L-470

12

1. ed. 1993; 8ª tiragem

ISBN 85-224-0998-6

Capa: Aldo Catelli
Composição: PC Editoração Eletrônica Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Securato, José Roberto
Decisões financeiras em condições de risco / José Roberto Securato. – São Paulo : Atlas, 1996.

Bibliografia.
ISBN 85-224-0998-6

1. Administração financeira 2. Decisões – Matemática financeira I. Título.

93-1999 CDD-658.15

Índices para catálogo sistemático:
1. Administração financeira : Empresas 658.15
2. Finanças : Empresas : Administração 658.15
3. Gerência financeira : Administração de empresas 658.15

Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

Impresso no Brasil/*Printed in Brazil*

ou, ainda,

$$l_{S_C}^2 = \frac{A\left(l_{\mu_C} - l_{\mu_2}\right)^2 - 2B\left(l_{\mu_C} - l_{\mu_2}\right)\left(l_{\mu_1} - l_{\mu_2}\right)}{\left(l_{\mu_1} - l_{\mu_2}\right)^2} + l_{S_2}^2 .$$

Fazendo:

$$l_{\mu_1} - l_{\mu_2} = R$$

e

$$l_{\mu_C} - l_{\mu_2} = Z,$$

o que equivale a uma translação em relação ao eixo dos riscos, de maneira que a curva a ser obtida não modifica sua forma, teremos:

$$l_{S_C}^2 = \frac{AZ^2 - 2BZR}{R^2} + l_{S_2}^2$$

ou

$$l_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - l_{S_2}^2 = 0.$$

Discussão da Curva Risco-Retorno de uma Carteira com Dois Ativos

Nosso problema é obter a forma da curva risco-retorno definida pela equação acima, nas variáveis l_{S_C}, risco da carteira, e $Z = l_{\mu_C} - l_{\mu_2}$, que relaciona o retorno médio da carteira l_{μ_C}.

Lembremo-nos que dada uma equação na forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

devemos calcular os determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se $D_1 \neq 0$, então, a equação representará:

— uma elipse, se $D_2 > 0$;
— uma hipérbole, se $D_2 < 0$;
— uma parábola, se $D_2 = 0$.

Escrevendo nossa equação na forma geral dada, teremos:

$$1.I_{S_C}^2 + \left(-\frac{A}{R^2}\right)Z^2 + 2.0.I_{S_C}.Z + 2.0.I_{S_C} + 2.\frac{B}{R}.Z + \left(-I_{S_2}^2\right) = 0.$$

Assim, os determinantes serão dados por:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} & \frac{B}{R} \\ 0 & \frac{B}{R} & -I_{S_2}^2 \end{vmatrix} = \frac{A}{R^2}.I_{S_2}^2 - \frac{B^2}{R^2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{R^2} \end{vmatrix} = -\frac{A}{R^2}$$

Caso a:

$D_1 = 0$

Se $D_1 = 0$, então $\frac{A}{R^2}.I_{S_2}^2 = \frac{B^2}{R^2}$

ou $A.I_{S_2}^2 = B^2$, com $R = I_{\mu_1} - I_{\mu_2} \neq 0$.

Substituindo os valores de A e B, teremos:

$$\left[I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)\right]I_{S_2}^2 = \left[I_{S_2}^2 - \operatorname{cov}(I_1, I_2)\right]^2,$$

então

$$I_{S_1}^2 . I_{S_2}^2 + I_{S_2}^4 - 2.I_{S_2}^2 \operatorname{cov}(I_1, I_2) = I_{S_2}^4 - 2I_{S_2}^2 \operatorname{cov}(I_1, I_2) + \operatorname{cov}^2(I_1, I_2)$$

ou

$$I_{S_1}^2 . I_{S_2}^2 \operatorname{cov}^2(I_1, I_2)$$

e daí

$$\operatorname{cov}(I_1, I_2) = \pm I_{S_1} . I_{S_2},$$

o que ocorrerá caso os ativos considerados tenham correlação linear perfeita, positiva ou negativa.

Nestas condições, teremos:

$$A = I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\left(\pm I_{S_1} I_{S_2}\right) = \left(I_{S_2} \mp I_{S_1}\right)^2 = U^2$$

$$B = I_{S_2}^2 - \left(\pm I_{S_1} I_{S_2}\right) = I_{S_2}\left(I_{S_2} \mp I_{S_1}\right) = I_{S_2}.U.$$

A partir da equação

$$I_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2}Z^2 + 2\frac{B}{R}Z - I_{S_2}^2 = 0,$$

substituindo os valores de A e B, vem:

$$\frac{U^2}{R^2}Z^2 - 2\frac{I_{S_2}U}{R}Z + I_{S_2}^2 - I_{S_C}^2 = 0.$$

O discriminante da equação em Z será:

$$d = \frac{4I_{S_2}^2 U^2}{R^2} - 4.\frac{U^2}{R^2}.\left(I_{S_2}^2 - I_{S_C}^2\right) = 4.\frac{U^2}{R^2}.I_{S_C}^2;$$

logo,

$$Z = \frac{\frac{2I_{S_2}U}{R} \pm \frac{2UI_{S_C}}{R}}{\frac{2U^2}{R^2}} = \frac{I_{S_2} \pm I_{S_C}}{\frac{U}{R}} = \frac{R}{U}\left(I_{S_2} \pm I_{S_C}\right).$$

