Probabilidade Condicional e Independência

Capítulo 3

Para os eventos E e F, a probabilidade condicional de E dado que F ocorreu é representada por $P(E|F)$ e definida como

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Exemplo

Suponha que lancemos dois dados. Suponha também que cada um dos 36 resultados possíveis seja igualmente provável e que portanto tenha probabilidade 1/36. Além disso, digamos que o primeiro dado seja um 3. Então, dada essa informação, qual é a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8?

$$P(E|F) = \frac{|\{(2,6),(3,5),\cdots,(6,2)\} \cap \{(3,1),\ldots,(3,5),(3,6)\}|/36}{|\{(3,1),\ldots,(3,5),(3,6)\}|/36}$$

$$= \frac{|\{(3,5)\}|/36}{|\{(3,1),\ldots,(3,5),(3,6)\}|/36} = 1/6$$

Observações: Nossa definição de $P(E|F)$ é consistente com a interpretação de probabilidade como sendo uma frequência relativa em uma longa sequência de experimentos. Para ver isso, suponha que n repetições do experimento devam ser realizadas, para n grande. Afirmamos que se considerarmos apenas os experimentos em que F ocorre, então $P(E|F)$ será, em uma longa sequência de experimentos, igual à proporção na qual E também ocorrerá. Para verificar essa afirmação, note que, como $P(F)$ é a proporção de experimentos nos quais F ocorre a longo prazo, tem-se que, nas n repetições do experimento, F ocorrerá $nP(F)$ vezes. Similarmente, em aproximadamente $nP(EF)$ desses experimentos, tanto E quanto F irão ocorrer. Com isso, de aproximadamente $nP(F)$ experimentos em que F ocorre, a proporção de experimentos em que E também ocorre é aproximadamente igual a

$$\frac{nP(EF)}{nP(F)} = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Como essa aproximação se torna exata à medida que n cresce mais e mais, temos a definição apropriada de $P(E|F)$.

Exemplo 2a

Um estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade de que o estudante finalize o teste em menos que x horas seja igual a $x/2$, para todo $0 \leq x \leq 1$. Então, dado que o estudante continua a trabalhar após 0,75 horas, qual é a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?

Solução Seja L_x o evento em que o estudante finaliza o teste em menos que x horas, $0 \leq x \leq 1$, e F o evento em que o estudante usa a hora completa. Como F é o evento em que o estudante não finalizou o teste em menos que 1 hora,

$$P(F) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0{,}5$$

Agora, o evento em que o estudante ainda está trabalhando no horário de 0,75 horas é o complemento do evento $L_{0,75}$, então a probabilidade desejada é obtida de

$$P(F|L_{0,75}^c) = \frac{P(FL_{0,75}^c)}{P(L_{0,75}^c)} = \frac{P(F)}{1 - P(L_{0,75})} = \frac{0{,}5}{0{,}625} = 0{,}8$$

Definição

Se $P(F) > 0$, então

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \tag{2.1}$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.1) por $P(F)$, obtemos

$$P(EF) = P(F)P(E|F) \tag{2.2}$$

Exemplo 2e

Celina está indecisa quanto a fazer uma disciplina de francês ou de química. Ela estima que sua probabilidade de conseguir um conceito A seria de 1/2 em uma disciplina de francês e de 2/3 em uma disciplina de química. Se Celina decide basear a sua escolha no lançamento de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de que ela obtenha um A em química?

Solução (a) Suponha que C seja o evento em que Celina faz o curso de química e A o evento em que ela que ela tira A independentemente do curso que fizer. Então a probabilidade desejada é $P(CA)$, que é calculada usando-se a Equação (2.2) como se segue

$$\begin{aligned} P(CA) &= P(C)P(A|C) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Uma generalização da Equação (2.2), a qual fornece uma expressão para a probabilidade de interseção de um número arbitrário de eventos, é às vezes chamada de *regra da multiplicação*.

