CAPÍTULO III - VARIÁVEIS E VETORES ALEATÓRIOS

- Conceito e definição
- Função distribuição de probabilidade
- Função densidade de probabilidade
- Revisão: vetores, matrizes e espaços lineares
- Vetores aleatórios
- Distribuições e densidades conjuntas
- Distribuições e densidades condicionais
- **Transformações com variáveis aleatórias**
- **Médias e esperanças**
- Função característica e momentos
- Vetores aleatórios gaussianos
- Funções lineares de vetores gaussianos
- Teorema do Limite Central

Transformações com variáveis aleatórias

- Seja dada uma variável aleatória $\mathbf{x}$, e seja $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$ uma função qualquer da variável aleatória $\mathbf{x}$. A cada possível resultado do experimento temos associado um valor para $\mathbf{x}$ e, portanto, um valor para $\mathbf{y}$. Dessa forma, $\mathbf{y}$ é também uma variável aleatória. Um problema, que ocorre frequentemente, é o de determinar as funções densidade e distribuição da variável aleatória $\mathbf{y}$ dadas as de $\mathbf{x}$, e sua solução é dada a seguir.
- Chamando-se de I_y o conjunto de todos os números reais x tais que $g(x) \leq y$, temos que
- $F_{\mathbf{y}}(y) = P(\mathbf{y} \leq y) = P(\mathbf{x} \in I_y)$.
- Para se determinar $F_{\mathbf{y}}(y)$ deve-se, então, determinar a probabilidade de $\mathbf{x}$ pertencer a I_y.

Exemplo: transformação linear

- Seja $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$. $F_{\mathbf{y}}(y) = P(\mathbf{y} \leq y)$. Se $a > 0$ então

$$\mathbf{y} \leq y \Rightarrow a\,\mathbf{x} + b \leq y \Rightarrow \mathbf{x} \leq \frac{y-b}{a} \Rightarrow F_{\mathbf{y}}(y) = P\left(\mathbf{x} \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_{\mathbf{x}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- e

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{1}{a} f_{\mathbf{x}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- Se $a < 0$, então

$$\mathbf{y} \leq y \Rightarrow a\,\mathbf{x} + b \leq y \Rightarrow \mathbf{x} \geq \frac{y-b}{a} \Rightarrow F_{\mathbf{y}}(y) = P\left(\mathbf{x} \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_{\mathbf{x}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- e

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{-1}{a} f_{\mathbf{x}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Exemplo: transformação não linear

- Seja $\mathbf{y} = 1 / \mathbf{x}^2$.
- Para $y > 0$:

$$\mathbf{y} \le y \Rightarrow \frac{1}{\mathbf{x}^2} \le y \Rightarrow |\mathbf{x}| \ge \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow F_{\mathbf{y}}(y) =$$

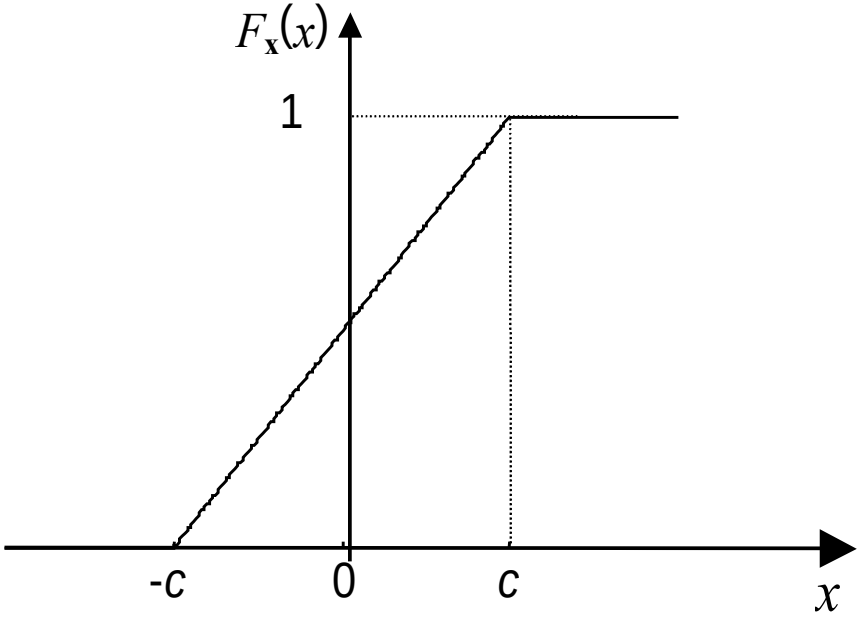
$$= P\left(\mathbf{x} \ge \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + P\left(\mathbf{x} \le -\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = F_{\mathbf{x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 1 - F_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

