CÁLCULO II - 7 - REGRA DA CADEIA

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}$, podemos naturalmente considerar a composição de f com r, definindo:

$$g: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = f(r(x))$$

cuja derivada é dada pela regra da cadeia:

$$g'(x) = f'(r(x)) \cdot r'(x)$$

Estamos interessados em estender a regra da cadeia para campos escalares.

<u>Teorema 7.1</u>: " Sejam $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{r}: J \subseteq \mathbb{R} \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ com S um conjunto aberto e defina a função composta:

$$g: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(t) = f[\mathbf{r}(t)]$$

Se f for diferenciável em $\mathbf{r}(t)$ e existir $\mathbf{r}'(t)$, para algum ponto $t \in J$, então g é diferenciável em $t \in J$ e

$$g'(t) = \nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) \text{ .''}$$

<u>Demonstração</u>:

Denote por $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t)$, onde $t \in J$ é tal que $\exists\, \mathbf{r}'(t)$.

Como S é aberto, $\exists r \in \mathbb{R}_+$, tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset S$.

Tomando $h \in \mathbb{R}^*$ pequeno o suficiente para que:

$$\mathbf{r}(t+h) \in B(\mathbf{a}, r)$$

Consideramos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$$

Claramente, $\mathbf{y} \xrightarrow{h \to 0} 0$, pois $\mathbf{r}$ é diferenciável em $t \in J$, e consequentemente, contínua. Assim,

$$g(t+h) - g(t) = f[\mathbf{r}(t+h)] - f[\mathbf{r}(t)]$$

$$= f(\mathbf{y} + \mathbf{a}) - f(\mathbf{a})$$

Como f é diferenciável em $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, temos da <u>definição</u> 6.2 que:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\| \, E(\mathbf{a}, \mathbf{y})$$

com $\lim\limits_{\|\mathbf{y}\| \to 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = 0$. Portanto,

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} + \frac{\|\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)\|}{h} E(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \right]$$

$$= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t) + \|\mathbf{r}'(t)\| \overbrace{\lim_{h \to 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{y})}^{0} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

$\blacksquare$

Exemplo 7.2: "Derivada direcional ao longo de uma curva:

Sejam $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada pela função vetorial diferenciável $\mathbf{r}: D \subseteq \mathbb{R} \to S$.

A derivada da função composta é dada pela regra da cadeia

$$g(t) = f[\mathbf{r}(t)] \Rightarrow g'(t) = \nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Se γ for uma reta, podemos tomar $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{a}$

$$\Rightarrow g'(t) = \nabla f[\mathbf{v}t + \mathbf{a}] \cdot \mathbf{v} = f'(\mathbf{v}t + \mathbf{a}, \mathbf{v})$$

que corresponde à derivada de f no ponto $\mathbf{v}t + \mathbf{a}$ ao longo do vetor $\mathbf{v}$. Em particular, se $\mathbf{v}$ for unitário, i.e., $\|\mathbf{v}\| = 1$,

$$g'(t) = \nabla f[\mathbf{v}t + \mathbf{a}] \cdot \mathbf{v}$$

corresponde a derivada direcional de f ao longo da reta γ no ponto $\mathbf{v}t + \mathbf{a}$.

Assim, de uma forma geral, temos que para uma curva γ arbitrária com $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbb{O}$, $\forall t \in D$,

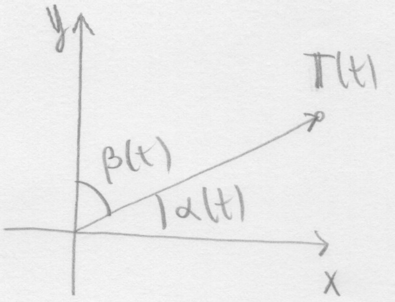
$$g'(t) = \nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbb{T}(t), \quad \text{onde } \mathbb{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

é a derivada direcional de f ao longo da curva γ no ponto $\mathbf{r}(t)$.

Em particular, se $n=2$, podemos decompor o vetor tangente unitário como:

$$\mathbb{T}(t) = \cos\alpha(t)\, \mathbb{e}_1 + \cos\beta(t)\, \mathbb{e}_2$$

onde $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são os ângulos entre $\mathbb{T}(t)$ e os eixos coordenados



Consequentemente,

$$\nabla f[\mathbb{r}(t)] \circ \mathbb{T}(t) = \partial_1 f[\mathbb{r}(t)] \cos\alpha(t) + \partial_2 f[\mathbb{r}(t)] \cos\beta(t) \text{ ''}$$

É importante notar que por ser definida em termos do vetor tangente $\mathbb{T}$, a derivada direcional ao longo da curva γ, $\nabla f \circ \mathbb{T}$, depende da parametrização escolhida para a curva γ. Uma reparametrização poderia inverter o sentido de $\mathbb{T}$, trocando, assim, o sinal global da derivada direcional.

