

Física II

4302112

Lucy V. C. Assali

Escritório: Edifício Alessandro Volta, Bloco C, sala 210

Fone: 3091-7041

e-mail: lassali@if.usp.br

Ondas

2^a Parte

Interferência de ondas

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência.

1. Ondas no mesmo sentido \Rightarrow
$$\begin{cases} y_1(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x, t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{cases}$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cos[kx - \omega t + \delta']$$

onde $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta_{12}$, com $\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$ (diferença de fase)

$$\text{e } \delta' - \delta_1 = \delta \quad \text{e} \quad \text{sen} \delta = \frac{A_2}{A} \text{sen} \delta_{12}$$

Como a frequência das duas ondas é a mesma, então a intensidade de cada uma delas é proporcional ao quadrado de sua amplitude, com a mesma constante de proporcionalidade. Chamando de I_1 e I_2 as intensidades das componentes, a intensidade I da onda resultante

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_{12}$$

Interferência de ondas

1. Ondas no mesmo sentido

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_{12}$$

A intensidade da onda resultante é diferente da soma das intensidades das componentes, dependendo da diferença de fase entre elas \Rightarrow este fenômeno se chama **Interferência**

Intensidade Máxima \Rightarrow Interferência Construtiva quando $\cos \delta_{12} = 1$

$$\delta_{12} = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad I = I_{\text{máx}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} \right)^2$$

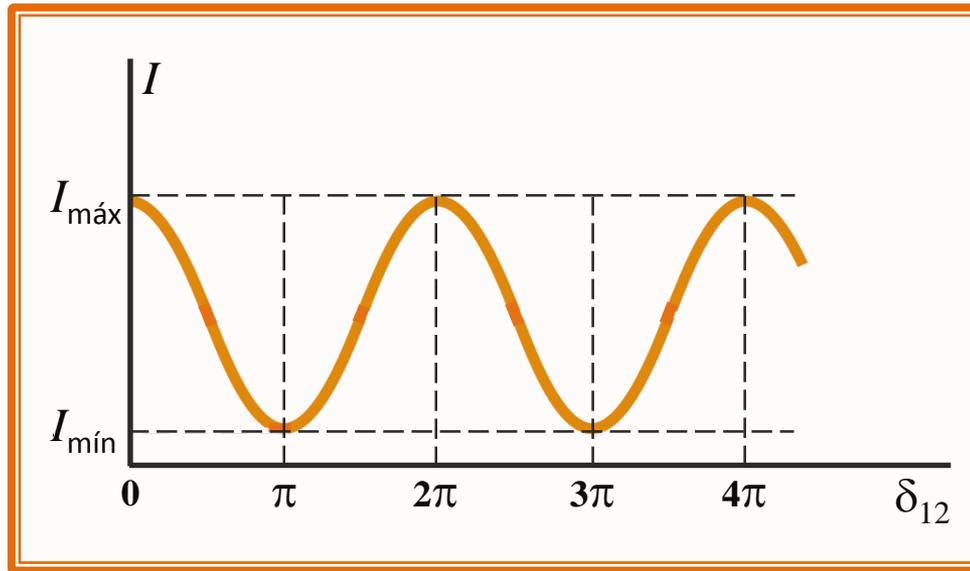
Intensidade Mínima \Rightarrow Interferência Destrutiva quando $\cos \delta_{12} = -1$

$$\delta_{12} = (2m + 1)\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad I = I_{\text{mín}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2} \right)^2$$

Interferência de ondas

1. Ondas no mesmo sentido

A intensidade da onda resultante oscila entre os valores máximo e mínimo, como função da fase δ_{12}



Em particular, se $I_1 = I_2$, então $I_{\text{máx}} = 4I_1$ e $I_{\text{mín}} = 0$

Fenômenos de interferência estão entre os efeitos mais característicos da propagação de ondas

Obtenção da amplitude e da constante de fase da onda resultante:

Consideremos a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, de mesma frequência, se propagando no mesmo sentido:

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A_1 \cos [\varphi_1 (x, t)] , & \text{onde } \varphi_1 (x, t) = kx - \omega t + \delta_1 \\ y_2(x, t) = A_2 \cos [\varphi_2 (x, t)] , & \text{onde } \varphi_2 (x, t) = kx - \omega t + \delta_2 \end{cases}$$