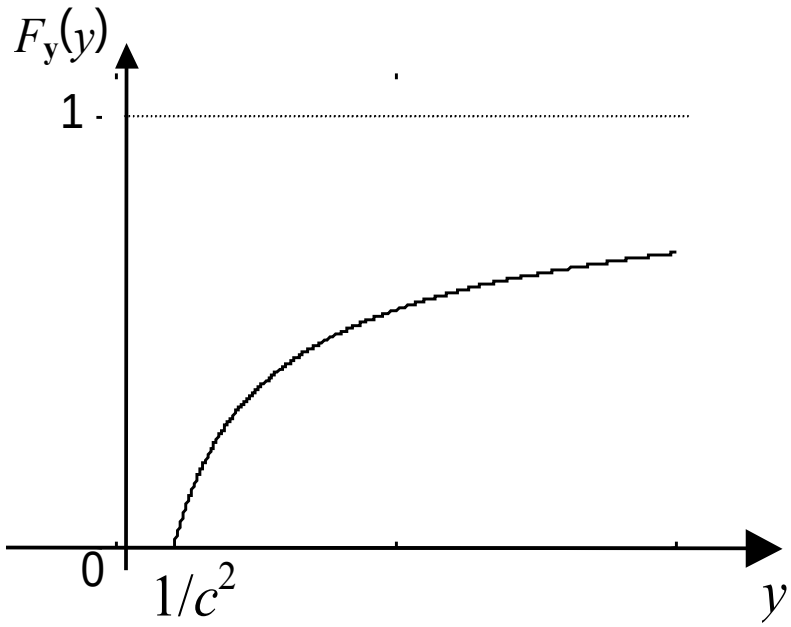
- e para $y < 0$, $F_{\mathbf{y}}(y) = 0$.
- Supondo-se que $\mathbf{x}$ seja uniformemente distribuído entre $-c$ e c, temos

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \frac{x}{2c} + \frac{1}{2} \quad \text{para } |x| \le c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\mathbf{y}}(y) = \frac{-1}{2c\sqrt{y}} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2c\sqrt{y}} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{c\sqrt{y}} \quad \text{para } y \ge \frac{1}{c^2}$$

Exemplo: transformação não linear





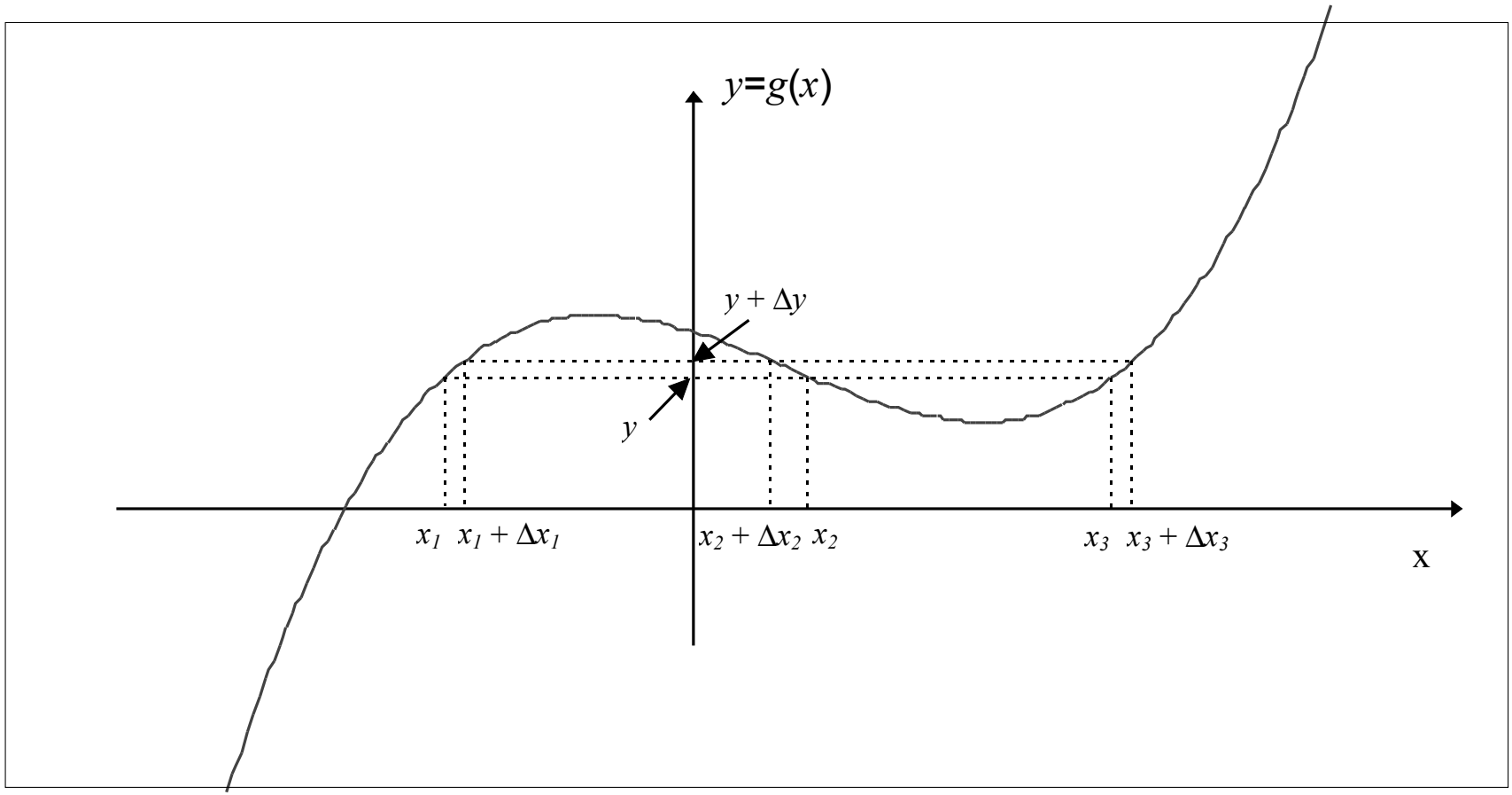
Método da função densidade de probabilidade