Assim, fatorando a equação de segundo grau, obteremos as equações das retas:

$$Z - \frac{R}{U}\left(I_{S_2} + I_{S_C}\right) = 0 \text{ e } Z - \frac{R}{U}\left(I_{S_2} - I_{S_C}\right) = 0.$$

Substituindo os valores de Z, R e U, teremos as retas:

$$r_1 : I_{\mu_C} = \frac{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}{I_{S_2} \mp I_{S_1}} I_{S_C} + \frac{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}{I_{S_2} \mp I_{S_1}} I_{S_2} + I_{\mu_2}$$

e

$$r_2 : I_{\mu_C} = -\frac{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}{I_{S_2} \mp I_{S_1}} I_{S_C} + \frac{I_{\mu_1} - I_{\mu_2}}{I_{S_2} \mp I_{S_1}} I_{S_2} + I_{\mu_2},$$

onde utilizamos $I_{S_2} - I_{S_1}$, no caso de correlação positiva, e $I_{S_2} + I_{S_1}$ no caso de correlação negativa. Em qualquer dos casos, as retas serão perpendiculares.

Caso b: $D_1 \neq 0$ e $D_2 = 0$.

Se $D_1 \neq 0$, devemos examinar o determinante D_2, onde $D_2 = -\frac{A}{R^2}$. Substituindo o valor de A teremos:

$$D_2 = -\frac{l_{S_1}^2 + l_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_2)}{R^2}.$$

Se $D_2 \geq 0$, teremos:

$$-\left(l_{S_1}^2 + l_{S_2}^2\right) + 2\operatorname{cov}(l_1, l_2) \geq 0$$

$$l_{S_1}^2 + l_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(l_1, l_2) \leq 0$$

ou

$$l_{S_1}^2 + l_{S_2}^2 \leq 2\operatorname{cov}(l_1, l_2).$$

Sabemos que:

$$-1 \leq \frac{\operatorname{cov}(l_1, l_2)}{l_{S_1}\, l_{S_2}} \leq 1$$

ou

$$-l_{S_1}\, l_{S_2} \leq \operatorname{cov}(l_1, l_2) \leq l_{S_1}\, l_{S_2};$$

logo,

$$l_{S_1}^2 + l_{S_2}^2 \leq 2\operatorname{cov}(l_1, l_2) \leq 2 l_{S_1}\, l_{S_2},$$

então,

$$l_{S_1}^2 - 2 l_{S_1}\, l_{S_2} + l_{S_2}^2 \leq 0$$

ou

$$\left(l_{S_1} - l_{S_2}\right)^2 \leq 0,$$

o que será válido apenas para $l_{S_1} - l_{S_2} = 0$, ou seja, $l_{S_1} = l_{S_2}$.

Assim, se $l_1 = l_2$, teremos:

$$2 l_{S_1}^2 = 2\operatorname{cov}(l_1, l_2)$$

ou

$$\operatorname{cov}(l_1, l_2) = l_{S_1}^2 = l_{S_2}^2.$$

Mas isto só será possível caso

$$\frac{\operatorname{cov}(l_1, l_2)}{l_{S_1}\, l_{S_2}} = 1,$$

ou seja, se houver perfeita correlação linear positiva.

Assim, $\operatorname{cov}(l_1, l_2) = l_{S_1}^2 = l_{S_2}^2 = S^2$; substituindo na equação da carteira, dada por:

$$l_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2} Z^2 + 2\frac{B}{R} Z - l_{S_2}^2 = 0$$

onde

$$A = 2S^2 - 2S^2 = 0 \quad \text{e} \quad B = S^2 - S^2 = 0,$$

temos:

$$l_{S_C}^2 - S^2 = 0 \quad \text{ou} \quad l_{S_C} = S,$$

o que nos dá a equação de uma reta paralela ao eixo dos retornos da carteira; ou seja, a carteira terá sempre o mesmo risco, para qualquer composição da mesma.

Caso c:

Finalmente, podemos concluir que, em geral, $D_1 \neq 0$ e $D_2 < 0$, exceto nos casos de correlação perfeita entre os retornos dos ativos que compõem a carteira. Assim, a curva representativa do retorno médio de uma carteira em função do risco, será uma hipérbole; menos nos casos citados onde a representação gráfica é a da reta.