A regra da multiplicação

$$P(E_1E_2E_3\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\cdots P(E_n|E_1\cdots E_{n-1})$$

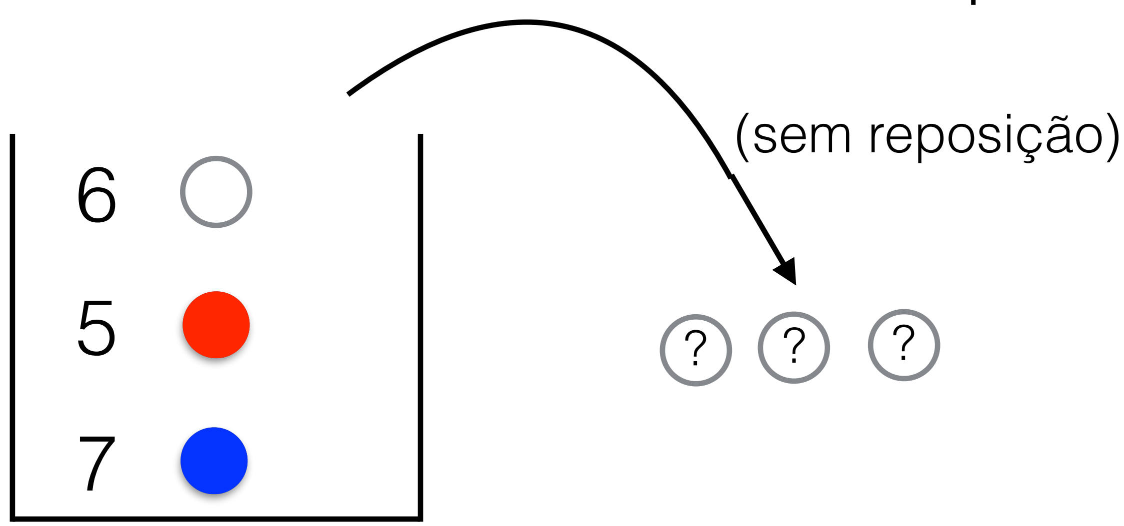
Para provar a regra da multiplicação, basta aplicar a definição de probabilidade condicional ao lado direito da expressão acima, o que resulta em

$$\cancel{P(E_1)}\frac{\cancel{P(E_1E_2)}}{\cancel{P(E_1)}}\frac{\cancel{P(E_1E_2E_3)}}{\cancel{P(E_1E_2)}}\cdots\frac{P(E_1E_2\cdots E_n)}{\cancel{P(E_1E_2\cdots E_{n-1})}} = P(E_1E_2\cdots E_n)$$

A regra da multiplicação

$$P(E_1E_2E_3 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1})$$

Exemplo. Três bolas são retiradas sequencialmente da seguinte urna:



Qual é a probabilidade de obtermos uma vermelha após duas brancas seguidas?

Solução.

B_i = i-ésima retirada resulta em branca, $i = 1, 2$.

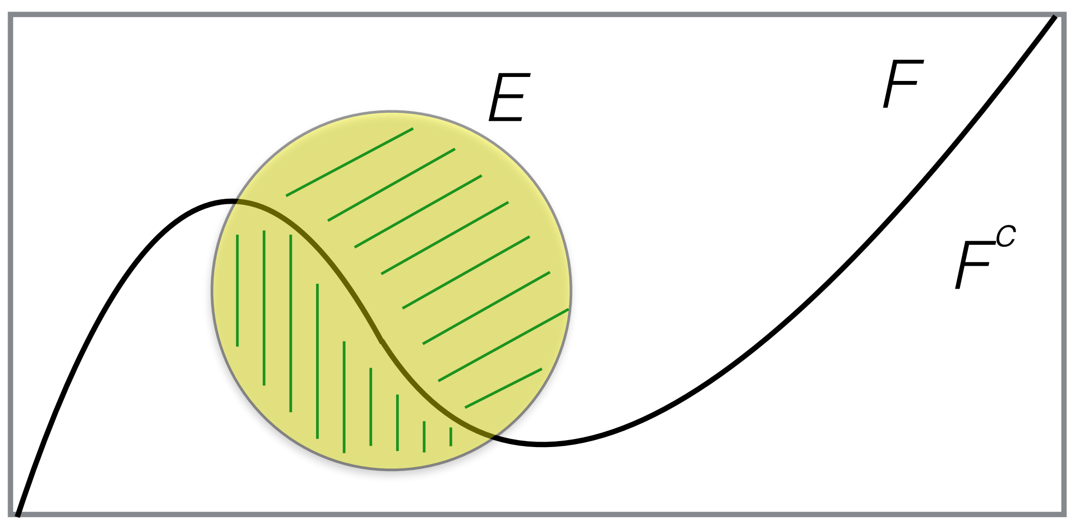
V_3 = terceira retirada resulta em vermelha.

$$P(B_1B_2V_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(V_3|B_1B_2) = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{5}{16}$$

Regra da probabilidade total.