- Vamos admitir que $\mathbf{x}$ seja do tipo contínuo e que $g(x)$ seja uma função contínua, mas nunca seja constante em qualquer intervalo.
- Isto significa que a equação $y=g(\mathrm{x})$ tem no máximo um número contável de raízes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para um dado y.
- Dessa forma, para um dado y resolve-se a equação $y=g(x)$, tendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como suas raízes reais, ou seja
- $$y=g(x_1)= g(x_2)=\ldots= g(x_n)$$
- Então,

$$f_{\mathbf{y}}(y)\,dy = P(y<\mathbf{y}<y+dy) = \sum_{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x_i}>0} P(x_i<\mathbf{x}<x_i+dx_i) + \sum_{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x_j}<0} P(x_j+dx_j<\mathbf{x}<x_j) =$$

$$= \sum_{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x_i}>0} f_{\mathbf{x}}(x_i)\,dx_i - \sum_{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x_j}<0} f_{\mathbf{x}}(x_j)\,dx_j$$

Método da função densidade de probabilidade



Método da função densidade de probabilidade

- Como $g'(x)=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, dividindo-se ambos os membros por $\mathrm{d}y$, obtém-se

$$f_{\mathbf{y}}(y)=\sum_i \frac{f_{\mathbf{x}}(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

- que é a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória $\mathbf{y}$ em função da função densidade de probabilidade da variável aleatória $\mathbf{x}$.

Exemplo: transformação linear

- Seja $\mathbf{y}=a\,\mathbf{x}+b$

$$y=a\,x+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{f_{\mathbf{x}}\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

- Se, por exemplo, x for uniformemente distribuído entre $-c$ e c então

$$f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{1/2c}{|a|}=\frac{1}{2|a|c}$$

- para y entre $b-|a|\,c$ e $b+|a|\,c$.

Exemplo: transformação quadrática

- Seja $\mathbf{y}$ a potência dissipada num resistor de valor $r = 100\ \Omega$, quando a tensão $\mathbf{v}$, que é uma variável aleatória, é aplicada sobre ele.
- Determinar a função densidade de probabilidade da variável aleatória $\mathbf{y}$.
- Neste caso $\mathbf{y} = \mathbf{v}^2 / r$, e portanto:

$$g'(v) = \frac{2v}{r} \quad \text{e} \quad v_1 = \sqrt{r\ y},\ v_2 = -\sqrt{r\ y} \quad \text{para}\ \ y > 0$$

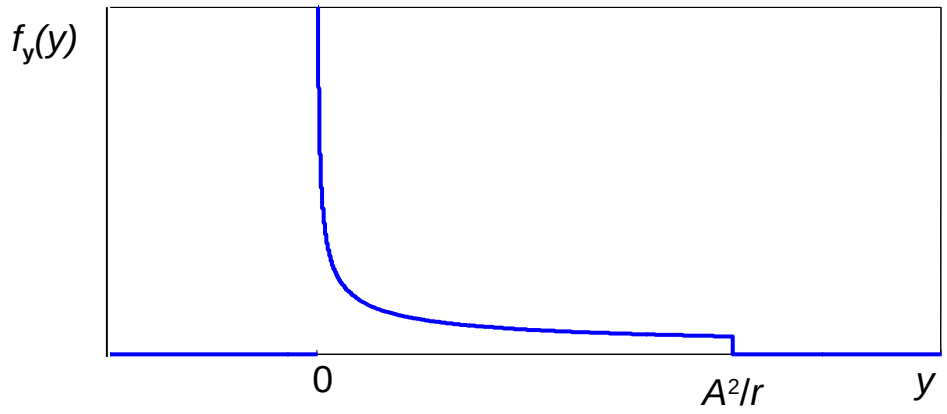
$$\Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{f_{\mathbf{v}}\left(\sqrt{r\ y}\right)}{2\sqrt{r\ y}/r} + \frac{f_{\mathbf{v}}\left(-\sqrt{r\ y}\right)}{2\sqrt{r\ y}/r}$$