5.5.5 Equação Reduzida da Hipérbole, correspondente ao Risco-retorno de uma Carteira com dois ativos

Partindo da equação

$$l_{S_C}^2 - \frac{A}{R^2} Z^2 + 2\frac{B}{R} Z - l_{S_2}^2 = 0,$$

podemos escrevê-la na forma:

$$l_{S_C}^2 - \left[\left(\frac{\sqrt{A}\, Z}{R}\right)^2 - 2\,\frac{\sqrt{A}\, Z}{R}\,\frac{B}{\sqrt{A}} + \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2\right] + \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 - l_{S_2}^2 = 0$$

ou

$$l_{S_C}^2 - \left(\frac{\sqrt{A}\, Z}{R} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 + \left[\left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2 - l_{S_2}^2\right] = 0$$

$$l_{S_C}^2 - \frac{\left(Z - \frac{RB}{A}\right)^2}{\frac{R^2}{A}} = l_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2$$

Daí, substituindo $Z = I_{\mu_C} - I_{\mu_2}$, temos:

$$\frac{\left(I_{S_C} - 0\right)^2}{I_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2} - \frac{\left(I_{\mu_C} - \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right)\right)^2}{\frac{R^2}{A}\left[I_{S_2}^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2\right]} = 1,$$

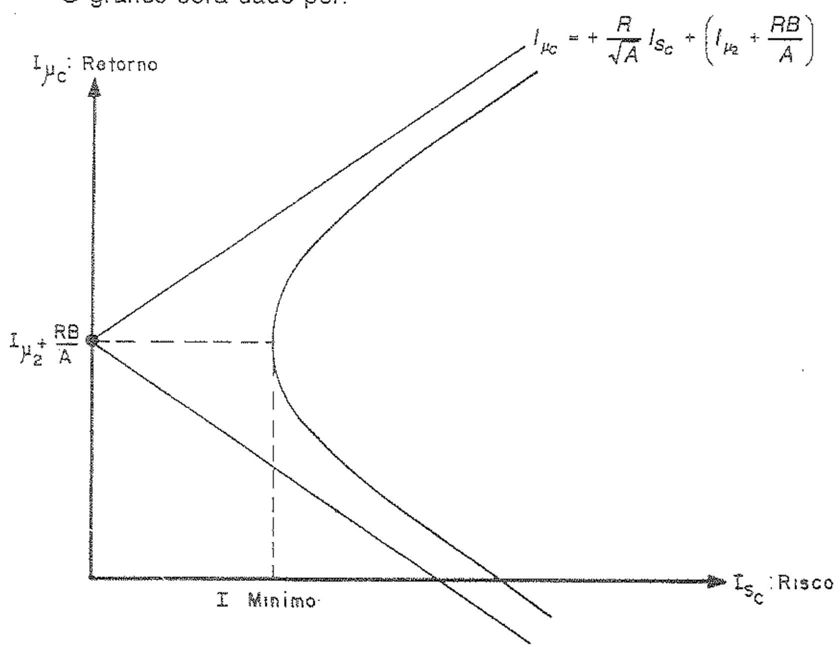
o que nos dá a equação reduzida da hipérbole de centro

$$\left(I_{S_C}; I_{\mu_C}\right)_{\text{centro}} = \left(0; I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right);$$

com assíntotas:

$$I_{\mu_C} = \pm\frac{R}{\sqrt{A}} I_{S_C} + \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right).$$

O gráfico será dado por:



Observação

Lembrando que a equação reduzida da hipérbole, de centro $(h;k)$, é dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

então, as assíntotas são dadas por:

$$y = \frac{b}{a}(x-h) + k,$$

a de inclinação para a direita, e

$$y = -\frac{b}{a}(x-h) + k,$$

a de inclinação para a esquerda.

Em nosso caso, as assíntotas serão dadas por:

$$I_{\mu_C} = \pm\frac{R}{\sqrt{A}} I_{S_C} + \left(I_{\mu_2} + \frac{RB}{A}\right),$$

ou substituindo R, B e A teremos:

$$I_{\mu_C} = \pm\frac{\left(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}\right)}{\sqrt{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)}} I_{S_C} + I_{\mu_2} + \frac{\left(I_{\mu_1} - I_{\mu_2}\right)\left(I_{S_2}^2 - \operatorname{cov}(I_1, I_2)\right)}{I_{S_1}^2 + I_{S_2}^2 - 2\operatorname{cov}(I_1, I_2)}.$$

Exemplo 1 — Cálculo do Risco e Retorno de uma Carteira

Consideremos que três investidores estudem a possibilidade de aplicar em ouro, ações ou CDB por um prazo de 180 dias. O primeiro passo será estabelecer as distribuições de probabilidade dos vários ativos. Isto será feito com base no histórico das aplicações e em fatores que os investidores julguem importantes para o futuro das aplicações. Em termos de economia brasileira é interessante trabalharmos com retornos previstos, expurgados os efeitos inflacionários. Deste modo, o efeito da inflação será captado como um risco sistemático devido à conjuntura a que o ativo está sujeito. Em geral, denominamos o retorno previsto, expurgada a inflação, de retorno real, embora saibamos que as componentes de risco próprio do ativo estarão embutidas nesta taxa.