A onda resultante será:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cos [\varphi (x, t)] , \text{ com } \varphi (x, t) = kx - \omega t + \delta'$$

Definindo

$$\begin{cases} \delta_2 - \delta_1 = \delta_{12} & \text{teremos que } \varphi_2 = \varphi_1 + \delta_{12} \\ \delta' - \delta_1 = \delta & \text{teremos que } \varphi = \varphi_1 + \delta \end{cases}$$

Podemos escrever, então, que:

$$y(x, t) = A \cos (\varphi_1 + \delta) = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos (\varphi_1 + \delta_{12})$$

Sabendo que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \text{ onde } \cos \theta = \Re [e^{i\theta}] \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \Im [e^{i\theta}]$$

podemos escrever que

$$z(x, t) = Ae^{i\varphi_1} e^{i\delta} = e^{i\varphi_1} [A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}]. \quad (1)$$

Com isso teremos que $y(x, t) = \Re[z]$.

A igualdade (1) é verdadeira para $Ae^{i\delta} = A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}$.

Portanto:

$$\begin{cases} \Im [z] \implies A \operatorname{sen} \delta = A_2 \operatorname{sen} \delta_{12} \\ \Re [z] \implies A \cos \delta = A_1 + A_2 \cos \delta_{12} \end{cases} \quad (2)$$

Elevando ao quadrado as equações (2) e somando os resultados temos

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta_{12}, \text{ com } \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 \text{ (diferença de fase)}$$

Da equação (2) temos a relação entre δ e δ_{12} :

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{A_2}{A} \operatorname{sen} \delta_{12}$$

Interferência de ondas

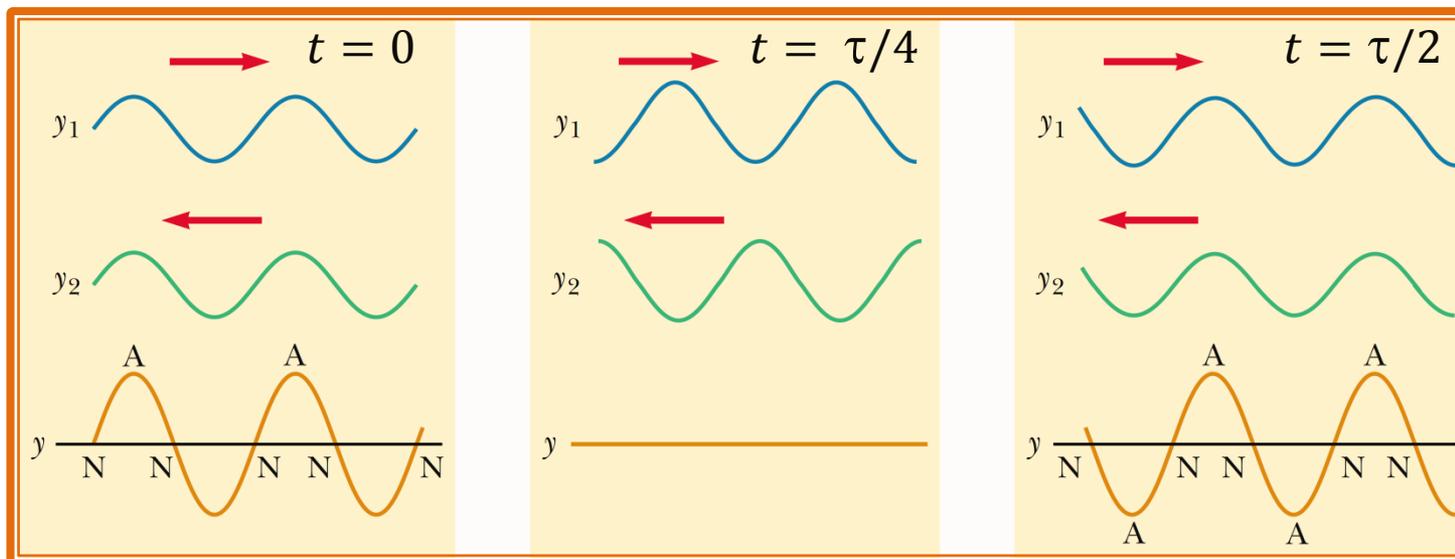
2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, em sentidos opostos, que, além de terem a mesma frequência, também têm a mesma amplitude e constante de fase nula

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) = A \cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

