Experimento aleatório. Experimento aleatório é um experimento cujo o resultado não se pode prever com certeza.

Espaço amostral. Dado um experimento, chamaremos de S o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

Exemplos:

1. Se o experimento consiste em determinar o sexo de um bebê recém-nascido, então
$$S = \{f, m\}$$
2. Se o experimento consiste em jogar duas moedas, então
$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$
3. Se o experimento consiste em medir em horas o tempo de vida de um transistor, então
$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < \infty\}$$

Evento. Um evento E é um subconjunto do espaço amostral.

Ocorrência de um evento. Se o resultado do experimento estiver contido em E, então dizemos que E ocorreu.

Exemplos:

1. No exemplo 1 anterior, se $E = \{f\}$, então E é o evento em que o bebê é uma menina.
2. No exemplo 2 anterior, se $E = \{(H, H), (H, T)\}$, então E é o evento em que a primeira moeda lançada é cara.
3. No exemplo 3 anterior, se $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 5\}$, então E é o evento em que o transistor não funciona mais que 5 horas.

Sejam E e F eventos de um experimento aleatório.

União. $E \cup F$ é o conjunto de todos os resultados que pertencem E ou F ou a E e F simultaneamente.

Interseção. EF (ou $E \cap F$) é o conjunto de todos os resultados que estão tanto em E quanto em F.

Exemplos:

1. No exemplo 1 anterior, se $E = \{f\}$ e $F = \{m\}$, então $E \cup F = \{f, m\}$.
2. No exemplo 2 anterior, se E é o evento em que pelo menos uma moeda é cara, e F é o evento em que pelo menos uma moeda é coroa, então $E \cap F = \{(H, T), (T, H)\}$.

Sejam E_1, E_2, $E_3, \ldots$ eventos de um experimento aleatório.

União. $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ é o conjunto de todos os resultados que aparecem em pelo menos um E_n para algum $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Interseção. $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ é o conjunto de todos os resultados que aparecem em todos os os eventos E_1, E_2, $E_3, \ldots$

Exemplos. Considere o experimento de lançar uma moeda infinitas vezes. Seja E_n o evento em que cara aparece pela primeira vez no $n-$ésimo lançamento. Então

1. $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ é o evento em que cara aparece pelo menos uma vez.
2. $\cap_{n=1}^{\infty} E_n^c$ é o evento em que cara nunca aparece.

Onde E_n^c é o complemento de E_n, isto é, E_n^c é conjunto de todos os resultados que não pertencem a E_n.

Sejam E, F, G eventos de um experimento aleatório.

Leis comutativas:

$$E \cup F = F \cup E, \qquad EF = FE$$

Leis associativas:

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G), \qquad (EF)G = E(FG)$$

Leis distributivas:

$$(E \cup F)G = EG \cup FG, \qquad (E \cup G)(F \cup G) = EF \cup G$$

Leis De Morgan: Sejam $E_1, E_2, \ldots E_n$ eventos. Então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

Axiomas da probabilidade

Considere um experimento cujo espaço amostral é S. Para cada evento E do espaço amostral S, assumimos que um número $P(E)$ seja definido e satisfaça os três axiomas a seguir:

Axioma 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Axioma 2

$$P(S) = 1$$

Axioma 3

Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, \ldots$ (isto é, eventos para os quais $E_iE_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Referimo-nos a $P(E)$ como a probabilidade do evento E.

Axiomas da probabilidade
Algumas proposições simples

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Se $E \subset F$, então $P(E) \leq P(F)$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

$$P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} \cdots E_{i_r})$$

Seja S finito e $|S|$, o número de elementos de S, por exemplo, $S = \{a, b, c\}$, $|S| = 3$. Suponha que $P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$ para quaisquer $\omega, \omega' \in S$. Então

$$P(\{\omega\}) = 1/|S|$$

Demonstração. Como S é do tipo $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$, onde $|S| = n$, segue que $S = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \cdots \cup \{\omega_n\}$, e portanto $nP(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_n\}) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_1\} \cup \cdots \cup \{\omega_n\}) = P(S) = 1$. Assim, $P(\{\omega_i\}) = (\{\omega_1\}) = 1/n = 1/|S|$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consequentemente, se $E \subset A$, tempos

$$P(A) = |A|/|S|$$

Exemplo 5b. Se três bolas são retiradas aleatoriamente de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?

Solução. Enumere todas as bolas da seguinte forma:

$$\text{Conjunto de bolas } = \{\underbrace{1,\ldots,6}_{vermelhas},\underbrace{7,\ldots,11}_{pretas}\}$$

Note que $S=\{\underbrace{\{1,2,3\}}_{\omega_1},\underbrace{\{1,2,4\}}_{\omega_2},\ldots\underbrace{\{9,10,11\}}_{\omega_n}\}$. Queremos calcular $P(A)$, onde $A=\{\{1,7,8\},\{2,7,8\},\ldots,\{6,10,11\}\}$.

