

Lista de Exercício N°3 Álgebra I

Entrega dia 9 de Abril (Sug: Resolva antes da Prova).

Exercício 1: Seja J um conjunto não vazio de inteiros tal que

$$1) \alpha \in J, \beta \in J \Rightarrow \alpha + \beta \in J$$

$$2) \alpha \in J \text{ e } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a\alpha \in J.$$

a) Prove que existe $x \in J$ tal que

$$J = \{tx : t \in \mathbb{Z}\}$$

b) Sejam a, b inteiros e seja

$$\langle a, b \rangle = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Prove que $\langle a, b \rangle$ satisfaz as propriedades

1) e 2).

c) Prove que $\langle a, b \rangle = \{t \cdot d : t \in \mathbb{Z} \text{ e } d = \text{mdc}(a, b)\}$

Lista de Ex algebra I Entregar 9/04 Folha 2/2

2) Encontre em cada caso x, y tais que

$$xa + yb = \text{mdc}(a, b)$$

i) $a = 4148 \quad b = 7684$

ii) $a = 221 \quad b = 195$

iii) $a = -7293 \quad b = 3640$.

3) Determinar todos os n -ésimos primos que dividem $50!$

4) Um n -ésimo positivo é chamado perfeito se ele é igual à soma de seus divisores positivos diferente dele, Exemplos 6 e 28.

Seja $n \geq 2$, assumamos que $2^n - 1$ é primo.
Prove que então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.

5) Um inteiro diz-se livre de quadrados.

se não é divisível pelo quadrado de nenhum inteiro maior que 1.
Prove

o um inteiro é livre de quadrados se e somente se pode ser fatorado em um produto de primos distintos.

(i) Todo inteiro é produto de um inteiro livre de quadrados por um quadrado perfeito.