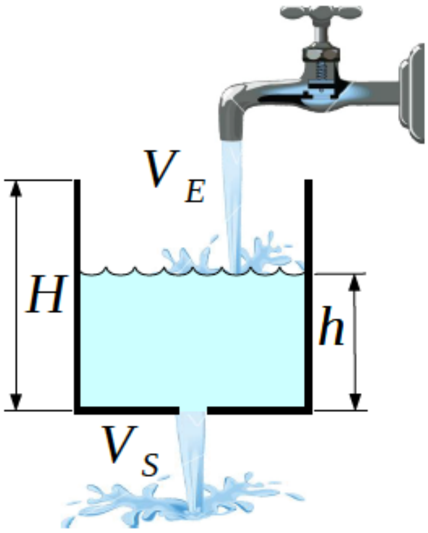
AGG05819 – GEOFÍSICA MATEMÁTICA

LISTA 1/2019 Entrega até 30/04/2019

EXERCÍCIO 1 – Resolva as seguintes E.D.O.s abaixo:

a) $\dot{y}(x) + 2\sin 2\pi x = 0$;
b) $\dot{y}(x) + xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$;
c) $\dot{y}(x) = y(x)$;
d) $\dot{y}(x) = 4e^{-x}\cos x$;
e) $\dot{y}(x) = -y(x)$;
f) $\dot{y}(x) - y(x)\tan x = \sin x$;
g) $(1+x)\dot{y}(x) + y(x) = \arctan x$;
h) $\dot{y}(x) + 2\frac{y(x)}{x} = x^3$.

EXERCÍCIO 2 – O diagrama abaixo mostra um reservatório cilíndrico provido de um furo no fundo.



A água entra no reservatório com uma vazão V_E e sai pelo furo com uma vazão V_S. Nessas condições, a altura da água dentro de reservatório $h(t)$ é a solução da equação diferencial de 1ª ordem:

$$\dot{h} = \frac{V_E - V_S}{A} \quad (1)$$

sendo A a área da secção horizontal do reservatório. Considerando V_E constante, e V_S dada pela fórmula de Torricelli:

$$V_S = a\sqrt{2gh} \quad (2)$$

sendo g a aceleração da gravidade e a a área do furo. A E.D.O. (1), portanto, escreve-se como:

$$\dot{h} = \frac{V_E - a\sqrt{2gh}}{A} \quad (3)$$

Dadas as informações acimas, pede-se:

a) Determine a solução geral da E.D.O. (3);
b) Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial $h(0) = 0$ (ou seja, no instante inicial o reservatório está vazio);
c) Faça um esboço do gráfico da solução particular obtida em (b);
d) Considerando os valores constantes na tabela abaixo, determine qual deve ser altura H do reservatório para que não ocorra transbordamento de água.

A	1250 cm²
a	0,7 cm²
g	9,8 m/s²
V_E	12 litros / minuto
H	?

EXERCÍCIO 3 – Em física, meia-vida (A) é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade A_0 se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável a mesma é. Por exemplo, a meia-vida do ultra radioativo radio, Ra-226, é cerca de 1700 anos. Em 1700 anos, metade de uma dada quantidade de Ra-226 é transmutada em Radônio, Rn-222. O isótopo de urânio mais comum, U-238, tem uma meia-vida de aproximadamente 4.5 bilhões de ano. Nesse tempo, metade de uma quantidade de U-238 é transmutada em chumbo, Pb-206. A equação que descreve esse fenômeno é uma E.D.O. de 1ª dada por:

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

sendo $k > 0$. Sabendo que reator converte urânio, U-238, em isótopo de putlônio, Pu-239. Após 15 anos, foi detectado que 0,043% da quantidade inicial A_0 de Pu-239 se desintegrou. Encontre a meia vida desse isótopo se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

EXERCÍCIO 4 – Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais não-lineares redutíveis a lineares:

a) $y = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)x - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;
b) $y = x\frac{dy}{dx} - \ln\frac{dy}{dx}$;
c) $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\ln\frac{dy}{dx}$;
d) $\dot{y} + y^2 + 3y + 2 = 0$, sendo $y = -1$ solução particular;
e) $\dot{y} = \frac{1}{x}y^2 - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)y + x - 1 = 0$, sendo $y = x$ solução particular;
f) $\dot{y} + (2x - 1)y - xy^2 = x - 1$, sendo $y = 1$ solução particular;
g) $\dot{y} + xy = x^3y^3$;
h) $\dot{y} + \frac{1}{x}y = xy^2$;
i) $2xy\dot{y} - y^2 + x = 0$.

EXERCÍCIO 5 – Determine a solução geral implícita das seguintes equações diferenciais:

a) $xydx - 3(y-2)dy = 0$;
b) $xdx + ye^{-x^2}dy = 0$;
c) $(1-x)dy - y^2dx = 0$;
d) $\cos^2 y \sin x\, dx + \sin y \cos x\, dy = 0$;
e) $2x(x+y)dx + (x^2+y^2)dy = 0$;
f) $xdy - \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx = 0$.

EXERCÍCIO 6 – Determine a solução geral das equações diferenciais abaixo:

a) $\ddot{y} - y = \ln x$;
b) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 10e^{-3x}$;
c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-x}\cos x$;

EXERCÍCIO 7 – Dada as equações diferenciais abaixo, determine a solução geral e a solução particular de cada uma delas. As soluções particulares deverão ser determinadas de acordo com as condições iniciais especificadas.
a) $y'' + 3y' = 18x^2, y(0) = -3 \ e \ y'(0) = 0$;
b) $8\ddot{y} - 6\dot{y} + y = 6\cosh x\,, y(0) = 0.2 \ e \ y'(0) = 0.05$;
c) $x^2\ddot{y} - x\dot{y} + y = 0, y(1) = 4.3, \dot{y}(1) = 0.5$;
d) $y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 0 \ e \ y'(0) = 15$.

EXERCÍCIO 8 – Considere uma bola de futebol movimentando-se sob a ação da gravidade e da resistência do ar, conforme o diagrama abaixo.

O movimento da bola é descrito pela função $x(t)$ e a primeira e a segunda derivada dessa função representam a velocidade e a aceleração da bola, respectivamente. Para determinar o movimento da bola, utiliza-se a 2ª lei de Newton:

$$Massa \times Aceleração = Soma\ das\ Forças\ Aplicadas$$

que matematicamente pode ser traduzido como:

$$m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x}, \qquad (1)$$

a qual é uma E.D.O. linear não-homogênea, onde m é a massa da bola, g é a aceleração da gravitacional e $\lambda > 0$ é a constante de resistência viscosa da bola em relação ao ar. Mesmo sem resolver a E.D.O. (1), é fácil ver que à medida em que a bola cai, sua velocidade aumenta, o que causa aumento da resistência do ar, até que a força peso seja neutralizada e a bola passe a ser mover com velocidade constante, chamada velocidade terminal, dada por:

$$v_T = \frac{mg}{\lambda}. \tag{2}$$

Com informações apresenta acima, pede-se:

a) Obtenha a solução geral da E.D.O. (1);
b) Obtenha a solução particular que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$ (posição inicial) e $\dot{x}(0) = 0$ (velocidade inicial);
c) Sabendo que a bola tem velocidade terminal igual a 25 m/s e supondo que a mesma é solta do alto de uma torre com 100 m de altura, use o resultado obtido em (b) para calcular que distância a bola cairia em 4 segundos. Compare com a distancia de queda se não houvesse resistência do ar.

EXERCÍCIO 9 – A E.D.O. linear de 2ª ordem da forma

$$x^2\ddot{y}(x) + ax\dot{y}(x) + by(x) = 0 \tag{1}$$

é conhecida como equação Euler-Cauchy, sendo $x > 0$ e a e b constantes. A equação Euler-Cauchy tem solução da forma

$$y(x) = x^m. \tag{2}$$

Calculando-se a primeira e a segunda derivada da equação (2) em relação x, obtem-se:

$$\dot{y}(x) = mx^{m-1} \tag{3}$$

e

$$\ddot{y}(x) = m(m-1)x^{m-2} \tag{4}$$

Substituindo as equações (2), (3) e (4) na equação (1), chega-se à:

$$m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = 0 \tag{5}$$

Repare que x^m será um termo comum em toda a equação. Como $x > 0$, então $x^m \neq 0$. Assim, podemos dividir a equação (5) por x^m, tal que será obtida a seguinte equação de segundo grau:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{6}$$

Portanto, $y(x) = x^m$ será solução da equação (1) e somente se m é raiz da equação (6). A solução da equação (6) é dada por:

$$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{7}$$

Assim, dependendo dos valores dos coeficientes a e b, podemos ter as seguintes soluções para m:

1) Raízes reais e distintas;
2) Raízes reais iguais;

3) Raízes complexas conjugadas.

Dessa forma, determine, para cada um dos casos descritos acima, qual é a solução da equação Euler-Cauchy, lembrando-se que E.D.O.'s de 2ª ordem possuem duas soluções linearmente independentes. Assim, atenção especial é requerida no caso 2.

EXERCÍCIO 10 – Determine a solução geral das E.D.O.s lineares de 2ª ordem Euler-Cauchy:

a) $y'' - 20y = 0$;
b) $x^2y'' + xy' + y = 0$;
c) $4x^2y'' + 24xy' + 25y = 0$.