Exemplo: transformação quadrática

- Se, por exemplo, $\mathbf{v}$ for uniformemente distribuída entre $-A$ e A:

$$f_{\mathbf{v}}(v)=\begin{cases} 1/2A & -A\le v\le A \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$f_{\mathbf{y}}(y)=\begin{cases} \dfrac{1/2A}{2\sqrt{r\ y}/r}+\dfrac{1/2A}{2\sqrt{r\ y}/r} & 0<y\le A^2/r \\ 0 & y\le 0 \quad \text{ou} \quad y>A^2/r \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{r}}{2A\sqrt{y}} & 0<y\le A^2/r \\ 0 & y\le 0 \quad \text{ou} \quad y>A^2/r \end{cases}$$



Transformações com vetores aleatórios

- Vamos estender, agora, o resultado anterior para vetores aleatórios n-dimensionais.
- O problema, agora, é determinar a densidade conjunta das k variáveis aleatórias $\mathbf{y}_1=g_1(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$, …, $\mathbf{y}_k=g_k(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ em função de $f_{\underline{x}}(\underline{x})$ e das funções $g_i(\underline{x})$.
- Se $k > n$, a função densidade de probabilidade desconhecida é singular. Neste caso determina-se a estatística de n dessas variáveis aleatórias, $\mathbf{y}_1$, …, $\mathbf{y}_n$, e as outras serão funções destas.
- Se $k < n$, então usando variáveis auxiliares, por exemplo $\mathbf{y}_{k+1}= \mathbf{x}_{k+1}$, …, $\mathbf{y}_n= \mathbf{x}_n$, aumenta-se a dimensão do vetor $\underline{\mathbf{y}}$ para n.
- Pode-se, portanto, admitir que $k=n$. Neste caso, então, procede-se da forma descrita a seguir.

Transformações com vetores aleatórios

- Resolve-se o sistema

$$\begin{cases} g_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \cdots, x_n) = y_n \end{cases}$$

- Se esse sistema tiver solução única: $x_1, \ldots, x_n$, então

$$f_{\underline{\mathbf{y}}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{\mathbf{x}}}(x_1, \cdots, x_n)}{|J(x_1, \cdots, x_n)|}$$

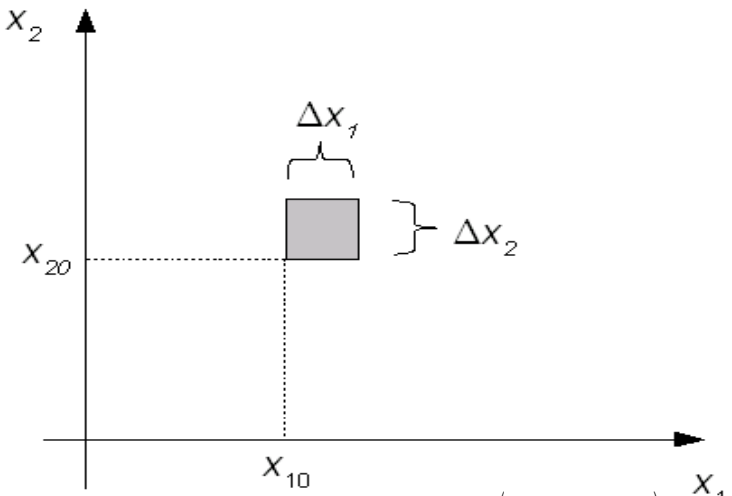
- onde $J(.)$ é o jacobiano da transformação acima, dado pelo determinante

$$J(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

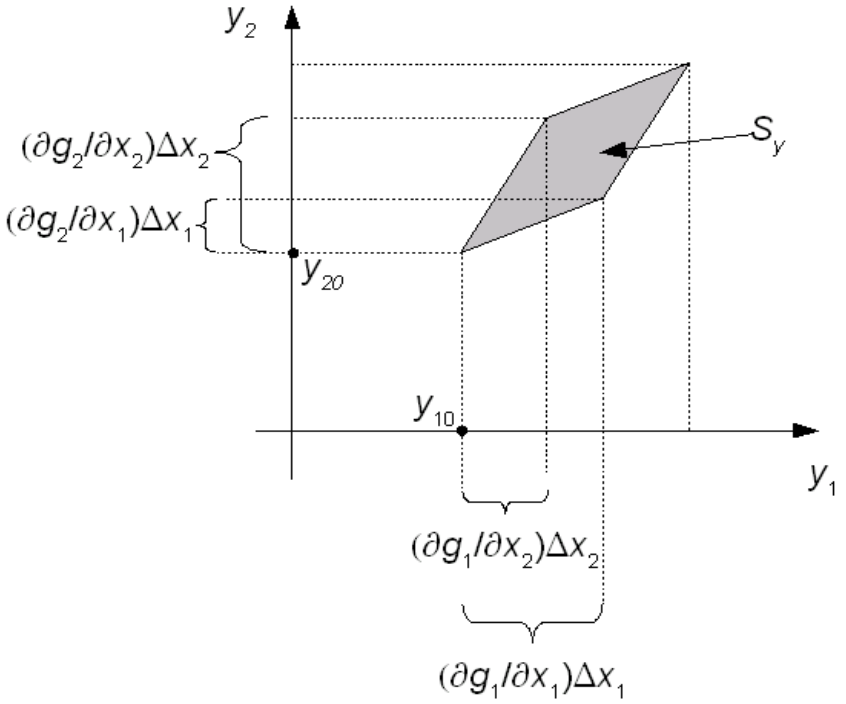
Transformações com vetores aleatórios

- Os números $x_1, \ldots, x_n$ são, naturalmente, funções de $y_1, \ldots, y_n$.
- Se o sistema não tiver solução, então $f_{\underline{\mathbf{y}}}(\underline{y}) = 0$.
- Se tiver mais de uma solução, somam-se as correspondentes expressões resultantes de todas as soluções.
- A prova do teorema acima é uma extensão do caso unidimensional.