Para efeito do exemplo que queremos elaborar, vamos admitir as distribuições de probabilidades dos ativos, segundo as tabelas abaixo:

Retorno — OURO		
ao mês	no período (180 dias)	Probabilidade
0,01	0,0615	0,50
0,02	0,1262	0,20
-0,01	-0,0585	0,30

Retorno — AÇÕES		
do mês	do período (180 dias)	Probabilidade
0,01	0,0615	0,40
0,03	0,1941	0,40
0,04	0,2653	0,10
-0,06	-0,3101	0,10

Retorno — CDB		
ao mês	no período	Probabilidade
0,005	0,0304	0,40
0,015	0,0934	0,60

A) CÁLCULO DAS MÉDIAS E DESVIOS (RISCOS) DOS ATIVOS

Para cada ativo fixado podemos estabelecer a média e o desvio (risco), como segue:

1. Ouro

$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0615 \times 0{,}50 + 0{,}1262 \times 0{,}20 + (-0{,}0585) \times 0{,}30 = 0{,}0384$$

Assim, o retorno médio do ouro será:

$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0384 = 3{,}84\%\ \text{a.s.}$$

$$E^2_{ouro} = (0{,}0615)^2 \times 0{,}50 + (0{,}1262)^2 \times 0{,}20 + (-0{,}0585)^2 \times 0{,}30 = 0{,}0061,$$

então,

$$I_{s_{ouro}} = \sqrt{0{,}0061 - (0{,}0384)^2} = 0{,}0680.$$

Logo, o desvio será:

$$I_{s_{ouro}} = 0{,}0680 = 6{,}80\%\ \text{a.s.}$$

2. Ações

$$I_{\mu_{ações}} = 0{,}0615 \times 0{,}40 + 0{,}1941 \times 0{,}40 + 0{,}2653 \times 0{,}10 + (-0{,}3101) \times 0{,}10 = 0{,}0978$$

Desta forma, o retorno médio das ações será:

$$I_{\mu_{ações}} = 0{,}0978 = 9{,}78\%\ \text{a.s.}$$

$$E^2_{ações} = (0{,}0615)^2 \times 0{,}40 + (0{,}1941)^2 \times 0{,}40 + (0{,}2653)^2 \times 0{,}10 + (-0{,}3101)^2 \times 0{,}10 = 0{,}0332,$$

então,

$$I_{s_{ações}} = \sqrt{0{,}0332 - (0{,}0978)^2} = 0{,}1539.$$

Logo, o desvio será:

$$I_{s_{ações}} = 0{,}1539 = 15{,}39\%\ \text{a.s.}$$

3. CDB

$$I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0304 \times 0{,}40 + 0{,}0934 \times 0{,}60 = 0{,}0682$$

Então, o retorno médio do CDB será:

$$I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0682 = 6{,}82\%\ \text{a.s.}$$

$$E^2_{CDB} = (0{,}0304)^2 \times 0{,}40 + (0{,}0934)^2 \times 0{,}60 = 0{,}0056,$$

então,

$$I_{s_{CDB}} = \sqrt{0{,}0056 - (0{,}0682)^2} = 0{,}0309.$$

Logo, o desvio será:

$$I_{s_{CDB}} = 0{,}0309 = 3{,}09\%\ \text{a.s.}$$

B) COMPOSIÇÃO DAS CARTEIRAS

Fixadas as distribuições de probabilidades dos vários ativos, consideremos que os três investidores componham suas carteiras da seguinte forma:

	Composição da Carteira (%)		
Investidor	Ouro	Ações	CDB
A	40	—	60
B	65	35	—
C	30	20	50

O passo seguinte será calcular o risco e o retorno de cada carteira.

C) CÁLCULO DO RISCO E RETORNO DE CADA CARTEIRA

1. Investidor A

A partir das fórmulas para o cálculo das médias e riscos das carteiras, teremos:

— Retorno médio da carteira A:

$$I_{\mu_A} = 0{,}40 \times I_{\mu_{ouro}} + 0{,}60 \times I_{\mu_{CDB}}$$
$$I_{\mu_A} = 0{,}40 \times 0{,}0384 + 0{,}60 \times 0{,}0682$$
$$I_{\mu_A} = 0{,}0563 = 5{,}63\%\text{ a.s.}$$

— Desvio (risco) da carteira A: I_{S_A}

$$I_{S_A} = \sqrt{0{,}40^2\, I^2_{S_{ouro}} + 0{,}60^2\, I^2_{S_{ouro}} + 2.0{,}40.0{,}60.\operatorname{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)},$$

onde

$$I_{S_{ouro}} = 0{,}0680 \quad\text{e}\quad I_{S_{CDB}} = 0{,}0309.$$

Nosso problema é calcular a covariância entre os retornos do ouro e do CDB, indicada por $\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB})$.

Para o cálculo da covariância, devemos conhecer a distribuição conjunta de probabilidades, dos retornos do ouro e CDB, como segue:

		OURO			
		0,0615	0,1262	-0,0585	Probab. CDB
CDB	0,0304	0,20	0,15	0,05	0,40
	0,0934	0,30	0,05	0,25	0,60
	Probab. Ouro	0,50	0,20	0,30	

onde as probabilidades conjuntas, consideradas como dados neste exemplo, podem ser obtidas por freqüência relativa ou probabilidades subjetivas.