Suponha os eventos E e F. Podemos expressar E como

$$E = EF \cup EF^c$$



Portanto

$$\boxed{\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)] \end{aligned}} \qquad (3.1)$$

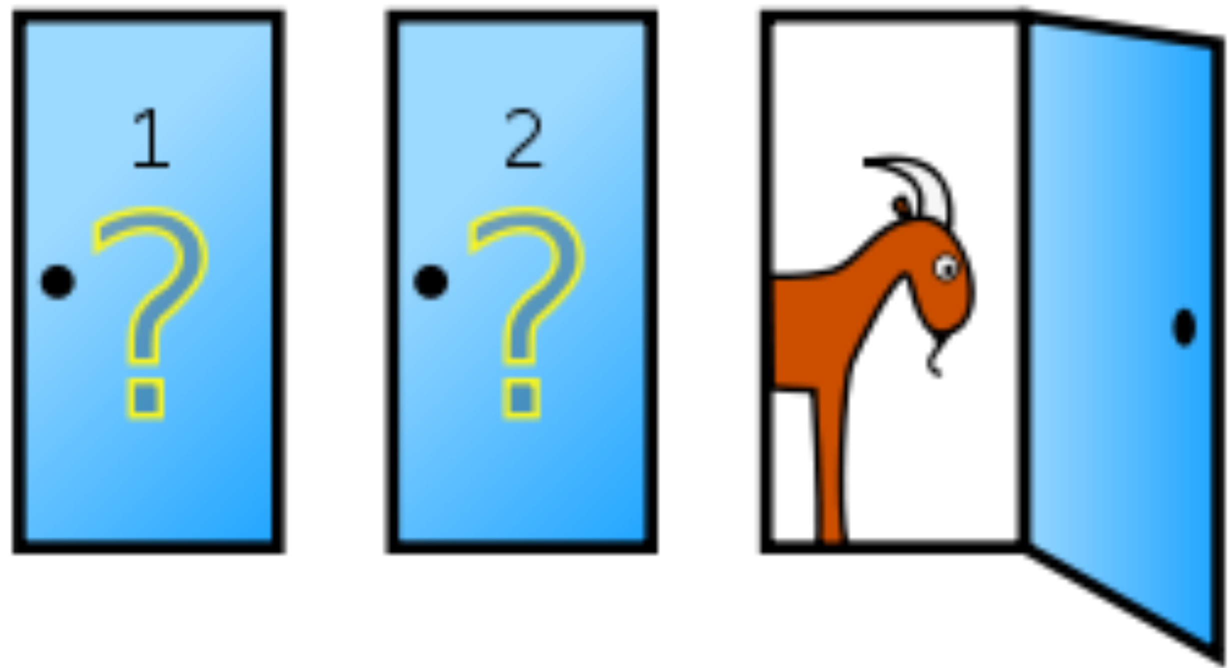
Exemplo. *O problema de Monty Hall*

O problema surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado Let's Make a Deal, exibido na década de 1970.

O jogo consistia no seguinte: Monty Hall, o apresentador, apresentava três portas aos concorrentes. Atrás de uma delas estava um prêmio (um carro) e as outras duas dois bodes.

1. Na 1.ª etapa o concorrente escolhe uma das três portas (que ainda não é aberta);
2. Na 2.ª etapa, Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, revelando que o carro não se encontra nessa porta e revelando um dos bodes;
3. Na 3.ª etapa Monty pergunta ao concorrente se quer decidir permanecer com a porta que escolheu no início do jogo ou se ele pretende mudar para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir. Agora, com duas portas apenas para escolher — pois uma delas já se viu, na 2.ª etapa, que não tinha o prêmio — e sabendo que o carro está atrás de uma das restantes duas, o concorrente tem que tomar a decisão.

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por quê?



Solução.

$E =$ Candidato escolhe definitivamente a porta "boa".
$F =$ Candidato aponta inicialmente a porta "boa".

Experimento **trocando** de portas.

$$P(E) = \underset{0}{P(E|F)}\,\underset{1/3}{P(F)} + \underset{1}{P(E|F^c)}\,\underset{2/3}{P(F^c)} = \mathbf{2/3}$$

Experimento **não trocando** de portas.

$$P(E) = \underset{1}{P(E|F)}\,\underset{1/3}{P(F)} + \underset{0}{P(E|F^c)}\,\underset{2/3}{P(F^c)} = \mathbf{1/3}$$

Fim