Transformações com vetores aleatórios



$$y_{10} = g_1(x_{10}, x_{20})$$
$$y_{20} = g_2(x_{10}, x_{20})$$



$$S_y = \left\| \begin{matrix} \partial g_1/\partial x_1 \Delta x_1 & \partial g_1/\partial x_2 \Delta x_2 \\ \partial g_2/\partial x_1 \Delta x_1 & \partial g_2/\partial x_2 \Delta x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \partial g_1/\partial x_1 & \partial g_1/\partial x_2 \\ \partial g_2/\partial x_1 & \partial g_2/\partial x_2 \end{matrix} \right\| \Delta x_1 \Delta x_2 = \left| J(x_{10}, x_{20}) \right| \Delta x_1 \Delta x_2$$

$$f_{\underline{\mathbf{x}}}(x_{10}, x_{20}) \Delta x_1 \Delta x_2 = f_{\underline{\mathbf{y}}}(y_{10}, y_{20}) \; S_y = f_{\underline{\mathbf{y}}}(y_{10}, y_{20}) \left| J(x_{10}, x_{20}) \right| \Delta x_1 \Delta x_2$$

Exemplo: gaussianas e Rayleigh

- Seja $$f_{\mathbf{x}}(x)=\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \text{e} \quad f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{e^{-y^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$
- com $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ independentes.
- Define-se

$$\mathbf{r}=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}=\begin{cases}\tan^{-1}(\mathbf{y}/\mathbf{x}) & x\geq 0\\ \tan^{-1}(\mathbf{y}/\mathbf{x})+\pi & x<0\end{cases}$$

- Determinar $f_{\mathbf{r}\boldsymbol{\theta}}(r,\,\theta)$.
- Temos que:

$$f_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

Exemplo: gaussianas e Rayleigh

- resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & x \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- Obtemos

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$$

- Calculando-se o jacobiano da transformação, temos

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

- Portanto:

$$f_{\mathbf{r}\theta}(r, \theta) = r\ f_{\mathbf{xy}}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-(r^2)/2\sigma^2}$$

Exemplo: soma de variáveis aleatórias

- Dada a variável aleatória $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, sendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ duas variáveis aleatórias, determinar a função densidade de probabilidade de $\mathbf{z}$ em função da função densidade de probabilidade conjunta de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- Vamos criar a variável aleatória $\mathbf{w} = \mathbf{y}$, obtendo-se então o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{w} = \mathbf{y} \end{cases}$$

- cuja solução, para valores z e w, é $\begin{cases} y = w \\ x = z - w \end{cases}$
- O jacobiano, neste caso, é $J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- Portanto,

$$f_{\mathbf{zw}}(z, w) = f_{\mathbf{xy}}(z - w, w)$$

Exemplo: soma de variáveis aleatórias

- Se as variáveis aleatórias $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ forem independentes, então

$$f_{\mathbf{zw}}(z,w) = f_{\mathbf{x}}(z-w)\, f_{\mathbf{y}}(w)$$

- Assim, a função densidade de probabilidade da variável aleatória $\mathbf{z}$ será dada por

$$f_{\mathbf{z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{zw}}(z,w)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(z-w,w)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(z-w)\, f_{\mathbf{y}}(w)\, dw = f_{\mathbf{x}}(z) * f_{\mathbf{y}}(z)$$

- onde a última igualdade só vale se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ forem independentes.
- O símbolo * indica o operador convolução.