Assim, a covariância será dada por:

$$\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) =$$
$$\sum_{I_{ouro}} \sum_{I_{CDB}} \left(I_{ouro} - I_{\mu_{ouro}}\right)\left(I_{CDB} - I_{\mu_{CDB}}\right).P\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= (0{,}0615 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0687).0{,}20 + \\ &+ (0{,}0615 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}30 + \\ &+ (0{,}1262 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0682).0{,}15 + \\ &+ (0{,}1262 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}05 + \\ &+ (-0{,}0585 - 0{,}0384)(0{,}0304 - 0{,}0682).0{,}05 + \\ &+ (-0{,}0585 - 0{,}0384)(0{,}0934 - 0{,}0682).0{,}25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= (0{,}0231) \times (-0{,}0378) \times 0{,}20 = \\ &+ (0{,}0231) \times (0{,}0252) \times 0{,}30 + \\ &+ (0{,}0878) \times (-0{,}0378) \times 0{,}15 + \\ &+ (0{,}0878) \times (0{,}0252) \times 0{,}05 + \\ &+ (-0{,}0969) \times (-0{,}0378) \times 0{,}05 + \\ &+ (-0{,}0969) \times (0{,}0252) \times 0{,}25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= (-0{,}0002) + (0{,}0002) + (-0{,}0005) + \\ &+ (0{,}0001) + (0{,}0002) + (-0{,}0006)\\ \operatorname{cov}(I_{ouro}, I_{CDB}) &= -0{,}0008\end{aligned}$$

Calculando o desvio da carteira A, teremos:

$$I_{S_A} = \sqrt{0{,}40^2.0{,}0680^2 + 0{,}60^2.0{,}0309^2 + 2.0{,}40.0{,}60.(-0{,}0008)}$$

daí,

$$I_{S_A} = 0{,}0264 = 2{,}64\%\text{ a.s.}$$

Conclusão

Carteira A:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 40%; CDB = 60%
RETORNO MÉDIO = 5,63% a.s.
RISCO (DESVIO) = 2,64% a.s.

2. Investidor B

Procedendo da mesma forma que para o investidor A, teremos:

— **Retorno médio da carteira B:**

$$l_{\mu_B} = 0,65 \times l_{\mu_{ouro}} + 0,35 \times l_{\mu_{ações}}$$
$$l_{\mu_B} = 0,65 \times 0,0384 + 0,35 \times 0,0978$$
$$l_{\mu_B} = 0,0592 = 5,92\% \text{ a.s.}$$

— **Desvio (risco) da carteira B:** l_{S_B}

$$l_{S_B} = \sqrt{0,65^2.l^2_{S_{ouro}} + 0,35^2.l^2_{S_{ações}} + 2.0,65.0,35.\text{cov}(l_{ouro}, l_{ações})},$$

onde

$$l_{S_{ouro}} = 0,0680 \text{ e } l_{S_{ações}} = 0,1539.$$

Novamente, a questão é calcular $\text{cov}(l_{ouro}, l_{ações})$.

Como no caso anterior, vamos considerar como conhecida a distribuição conjunta de probabilidades dos retornos por meio da tabela:

		OURO			
		0,0615	0,1262	-0,0585	Prob. Ações
AÇÕES	0,0615	0,20	0,10	0,10	0,40
	0,1941	0,18	0,07	0,15	0,40
	0,2653	0,05	0	0,05	0,10
	-0,3101	0,07	0,03	0	0,10
	Prob. Ouro	0,50	0,20	0,30	

Assim,

$$\text{cov}(l_{ouro}, l_{ações}) =$$
$$= \sum_{l_{ouro}} \sum_{l_{ações}} (l_{ouro} - l_{\mu_{ouro}})(l_{ações} - l_{\mu_{ações}}).p(l_{ouro}, l_{ações})$$

$$\text{cov}(l_{ouro}, l_{ações}) = (0,0615 - 0,0384)[(0,0615 - 0,0978).0,20 +$$
$$+ (0,1941 - 0,0978).0,18 +$$
$$+ (0,2653 - 0,0978).0,05 +$$
$$+ (-0,3101 - 0,0978).0,07] +$$

$$+ (0,1262 - 0,0384)[(0,0615 - 0,0978).0,10 +$$
$$+ (0,1941 - 0,0978).0,07 +$$
$$+ (0,2653 - 0,0978).0 +$$
$$+ (-0,3101 - 0,0978).0,03] +$$

$$+ (-0,0585 - 0,0384)[(0,0615 - 0,0978).0,10 +$$
$$+ (0,1941 - 0,0978).0,07 +$$
$$+ (0,2653 - 0,0978).0,05 +$$
$$+ (-0,3101 - 0,0978).0,03]$$

Logo, $\text{cov}(l_{ouro}, l_{ações}) = -0,0010$.

