D S T Q Q S S Lista de Ex N°2 — Entregar dia 26

Algebra 1 2019 Noturno

1ª Questão Em cada uma das ~~questões~~ afirmações abaixo prove ou dê contra-exemplo, a, b, c são inteiros arbitrários não nulos.

a) $mdc(mdc(a,b),c) = mdc(a, mdc(b,c))$

b) $mdc(a, b+c) = mdc(a,b) + mdc(a,c)$

c) A operação em $\mathbb{Z}^*$; $(a,b) \longrightarrow mdc(a,b)$ tem elemento neutro e é comutativa

d) $mdc(a,bc) = mdc(a,b) \cdot mdc(b,c)$

e) $mdc(ab, cd) = mdc(a,c) \cdot mdc(b,c)$

f) $mdc(a,b) = |b| \iff b \mid a$

g) $mdc(a,b) = mdc(-a,b) = mdc(a,-b) = mdc(|a|,|b|)$

h) Sejam d, r, s tais que $d = ra + sb$ então $d = mdc(a,b)$

i) $ra + sb = 1 \Rightarrow mdc(r,s) = 1$

j) $mdc(a \pm b, ab) = 1$

k) $mdc(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2

l) d divisor comum de a e b então $mdc(a/d, b/d) = \frac{mdc(a,b)}{d}$

m) $mdc(a,b) = 1 \iff mdc(a^n, b^n) = 1$

n) $a^n \mid b^n \iff a \mid b$

D S T Q Q S S Lista 2 Fl 2

o) $mmc(a, a+1) = a(a+1)$

p) $mmc(a,b) = mdc(a,b) \iff |a| = |b|$

q) $4a+3$ e $5a+4$ são sempre primos entre si

r) Se $a > 4$ então a é soma de dois compostos.

s) Se $mdc(a,b) = 1$ então ab é quadrado $\iff$ a e b são quadra

t) 1009 é primo

u) Existem infinitos primos da forma $4n+3$

v) $2^{2^5} + 1$ é primo

2º) a) Prove que se $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $a^n - 1$ é primo então $a = 2$ e n é primo.
Mostre que a recíproca é falsa. (Sug. fatore $2^{11} - 1$)

b) Se $2^m + 1$ é primo para algum $m \in \mathbb{N}$ então m é potência de 2.

3º) Mostre que se $n > 1$ então

$$\sum_{i=1}^{k} 1/k = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$$ não é inteiro

4º) a) Mostre que se $m \mid a-b$ então $m \mid a^k - b^k$, $k \geq 0$.

b) Se $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros e a e b são inteiros então

$a - b \mid f(a) - f b$