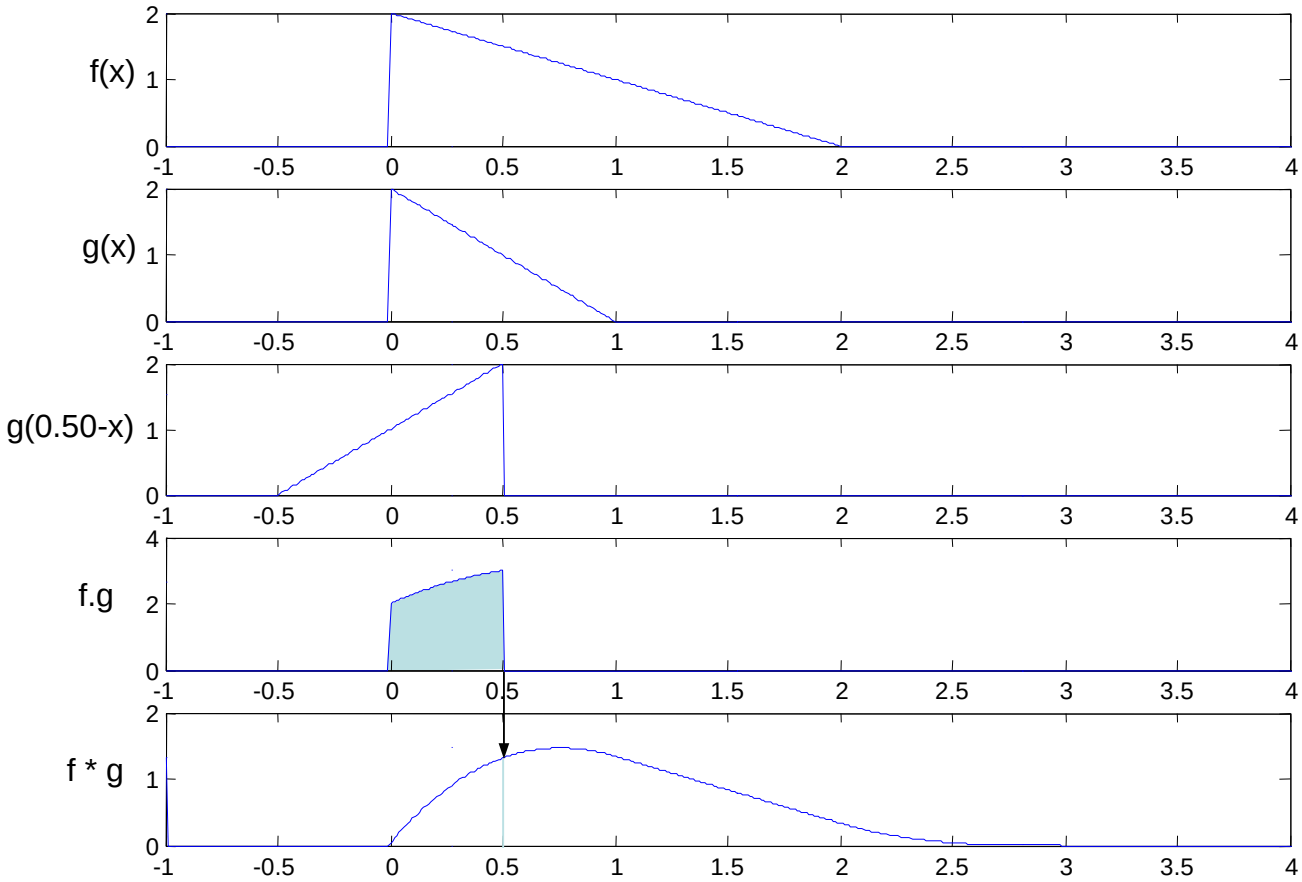
Convolução

- A convolução de duas funções f e g, representada por $f * g$, *é definida como a integral do produto dessa funções depois que uma delas é invertida e deslocada:*

$$(f*g)(x) = f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, g(x-\lambda)\; d\lambda$$

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- Se as funções f e g tem duração finita Δf e Δg, então $f * g$ tem duração $\Delta f + \Delta g$
- A convolução apresenta a propriedade de gerar uma função mais "suave" do que as duas funções que a compõe.

Convolução



Médias e esperanças

- Médias são extremamente importantes no estudo de variáveis aleatórias.
- Por exemplo, suponhamos que se deseja determinar a média de altura de uma população.
- Vamos admitir que possamos obter os dados sobre a altura de todos os N indivíduos, com precisão de centímetros.
- Dessa forma teremos um número finito, n, de valores possíveis para a altura, x_i, com i variando de 1 a n.
- Se o número de pessoas com altura x_i é N_i, então a altura média pode ser calculada por

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \cdots + N_n x_n}{N} = \frac{N_1}{N} x_1 + \frac{N_2}{N} x_2 + \cdots + \frac{N_n}{N} x_n$$

$$N = \sum_i N_i$$

Médias e esperanças

- No limite, quando N tende a infinito, a relação N_i/N tende para a probabilidade $P_{\mathbf{x}}(x_i)$.
- Assim,

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_{\mathbf{x}}\left(x_i\right) = E\left\{\mathbf{x}\right\}$$

- A média é também chamada de esperança ou valor esperado de uma variável aleatória, e ambas as notações acima, dependendo da circunstância, serão utilizadas.