Calculando o desvio da carteira B, teremos:

$$l_{S_B} = \sqrt{0,65^2.0,0680^2 + 0,35^2.0,1539^2 + 2.0,65.0,35.(-0,0010)},$$

assim,

$$l_{S_B} = 0,0663 = 6,63\% \text{ a.s.}$$

Conclusão

Carteira B:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 65%; Ações = 35%
RETORNO MÉDIO = 5,92% a.s.
RISCO (DESVIO) = 6,63%

3. Investidor C

Neste caso, temos uma carteira composta de três ativos e devemos examinar a forma de obter o retorno médio da carteira e o desvio. Os cálculos serão análogos aos desenvolvidos, como segue.

— **Média da Carteira**

$$l_C = 0,30.l_{ouro} + 0,20.l_{ações} + 0,50.l_{CDB}$$

então, a média será

$$l_{\mu_C} = E[l_C] = E[0,30.l_{ouro} + 0,20.l_{ações} + 0,50.l_{CDB}]$$
$$l_{\mu_C} = 0,30.l_{\mu_{ouro}} + 0,20.l_{\mu_{ações}} + 0,50.l_{\mu_{CDB}}$$

ou

$$l_{\mu_C} = 0,30 \times 0,0384 + 0,20 \times 0,0978 + 0,50 \times 0,0682 = 0,0652.$$

Assim, o retorno médio da carteira C será:

$$I_{\mu_C} = 0{,}0652 = 6{,}52\%\text{ a.s.}$$

— **Desvio (risco) da carteira**

$$I_{S_C}^2 = S^2(I_C) = S^2\left(0{,}30.I_{ouro} + 0{,}20.I_{ações} + 0{,}50.I_{CDB}\right)$$

$$\begin{aligned} I_{S_C}^2 = {} & 0{,}30^2.I_{S_{ouro}}^2 + 0{,}20^2.I_{S_{ações}}^2 + 0{,}50^2.I_{S_{CDB}}^2 + \\ & + 2 \times 0{,}30 \times 0{,}20 \times \operatorname{cov}\left(I_{ouro}, I_{ações}\right) \\ & + 2 \times 0{,}30 \times 0{,}50 \times \operatorname{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right) \\ & + 2 \times 0{,}20 \times 0{,}50 \times \operatorname{cov}\left(I_{ações}, I_{CDB}\right) \end{aligned}$$

onde $I_{S_{ouro}} = 0{,}0680$, $I_{S_{ações}} = 0{,}1530$ e $I_{S_{CDB}} = 0{,}0309$.

Devemos calcular a $\operatorname{cov}\left(I_{ações}, I_{CDB}\right)$ visto que as demais covariâncias já foram calculadas nos casos "a" e "b". Como nos casos anteriores, vamos admitir como conhecida a distribuição conjunta de probabilidades dos retornos das ações e CDB, como segue:

		CDB		
		0,0304	0,0934	Prob. Ações
AÇÕES	0,0615	0,05	0,35	0,40
	0,1941	0,30	0,10	0,40
	0,2653	0,05	0,05	0,10
	-0,3101	0	0,10	0,10
	Prob. CDB	0,40	0,60	

Então,

$$\operatorname{cov}\left(I_{CDB}, I_{ações}\right) =$$

$$= \sum_{I_{CDB}} \sum_{I_{ações}} \left(I_{CDB} - I_{\mu_{CDB}}\right)\left(I_{ações} - I_{\mu_{ações}}\right).P\left(I_{CDB}, I_{ações}\right).$$

Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(I_{CDB}, I_{ações}\right) = {} & (0{,}0304 - 0{,}0682)\left[(0{,}0615 - 0{,}0978).0{,}05 + \right. \\ & + (0{,}1941 - 0{,}0978).0{,}30 + \\ & + (0{,}2653 - 0{,}0978).0{,}05 + \\ & \left. + (-0{,}3101 - 0{,}0978).0\right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (0{,}0934 - 0{,}0682)\left[(0{,}0615 - 0{,}0978).0{,}35 + \right. \\ & + (0{,}1941 - 0{,}0978).0{,}10 + \\ & + (0{,}2653 - 0{,}0978).0{,}05 + \\ & \left. + (-0{,}3101 - 0{,}0978).0{,}10\right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}\left(I_{CDB}, I_{ações}\right) = -0{,}0022$$

Calculando o desvio da carteira C, teremos:

$$\begin{aligned} I_{S_C}^2 = {} & 0{,}30^2 \times 0{,}0680^2 + 0{,}20^2 \times 0{,}1539^2 + 0{,}50^2 \times 0{,}0309^2 + \\ & + 2 \times 0{,}30 \times 0{,}20 \times (-0{,}0010) + \\ & + 2 \times 0{,}30 \times 0{,}50 \times (-0{,}0008) + \\ & + 2 \times 0{,}20 \times 0{,}50 \times (-0{,}0022), \end{aligned}$$

assim,

$$I_{S_C} = 0{,}0283 = 2{,}83\%\text{ a. s.}$$

Conclusão

Carteira C:

COMPOSIÇÃO: Ouro = 30%; Ações = 20%; CDB = 50%

RETORNO MÉDIO = 6,52%

RISCO (DESVIO) = 2,83%

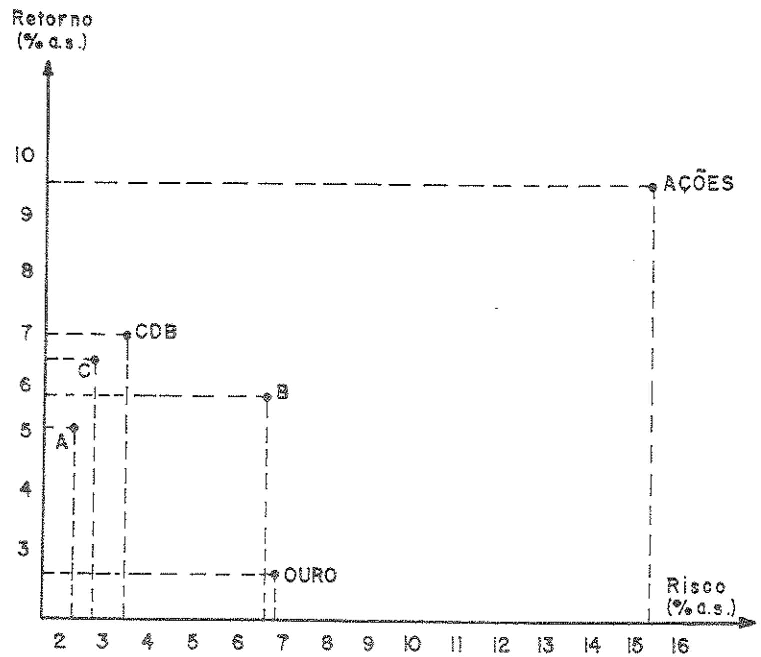
D) COMPARAÇÃO DAS CARTEIRAS

Vamos elaborar um quadro onde poderemos examinar de forma comparativa as carteiras A, B e C e, ainda, carteiras formadas de um único ativo. Acompanhando o exemplo, teríamos carteiras formadas apenas de ouro, ou somente de ações ou de CDB. O efeito diversificação é observado quando conseguimos diminuir o risco da carteira, mantendo ou melhorando o retorno.

A tabela a seguir sintetiza os resultados obtidos no exemplo:

Carteira	Composição da carteira (%)			Retorno Médio	Risco-Desvio
	Ouro	Ações	CDB	% a.s.	% a.s.
1. Ouro	100	—	—	3,84	6,80
2. Ações	—	100	—	9,78	15,39
3. CDB	—	—	100	6,82	3,09
4. A	40	—	60	5,63	2,64
5. B	65	35	—	5,92	6,63
6. C	30	20	50	6,52	2,83

Podemos colocá-los em um gráfico risco-retorno:



Exemplo 2 — Curva Risco-Retorno de uma carteira com dois ativos

Já vimos que o retorno médio de uma carteira e seu risco definem uma curva representada por uma hipérbole, em que os pontos da hipérbole são obtidos conforme variamos a composição dos dois ativos que fazem parte da carteira.

Consideremos, com base no exemplo anterior, as carteiras compostas dos ativos ouro e CDB. Teremos uma família de carteiras ouro-CDB, conforme a composição ω de ouro e $(1 - \omega)$ de CDB, da qual a carteira A, com 40% de ouro e 60% de CDB, é um dos membros.

Sabemos que a família de carteiras ouro-CDB apresenta retorno médio e risco dados por:

Retorno médio da carteira ouro-CDB:

$$I_\mu = \omega . I_{\mu_{ouro}} + (1 - \omega) I_{\mu_{CDB}},$$

e risco (desvio) da carteira ouro-CDB:

$$I_S = \sqrt{\omega^2 . I^2_{S_{ouro}} + (1 - \omega)^2 . I^2_{S_{CDB}} + 2\omega(1 - \omega)\,\mathrm{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)},$$

onde

$$I_{S_{ouro}} = 0{,}0680; \; I_{S_{CDB}} = 0{,}0309,$$
$$\mathrm{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right) = -0{,}0008,$$
$$I_{\mu_{ouro}} = 0{,}0384 \text{ e } I_{\mu_{CDB}} = 0{,}0682,$$

dados obtidos no exemplo anterior.

A) A CARTEIRA OURO-CDB, COM COMPOSIÇÃO DE RISCO MÍNIMO

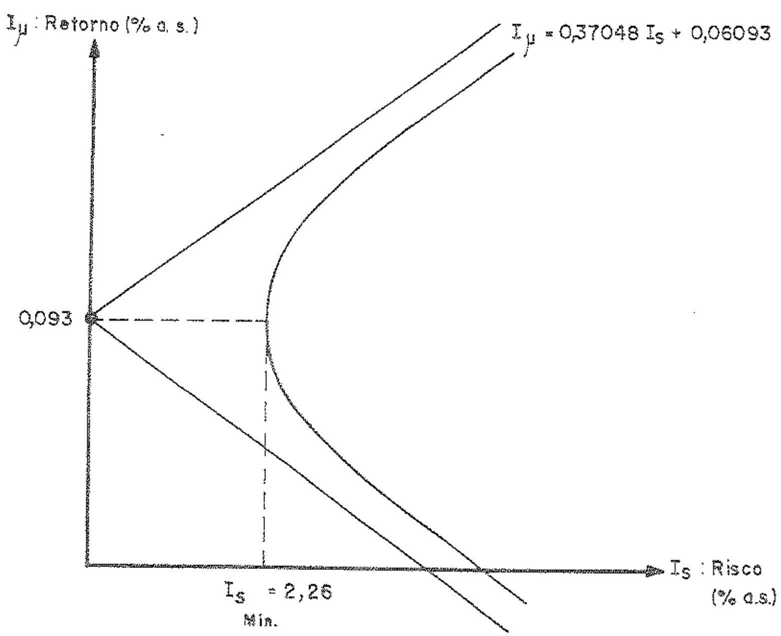
Conforme expressão obtida, a composição da carteira que nos dá o ponto de risco mínimo será:

$$\omega_{min} = \frac{I^2_{S_{CDB}} - \mathrm{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)}{I^2_{S_{ouro}} + I^2_{S_{CDB}} - 2\,\mathrm{cov}\left(I_{ouro}, I_{CDB}\right)},$$

assim,

$$\omega_{min} = \frac{(0{,}0309)^2 - (-0{,}0008)^2}{(0{,}0680)^2 + (0{,}0309)^2 - 2(-0{,}0008)} = 0{,}2444.$$

Desta forma, a carteira ouro-CDB de risco mínimo apresenta a composição:



Observações

a) Para $I_\mu = 0{,}06093$ podemos obter o valor de $I_{S_{min}}$, como segue:

$$\frac{(I_S - 0)^2}{0{,}00051} - \frac{(0{,}06093 - 0{,}06093)^2}{0{,}00007} = 1$$

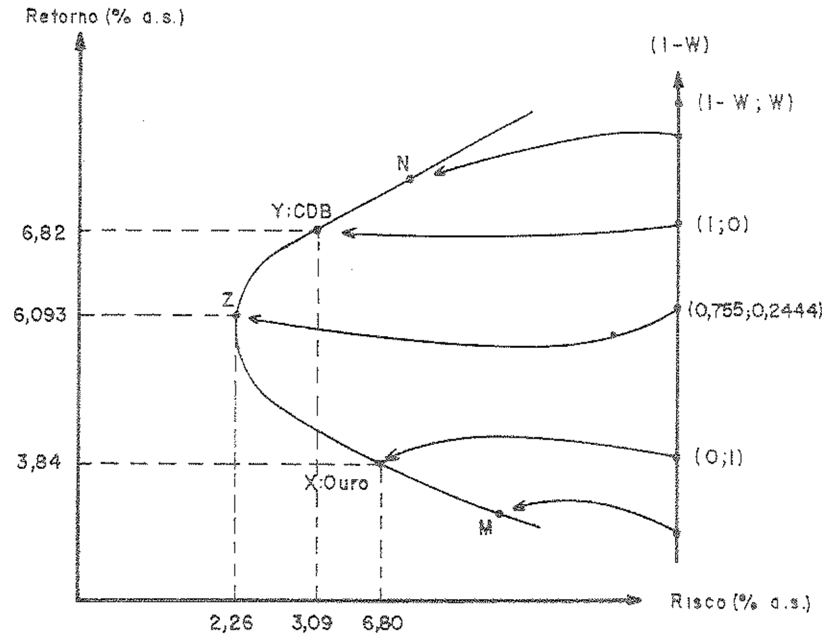
ou

$$I_S = \sqrt{0{,}00051} = 0{,}0226;$$

assim $I_{S_{min}} = 2{,}266\%$ a.s.

Notemos que ocorre uma diferença, devido à aproximação no cálculo do desvio mínimo de 2,29% a.s. para 2,26% a.s.

b) Examinando a variação de composição da carteira, ω e $(1 - \omega)$, conforme o gráfico a seguir, teremos:



— Construímos um eixo orientado segundo os valores crescentes de $(1 - \omega)$ e indicamos os pares $(1 - \omega; \omega)$.

— O ponto X corresponde a uma carteira composta apenas de ouro e o ponto Y a uma carteira apenas de CDB.

— Caminhando do ponto X para o Y, segundo a hipérbole, obtemos pontos que correspondem às carteiras compostas de CDB e ouro, de forma a diversificar o risco. Estas carteiras apresentam retornos maiores que o investimento apenas em ouro e com risco menor.

— Caminhando do ponto Z para Y, sobre a hipérbole, obtemos as carteiras com melhores composições de ouro e CDB, em termos de retornos, com riscos menores que os dois ativos considerados separadamente. Perde-se alguma rentabilidade, comparativamente ao CDB, mas é possível obtermos uma carteira com menor risco comparativo. Por exemplo, uma carteira com 20% de ouro e 80% de CDB apresentará um retorno médio de 6,22% a.s. e risco de 2,43% a.s.

c) Os pontos sobre a hipérbole, complementares aos pontos entre X e Y, tais como M e N, não correspondem às carteiras na acepção do termo, mas nos permitem uma interpretação muito interessante.