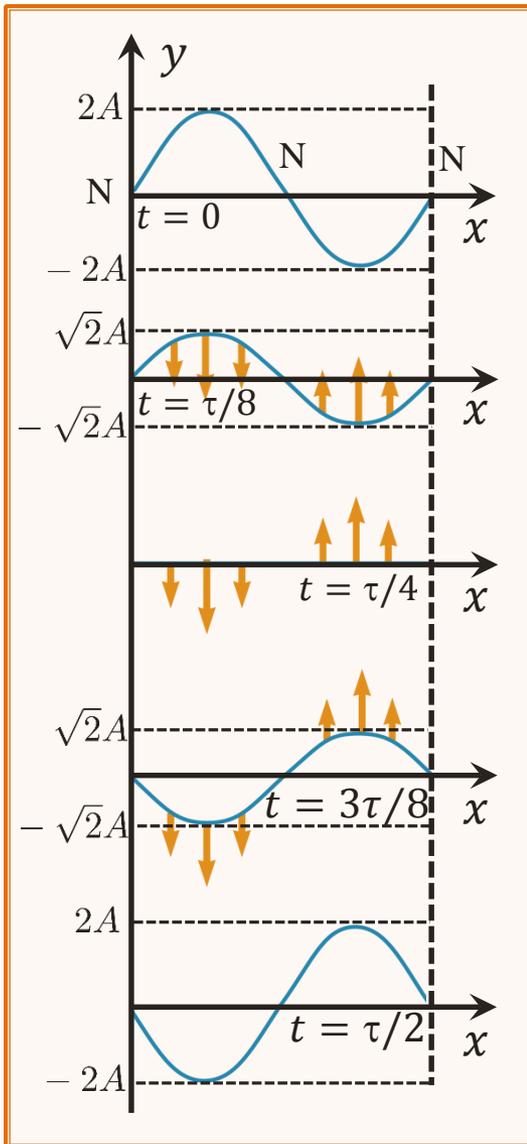
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) \Rightarrow \text{Onda Estacionária}$$

Não há propagação: a forma da onda permanece sempre semelhante, com o deslocamento, mudando apenas de amplitude e, eventualmente, de sinal



Interferência de ondas

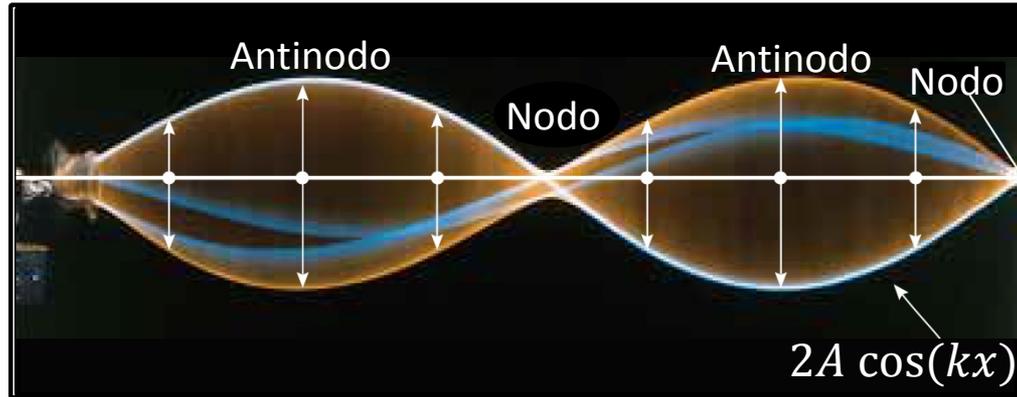
2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



A figura mostra uma série de "Instantâneos" de uma onda estacionária: para $t = \tau/4$ a corda passa pela posição de equilíbrio ($y = 0$) e depois os deslocamentos trocam de sinal, até atingir amplitude máxima para $t = \tau/2$. Daí em diante os gráficos seriam percorridos em sentido inverso (de baixo para cima), até voltar a configuração inicial para $t = \tau$. O fluxo médio de energia, em uma onda estacionária, é nulo.

Interferência de ondas

2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



A figura mostra uma fotografia, de tempo de exposição longo, de uma onda estacionária em uma corda. O comportamento temporal de um deslocamento vertical (transversal), a partir do equilíbrio, de uma partícula individual da corda é dado por $\cos(\omega t)$. Isso indica que cada partícula vibra com frequência angular ω . A amplitude da oscilação vertical de qualquer partícula depende da posição horizontal da partícula, que vibra confinada em uma função envelope $2A \cos(kx)$.

Interferência de ondas

3. Batimentos e velocidade de grupo

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam no mesmo sentido, têm a mesma amplitude e constante de fase nula, mas têm frequências ligeiramente diferentes (\therefore diferentes número de onda)

$$\begin{cases} y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{cases}$$

$$\text{Sejam } \begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \text{ com } \omega_1 > \omega_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \text{ com } k_1 > k_2 \end{cases}$$



$$y = y_1 + y_2 = A \left\{ \cos \left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] + \cos \left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] \right\}$$

$$y(x, t) = \mathbb{A}(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

alta
frequência

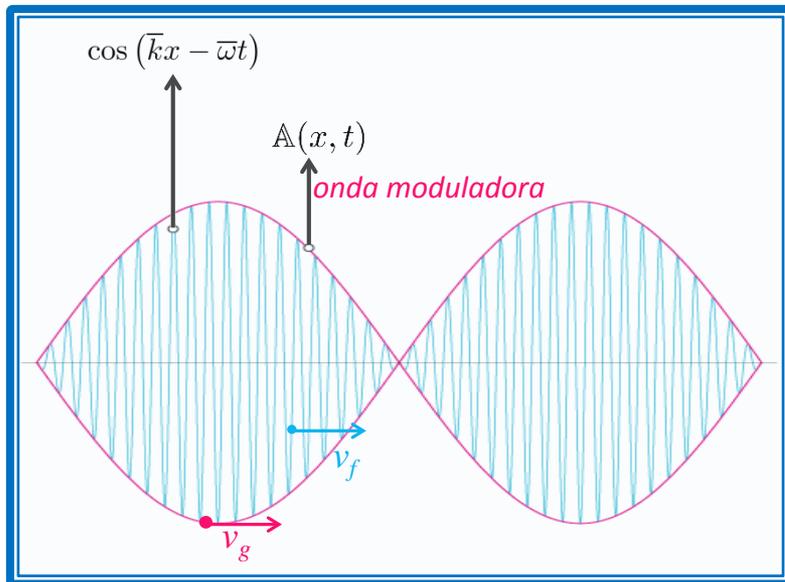
$$\mathbb{A}(x, t) = 2A \cos \left[\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right]$$

baixa
frequência

Interferência de ondas

3. Batimentos e velocidade de grupo

A expressão que encontramos representa um fenômeno de batimentos: a onda encontrada é uma onda de frequência $\bar{\omega}$, elevada, que é modulada pela amplitude A , que é outra onda com frequência $\Delta\omega$ bem mais baixa. Este é o exemplo mais simples de um grupo de ondas.



A fase desta onda é dada por:

$$\varphi(x, t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$$

de modo que a velocidade com que se desloca um ponto de fase constante é a velocidade de fase

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

A velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade as-

sociada a um ponto da envoltória (onda moduladora), onde A é constante. Esta velocidade é chamada velocidade de grupo e

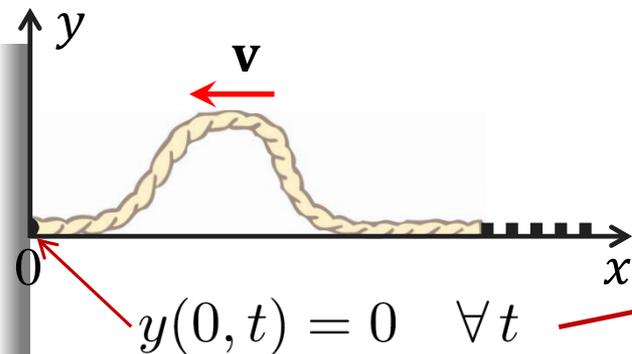
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Reflexão de ondas

Pulso que se propaga em uma corda comprida que tem sua extremidade em um ponto 0. O que acontece quando o pulso atinge 0?

1. Extremidade fixa:

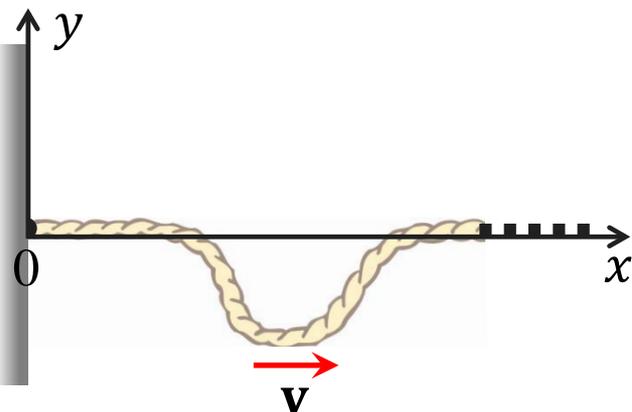
$y(x, t) = g(x + vt)$ (pulso antes de atingir 0)



Solução geral: $y(x, t) = g(x + vt) + \underbrace{f(x - vt)}_{\text{nula antes de atingir 0}}$

$$y(0, t) = g(vt) + f(-vt) = 0$$

$$f(-vt) = -g(vt) \quad \forall t$$

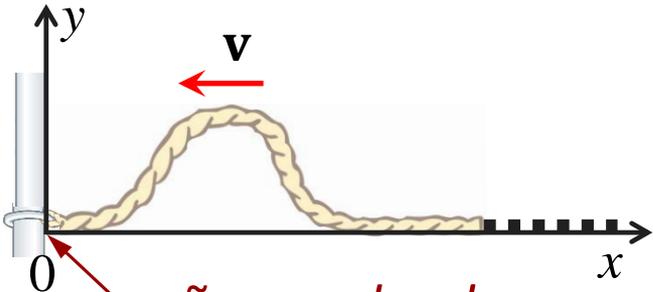


o pulso volta invertido, depois da reflexão em 0, com defasagem de 180°

Reflexão de ondas

2. Extremidade livre:

$y(x, t) = g(x + vt)$ (pulso antes de atingir 0)



não pode haver força transversal sobre a corda:

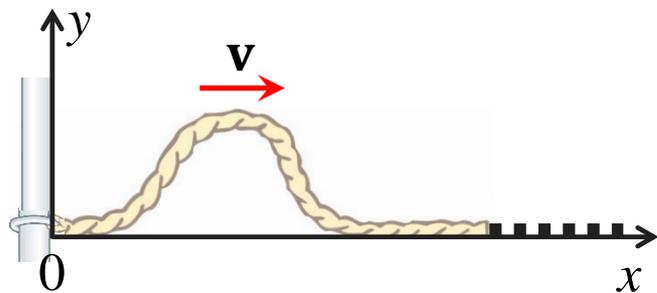
$$F_y(0, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t$$

Solução geral: $y(x, t) = g(x + vt) + \underbrace{f(x - vt)}_{\text{nula antes de atingir 0}}$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(-vt) + \frac{\partial g}{\partial x}(vt) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-vt) = -\frac{\partial g}{\partial x}(vt)$$

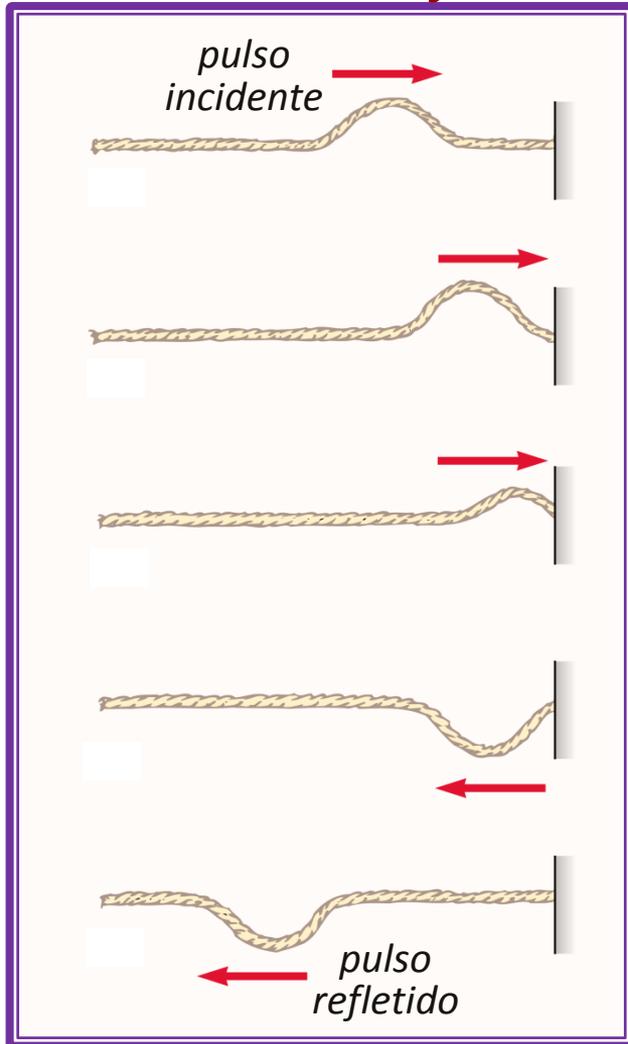
$$f(-vt) = g(vt) \quad \forall t$$



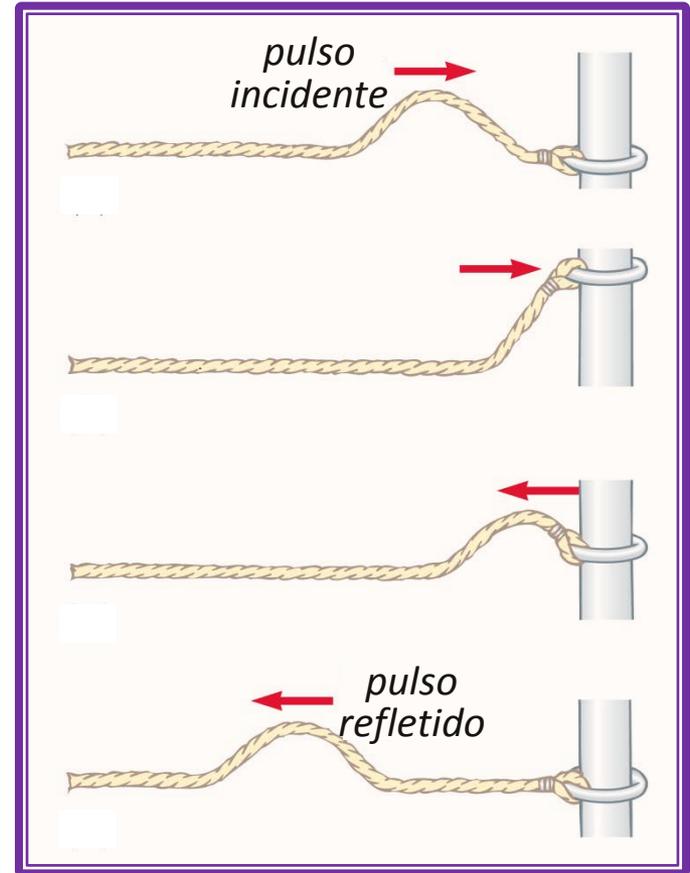
o pulso volta sem ser invertido, depois da reflexão em 0, e sem mudança de fase

Reflexão de ondas

Extremidade fixa



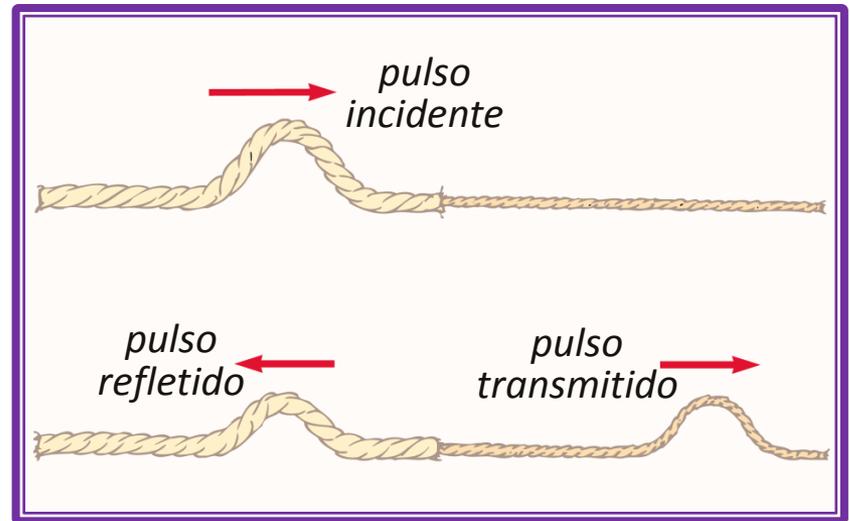
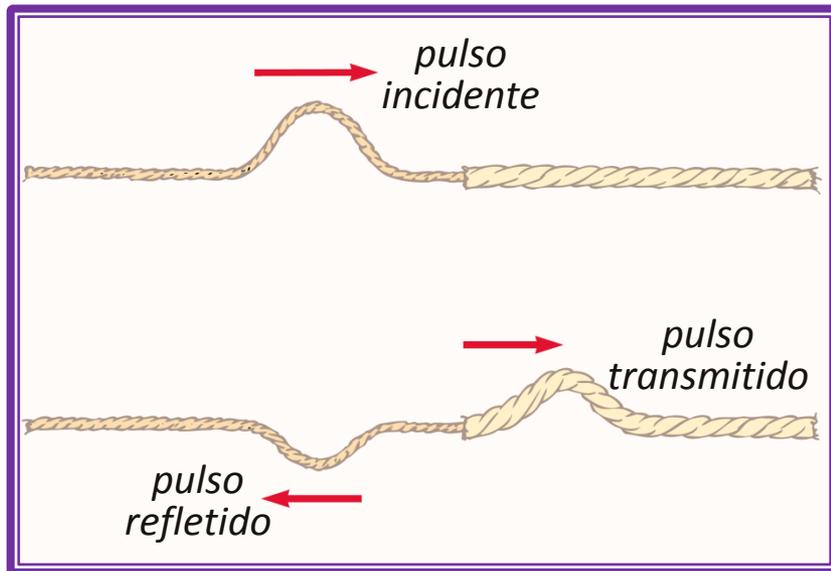
Extremidade livre



Reflexão de ondas

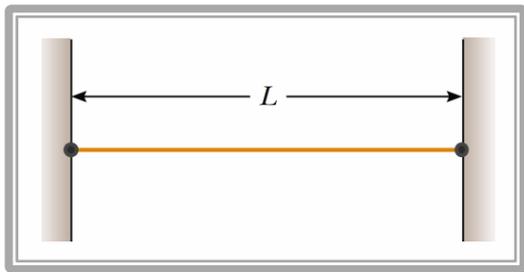
3. Junção de duas cordas (descontinuidade no meio):

Duas cordas de diferentes densidades lineares e unidas. Se um pulso atinge a junção, onde há uma descontinuidade, há uma onda refletida e uma onda transmitida, cujas amplitudes devem ser obtidas a partir da equação da onda e das condições de contorno a que as ondas estão sujeitas na posição da descontinuidade, tal como a continuidade do deslocamento e da força nesse ponto.



Modos Normais de Vibração

- Ondas estacionárias em uma corda finita presa em ambas as extremidades:



Vamos considerar uma corda de comprimento L , fixa em ambas as extremidades. Ondas estacionárias podem ser geradas na corda por uma superposição contínua de ondas incidentes e refletidas nos extremos fixos. Esta corda terá um número de possíveis oscilações naturais, chamados de modos normais de vibração, cada qual com uma frequência característica.

Em geral, o movimento de uma corda vibrante é descrito por uma superposição de vários modos normais e quais destes modos estão presentes, em um determinado movimento, depende de como as oscilações tiveram início.

Condição de que as duas extremidades permaneçam fixas:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$$

Característica de um Modo Normal: Onda estacionária

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta) \quad \text{solução de} \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Modos Normais de Vibração

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{v} \right)$$

Solução: $A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$, onde $A(0) = A(L) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = 0 \implies a = 0 \implies A(x) = b \sin(kx) \\ A(L) = 0 \implies b \sin(kL) = 0 \implies k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{array} \right.$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

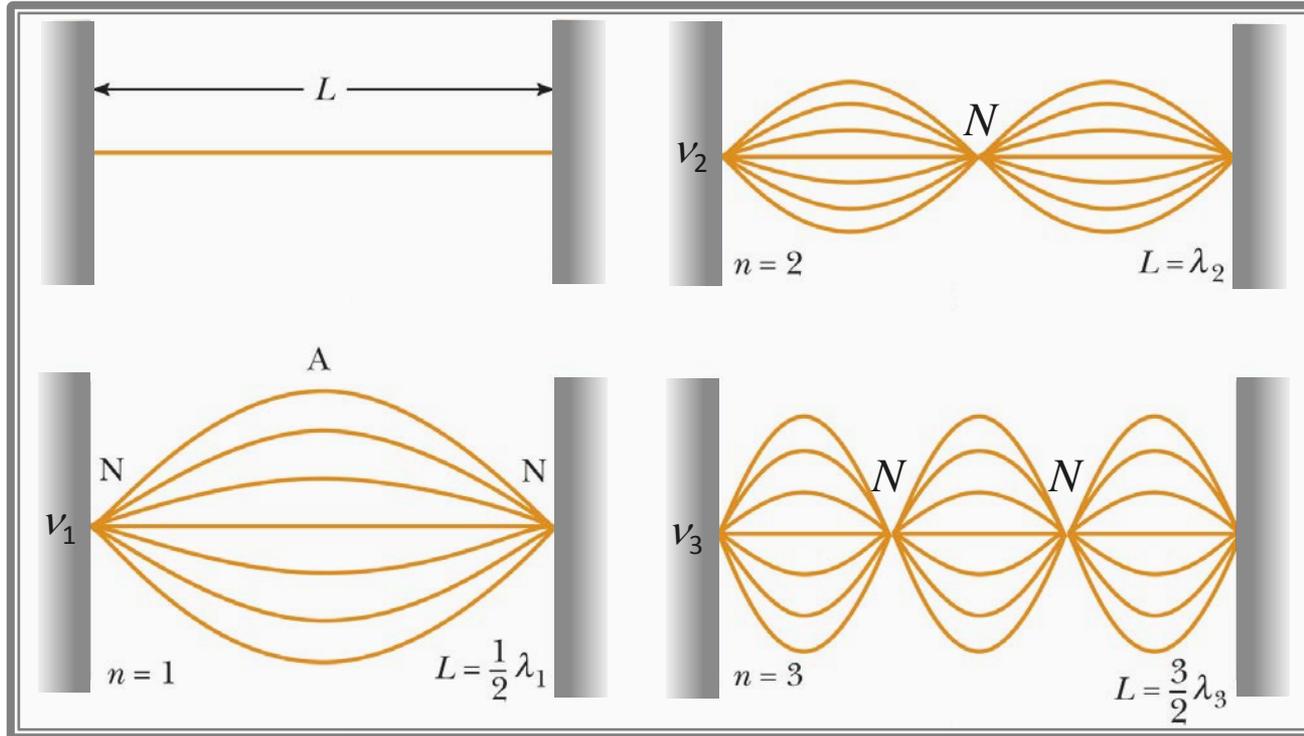
$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} v$$

Os comprimentos de onda associados aos modos normais de vibração são:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Modos Normais de Vibração

Os modos de vibração de ordens mais baixas estão ilustrados na figura abaixo:



Modo de ordem n : contém $(n-1)$ nodos e $n/2$ comprimentos de onda

Frequência do modo n :

$$\nu_n = n\nu_1 \quad \text{onde} \quad \nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

↳ n 'ésimo harmônico da frequência ν_1 (frequência fundamental)

Exercício

1. Uma corda uniforme de 20 m de comprimento e massa de 2 kg esta esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.
- (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda;
 - (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue a outra extremidade;
 - (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

Dados: $L = 20$ m; $m = 2$ kg; $A = 3$ cm = 0,03 m; $\nu = 5$ Hz; $T = 10$ N

(a) Densidade linear da corda: $\mu = \frac{m}{L} = \frac{2}{20} \implies \mu = 0,1$ kg/m

Velocidade: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} \implies v = 10$ m/s

Comprimento de onda: $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{10}{5} \implies \lambda = 2$ m

Exercício

(b) Equação da corda: $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta) = 0,03 \cos(\pi x - 10\pi t + \delta)$, pois $\omega = 2\pi\nu = 10\pi \text{ rad/s}$ e $k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{10} = \pi \text{ rad/m}$

De acordo com o problema, temos, em $t = 0$ e $x = 0$, $y = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$. Substituindo na equação da corda:

$$y(0, 0) = 0,015 = 0,03 \cos \delta \implies \cos \delta = \frac{1}{2} \implies \delta = \frac{\pi}{3}$$

$$\implies y(x, t) = 0,03 \cos(\pi x - 10\pi t + \pi/3)$$

(c) A intensidade I representa o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda, ou seja, a intensidade é dada como o valor da potência média sobre um período. Assim: $I = \frac{1}{2} \nu v \omega^2 A^2 \implies I = 0,44 \text{ W}$