Médias e esperanças

- Para variáveis aleatórias contínuas, o valor esperado será calculado, de forma análoga, por

$$\bar{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_{\mathbf{x}}(x)\, dx$$

- Por exemplo, para uma variável aleatória gaussiana:

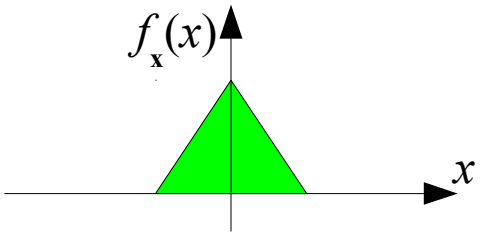
$$\bar{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = m$$

- e para uma variável aleatória com densidade uniforme entre x_1 e x_2:

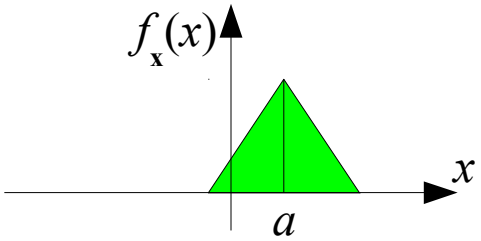
$$\bar{\mathbf{x}} = \int_{x_1}^{x_2} x \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

Médias e esperanças

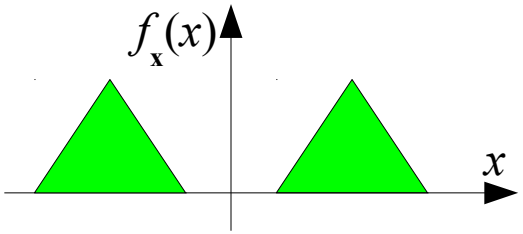
- se $f_{\mathbf{x}}(x)$ for uma função par, então $E\{\mathbf{x}\}=0$;



- se $f_{\mathbf{x}}(x)$ for simétrica em relação a $x=a$, então $E\{\mathbf{x}\}=a$;



- a variável aleatória $\mathbf{x}$ pode nunca assumir o valor de sua média para nenhum resultado do experimento.



Médias e esperanças

- Analogamente, para o caso n-dimensional temos, sendo $\underline{\mathbf{x}}$ um vetor aleatório de dimensão n:

$$E\{\underline{\mathbf{x}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x}\ f_{\underline{\mathbf{x}}}(x_1, \cdots, x_n)\ dx_1 \cdots dx_n = \left[E\{\mathbf{x_1}\} \quad E\{\mathbf{x_2}\} \quad \cdots \quad E\{\mathbf{x_n}\} \right]^T$$

- Onde

$$E\{\mathbf{x_i}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i\ f_{\underline{\mathbf{x}}}(x_1, \cdots, x_n)\ dx_1 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{\mathbf{x_i}}(x_i)\, dx_i$$

- Note que a média também é um vetor.

Valor esperado de $g(\mathbf{x})$

- Sendo a variável aleatória $\mathbf{y}$ dada por $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$, temos que, no caso de variáveis discretas:

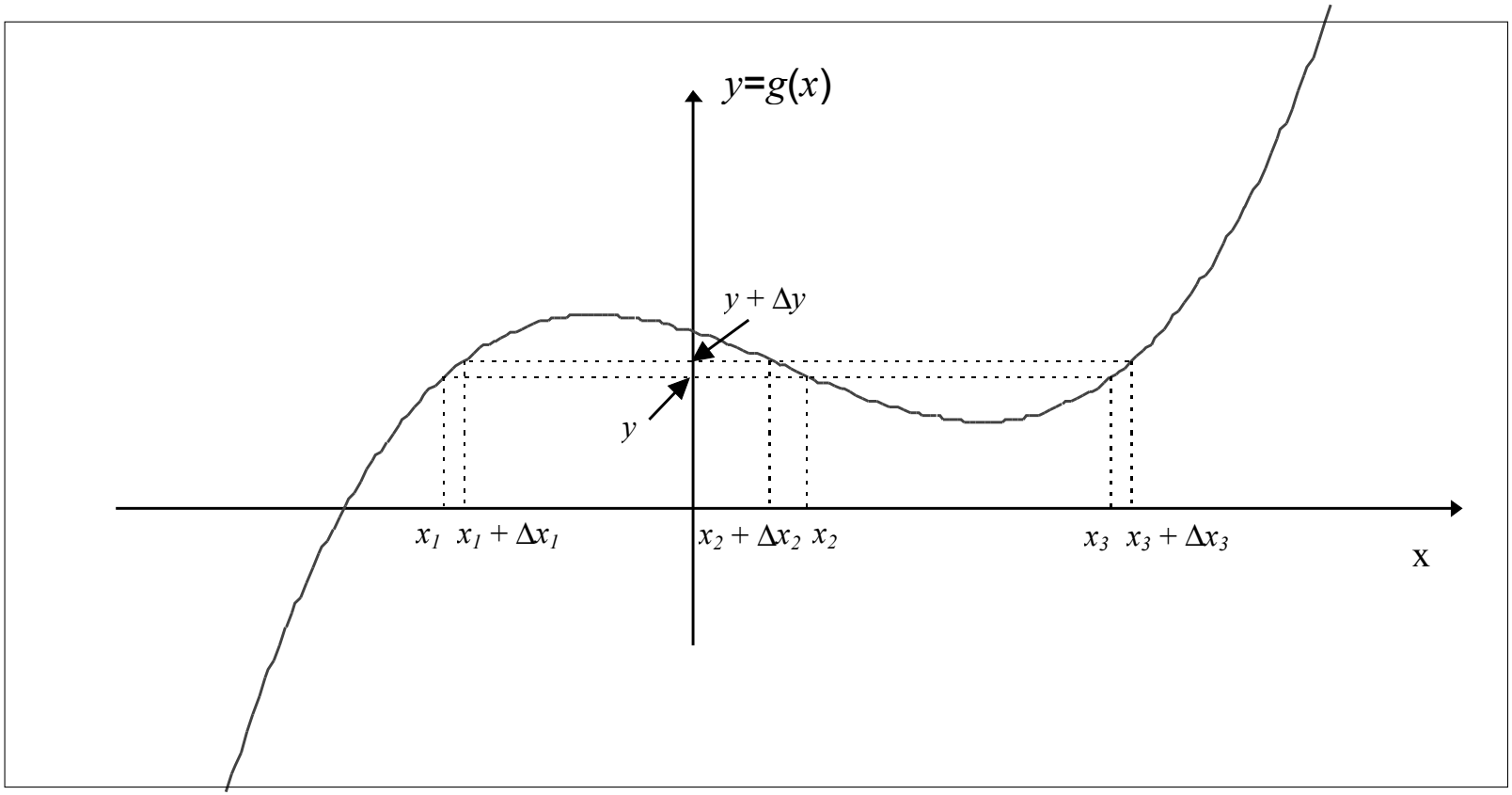
$$E\{\mathbf{y}\}=\sum_{i=1}^{n_y} y_i P_{\mathbf{y}}(y_i)=\sum_{j=1}^{n_x} g(x_j) P_{\mathbf{x}}(x_j)$$