<u>Exemplo</u> 7.3: " Calcular a derivada direcional do campo escalar

$f(x,y) = x^2 - 3xy$, ao longo da parábola $y = x^2 - x + 2$

no ponto $(1,2)$.

<u>Solução</u>: Precisamos calcular: $\nabla f[\mathbb{r}(t)] \cdot \mathbb{T}(t) \Big|_{\mathbb{r}(t) = (1,2)}$. Como:

$$\nabla f(x,y) = \partial_x f \, \mathbb{e}_1 + \partial_y f \, \mathbb{e}_2 = (2x - 3y)\mathbb{e}_1 - 3x \, \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,2) = -4\mathbb{e}_1 - 3\mathbb{e}_2$$

Parametrizando a parábola $y = x^2 - x + 2$ por

$$\mathbb{r}(t) = t\,\mathbb{e}_1 + (t^2 - t + 2)\mathbb{e}_2$$

temos que $\mathbb{r}(1) = (1,2)$ e

$$\mathbb{r}'(t) = \mathbb{e}_1 + (2t-1)\mathbb{e}_2 \Rightarrow \mathbb{r}'(1) = \mathbb{e}_1 + \mathbb{e}_2$$

$$\Rightarrow \mathbb{T}(1) = \frac{\mathbb{r}'(1)}{\|\mathbb{r}'(1)\|} = \frac{\mathbb{e}_1 + \mathbb{e}_2}{\sqrt{2}}$$

Logo, a derivada direcional é

$$\nabla f(1,2) \cdot \mathbb{T}(1) = (-4,-3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2}} \quad //$$

<u>Teorema 7.4</u>: "Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar não-constante e diferenciável. Se $f(x,y) = c$, $\forall c \in \mathbb{R}$ descrever uma curva γ com tangente em todos os seu pontos, então as seguintes propriedades são validas:

(a) O vetor gradiente ∇f é normal à curva γ;

(b) A derivada direcional de f ao longo de γ é nula;

(c) A derivada direcional de f possui seu maior valor em uma direção normal à curva γ."

<u>Demonstração</u>:

Se $\mathbb{T}$ for um vetor unitário tangente à curva γ, a derivada direcional de f ao longo de γ é:

$$\nabla f \cdot \mathbb{T} = \|\nabla f\| \cos\theta = \begin{cases} 0 & , \nabla f \perp \mathbb{T} \\ \|\nabla f\| & , \nabla f \parallel \mathbb{T} \end{cases}$$

Logo, as propriedades (b) e (c) são conseqüências diretas de (a)

Para provarmos (a), considere uma parametrização $\mathbb{r}(t)$ da curva γ e introduza a função: $g(t) = f(\mathbb{r}(t)) = c$

$$g'(t) = \nabla f[\mathbb{r}(t)] \cdot \mathbb{r}'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f \perp \mathbb{r}' \Rightarrow \nabla f \perp \gamma$$

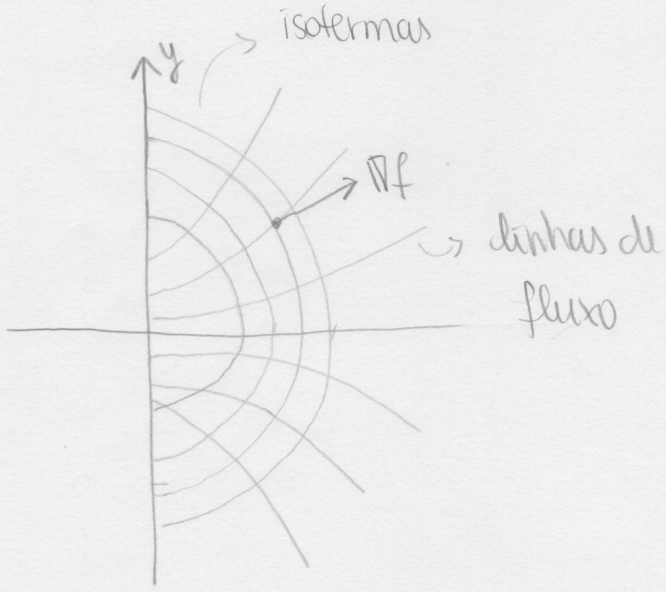
$\blacksquare$

Podemos interpretar o teorema 7.4, em termos das curvas de nível do campo escalar f:

$$L(c) = \{ x \in S \mid f(x) = c \}.$$

O item (a) nos ensina que as curvas de nível são ortogonais ao vetor gradiente. Já o item (b) nos diz o óbvio, ou seja, que o valor do campo escalar não muda ao longo das curvas de nível, ao passo que varia maximalmente na direção normal à elas, item (c).

Assim, se por exemplo, $f(x)$ representar a temperatura no ponto $x \in S$ de uma placa metálica plana, as curvas de nível são

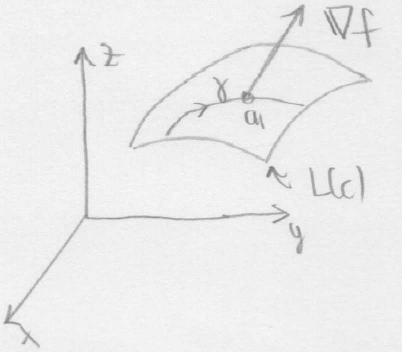


são isotermas e o fluxo de calor ocorre na direção de maior variação da temperatura, que constitui uma família de curvas ortogonais às isotermas conhecidas como linhas de fluxo.

Considere agora um campo escalar: $f: S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e fixe uma de suas superfícies de nível:

$$L(c) = \{ \mathbf{x} \in S \mid f(\mathbf{x}) = c \}$$

Seja $\mathbf{a} \in L(c)$ e tome uma curva $\gamma \subset L(c)$ através de $\mathbf{a}$. Mostremos, pois, que o gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$ é normal à curva γ.



Para tanto, suponha que γ seja parametrizada por uma função vetorial: $\mathbf{r}: D \subseteq \mathbb{R} \to L(c)$, diferenciável.

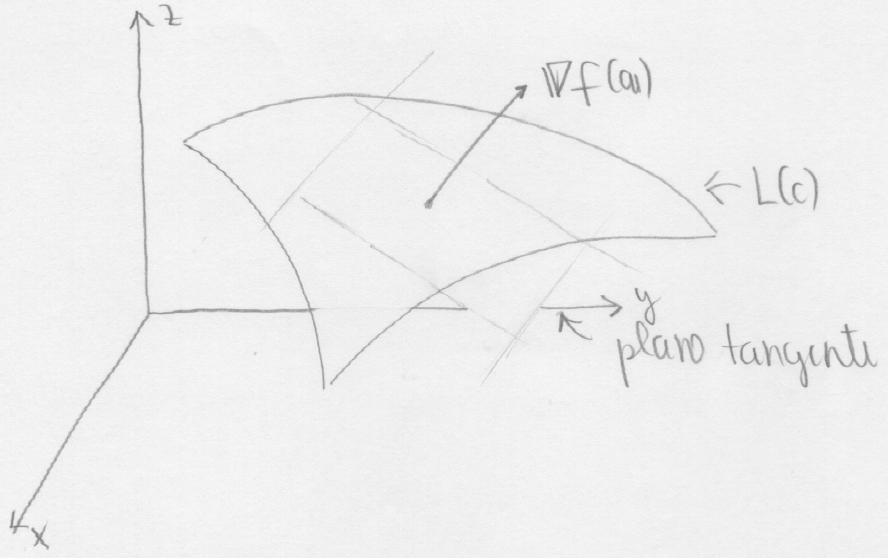
Claramente, $\forall t \in D$

$$g(t) := f[\mathbf{r}(t)] = c \quad \Rightarrow \quad g'(t) = \nabla f[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, se $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{a}$, concluímos que

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\mathbf{a}) \perp \gamma$$

Se considerarmos uma família de curvas sobre a superfície de nível $L(c)$, todas passando pelo ponto $\mathbf{a} \in L(c)$, concluímos, pela disussão anterior que os vetores tangentes de todas essas curvas são perpendiculares ao $\nabla f(\mathbf{a})$. Se $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, tais vetores tangentes determinam um plano normal ao vetor $\nabla f(\mathbf{a})$, denominado <u>plano tangente</u> a superfície $L(c)$ no ponto $\mathbf{a}$.



<u>Definição 7.5</u> : " Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, diferenciável, e considere as superfícies de nível $L(c) = \{x \in S \mid f(x) = c\}$. O plano tangente à superfície de nível $L(c)$ no ponto $a \in L(c)$ é definido pela equação:

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = 0 \text{ ."}$$

Similarmente, podemos definir a reta tangente a uma curva de nível:

<u>Definição 7.6</u> : " Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável e considere as curvas de nível $L(c) = \{x \in S \mid f(x) = c\}$. A reta tangente à curva de nível $L(c)$ no ponto $a \in L(c)$ é definida pela equação

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = 0 \text{ ."}$$