Portanto

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

Exemplo 5l

Um total de 36 sócios de um clube joga tênis, 28 jogam *squash* e 18 jogam boliche. Além disso, 22 dos sócios jogam tênis e *squash*, 12 jogam tênis e boliche, 9 jogam *squash* e boliche, e 4 jogam todos os três esportes. Quantos sócios desse clube jogam pelo menos um dos três esportes?

Solução Seja N o número de sócios do clube. Vamos utilizar os conceitos de probabilidade supondo que um sócio do clube seja selecionado aleatoriamente. Se, para qualquer subconjunto C formado por sócios do clube, fizermos com que $P(C)$ caracterize a probabilidade de que o sócio selecionado esteja contido em C, então

$$P(C) = \frac{\text{número de sócios em } C}{N}$$

Agora, sendo T o número de sócios que jogam tênis, S o número de sócios que jogam *squash* e B o número de sócios que jogam boliche, temos, da Proposição 4.4

$$\begin{aligned} P(T \cup S \cup B) & \\ &= P(T) + P(S) + P(B) - P(TS) - P(TB) - P(SB) + P(TSB) \\ &= \frac{36 + 28 + 18 - 22 - 12 - 9 + 4}{N} \\ &= \frac{43}{N} \end{aligned}$$

Exemplo 5m O problema do pareamento

Suponha que cada um dos N homens presentes em uma festa atire seu chapéu para o centro da sala. Os chapéus são primeiramente misturados, e então cada homem seleciona aleatoriamente um deles. Qual é a probabilidade de que nenhum dos homens selecione o seu próprio chapéu?

Solução Primeiro calculamos a probabilidade complementar de pelo menos um homem selecionar o seu próprio chapéu. Chamemos de E_i, $i = 1, 2,..., N$ o evento em que o i-ésimo homem seleciona seu próprio chapéu. Agora, pela Proposição 4.4, $P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)$, a probabilidade de que pelo menos um dos homens selecione o seu próprio chapéu é dada por

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \cdots \\
+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}) \\
+ \cdots + (-1)^{N+1} P(E_1E_2\cdots E_N)
\end{aligned}
$$

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

Além disso, como existem $\binom{N}{n}$ termos em $\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$, tem-se que

$$\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}) = \frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!} = \frac{1}{n!}$$

Logo,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

Portanto, a probabilidade de que nenhum dos homens selecione seu próprio chapéu é

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

que é aproximadamente igual a $e^{-1} \approx 0{,}36788$ para N grande. Em outras palavras, para N grande, a probabilidade de que nenhum dos homens selecione o seu próprio chapéu é de aproximadamente 0,37 (quantos leitores pensaram incorretamente que essa probabilidade tenderia a 1 à medida que $N \to \infty$?). ■

*2.6 PROBABILIDADE COMO UMA FUNÇÃO CONTÍNUA DE UM CONJUNTO

Uma sequência de eventos $\{E_n, n \geq 1\}$ é chamada de sequência crescente se

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

e é chamada de sequência decrescente se

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de eventos, então definimos um novo evento, representado por $\lim_{n\to\infty} E_n$, como

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Similarmente, se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente de eventos, definimos $\lim_{n} E_n$ como

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Demonstramos agora a proposição a seguir:

Proposição 6.1.
Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente ou decrescente de eventos, então

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

Proposição 6.1.
Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente ou decrescente de eventos, então

$$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \to \infty} E_n)$$

Demonstração Suponha, primeiro, que $\{E_n, n \geq 1\}$ seja uma sequência crescente, e defina os eventos $F_n, n \geq 1$, como

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n \left(\bigcup_1^{n-1} E_i \right)^c = E_n E_{n-1}^c \quad n > 1$$

onde usamos o fato de que $\bigcup_1^{n-1} E_i = E_{n-1}$, pois os eventos são crescentes. Colocando em palavras, F_n corresponde aos resultados de E_n que não estão em nenhum dos eventos E_i anteriores, $i < n$. E fácil verificar que F_n são eventos mutuamente exclusivos, tais que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) &= P\left(\bigcup_{1}^{\infty} F_i\right) \\
&= \sum_{1}^{\infty} P(F_i) \quad \text{(pelo Axioma 3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} P(F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} F_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(E_n)
\end{aligned}
$$

o que prova o resultado quando $\{E_n, n \geq 1\}$ é crescente.

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente, então $\{E_n^c, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente; portanto, das equações anteriores,

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

Entretanto, como $\bigcup_{1}^{\infty} E_i^c = \left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)^c$, tem-se que

$$P\left(\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

ou, de forma equivalente,

$$1 - P\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Exemplo. Considere o experimento de lançar uma moeda infinitas vezes. Mostre que a probabilidade de nunca ocorrer coroa é zero. Suponha que

$$P(E_n) = \frac{1}{2^n}, \ n = 1, 2, \ldots$$

onde E_n é o evento em que os n primeiros lançamentos são coroas.

Solução. Queremos calcular $P(\cap_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Como vale $\quad E_1 \subset E_2 \supset E_3 \cdots$

segue que

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Exercícios

S. Ross, 8ª Ed., p.70-78: 2.2, 2.19, 2.23, 2.25, 2.32, 2.33, 2.35, 2.42, 2.52, 2.56.