $\beta_A < \beta_M = 1$. Estes ativos são do **tipo defensivo**.[11] Em relação ao mercado.

9. BRITO. Op. cit., p. 65.
10. Ibid.
11. Ibid

Para $\beta_A > 0$, se o mercado sobe em determinado percentual, o ativo também sobe em percentual menor que o do mercado; se o mercado cai em determinado percentual, o ativo cai em percentual menor que o do mercado.

Para $\beta_A < 0$, o ativo se comporta de forma contrária ao mercado, ou seja, se o mercado sobe, o ativo cai e vice-versa.

O caso de $\beta_A = 0$ significa que o ativo é indiferente ao mercado.

Uma representação do comportamento do ativo em relação ao mercado é obtido por um gráfico, no sistema $I_A \times R_M$, onde representamos retas, passando pela origem do sistema, que tenham o mesmo coeficiente angular, índice β, das linhas características dos ativos, como segue: