

A álgebra I 2019 noturno

1º Questão Em cada uma das quatro afirmações abaixo prove ou dé contra-exemplo, a, b, c são inteiros arbitrários não nulos.

a) $\text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c) = \text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c))$

b) $\text{mdc}(a, b+c) = \text{mdc}(a, b) + \text{mdc}(a, c)$

c) A operação em \mathbb{Z}^* ; $(a, b) \rightarrow \text{mdc}(a, b)$ tem elemento neutro e é comutativa

d) $\text{mdc}(a, bc) = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mdc}(b, c)$

e) $\text{mdc}(ab, cd) = \text{mdc}(a, c) \cdot \text{mdc}(b, d)$

f) $\text{mdc}(a, b) = 1 \Leftrightarrow b \mid a$

g) $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(-a, b) = \text{mdc}(a, -b) = \text{mdc}(|a|, |b|)$

h) Sejamos d, r, s tais que $d = ra + sb$ então $d = \text{mdc}(a, b)$

i) $ra + sb = 1 \Rightarrow \text{mdc}(r, 1) = 1$

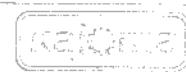
j) $\text{mdc}(a \pm b, ab) = 1$

k) $\text{mdc}(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2

l) divisor comum de $a \pm b$ então $\text{mdc}(a/d, b/d) = \frac{\text{mdc}(a, b)}{d}$

m) $\text{mdc}(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{mdc}(a^n, b^n) = 1$

n) $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$



D S T Q Q S S

Lista 2 El 2

o) $\text{mmc}(a, a+1) = a(a+1)$

p) $\text{mmc}(a, b) = \text{mdc}(a, b) \Leftrightarrow |a| = |b|$

q) $4a+3 \text{ e } 5a+4$ não sempre primos entre sir) Se $a > 4$ então a é soma de dois compostos.s) Se $\text{mdc}(a, b) = 1$ então ab é quadrado $\Leftrightarrow a \text{ e } b$ são quadrados

t) 1009 é primo

u) Existem infinitos primos da forma $4n+3$ v) $2^{2^5} + 1$ é primo2º a) Prove que se $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $a^n - 1$ é primo
então $a = 2$ e n é primo.mostre que a reciprocá é falsa. (Sug. fator 2^{n-1})b) Se $2^m + 1$ é primo para algum $m \in \mathbb{N}$
então m é potência de 2.3º) mostre que se $n \geq 1$ então

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \text{ não é inteiro}$$

4º a) mostre que se $m \mid a-b$ então $m \mid a^k - b^k$ $k \geq 0$.b) Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros
 a e b são inteiros então

$$a-b \mid f(a) - f(b)$$

Kekhanna