- E no caso de variáveis contínuas, de forma análoga:

$$E\{\mathbf{y}\}=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\mathbf{x}}(x)\, dx$$

- Esse resultado é muito interessante, pois nos permite calcular a média da variável aleatória $\mathbf{y}$ sem ter que determinar sua densidade de probabilidade, o que é, em geral, muito trabalhoso.

Valor esperado de $g(\mathbf{x})$



$$y\ f_{\mathbf{y}}(y)\ dy = y\ P\{y \le \mathbf{y} < y+dy\} = y \sum_i P(x_i \le \mathbf{x} < x_i + dx_i) = \sum_i g(x_i)\, f_{\mathbf{x}}(x_i)\, dx_i$$

Exemplo: média de senóides

- Um gerador senoidal gera em sua saída um sinal da forma $A \cos \omega \mathbf{t}$.
- Essa saída é amostrada em instantes aleatórios.
- A saída amostrada é, então, uma variável aleatória, que chamaremos de **x**, e que pode tomar qualquer valor no intervalo $(-A, A)$.
- Determine a média e o valor quadrático médio, dessa saída amostrada.

- ***Solução:*** Se a saída é amostrada num instante aleatório, a variável $\mathbf{x}$ é uma função da variável aleatória $\mathbf{t}$:
- $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = A \cos \omega \mathbf{t}$.
- Sendo $\boldsymbol{\theta} = \omega \mathbf{t}$, $\boldsymbol{\theta}$ é também uma variável aleatória.

Exemplo: média de senóides

- Como o instante $\mathbf{t}$ é escolhido aleatoriamente, podemos admitir que essa variável $\boldsymbol{\theta}$, que pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, 2\pi)$, tem distribuição uniforme nesse intervalo.
- Assim:

$$\bar{\mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\, f_{\boldsymbol{\theta}}(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} A\, \cos\theta\, d\theta = 0$$

- e

$$\overline{\mathbf{x}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(\theta)\, f_{\boldsymbol{\theta}}(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} A^2 \cos^2\theta\, d\theta = \frac{A^2}{2}$$

Valor esperado de funções de vetores aleatórios

- Seja $\underline{\mathbf{x}}$ um vetor aleatório de dimensão m
- *Seja* $\underline{g}(\underline{\mathbf{x}})$ uma função de $\boldsymbol{R}^m$ em $\boldsymbol{R}^n$
- Então $\underline{\mathbf{y}}=\underline{g}(\underline{\mathbf{x}})$ será um vetor aleatório de dimensão n, e sua média pode ser calculada como:

$$E\left\{\underline{\mathbf{y}}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\underline{g}\left(x_1,\cdots,x_m\right)f_{\underline{\mathbf{x}}}\left(x_1,\cdots,x_m\right)dx_1\cdots dx_m$$

Média da soma

- Se $g_1(\underline{\mathbf{x}}), g_2(\underline{\mathbf{x}}), \ldots, g_n(\underline{\mathbf{x}})$ são funções das variáveis aleatórias $\mathbf{x}_i$, então,

$$\overline{g_1(\underline{\mathbf{x}}) + g_2(\underline{\mathbf{x}}) + \cdots + g_n(\underline{\mathbf{x}})} = \overline{g_1(\underline{\mathbf{x}})} + \overline{g_2(\underline{\mathbf{x}})} + \cdots + \overline{g_n(\underline{\mathbf{x}})}$$

- Casos particulares:

$$\overline{a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y}} = a\,\overline{\mathbf{x}} + b\,\overline{\mathbf{y}}$$

- sendo $\underline{\mathbf{y}} = A\ \underline{\mathbf{x}} + \underline{b}$, ($A$ de dimensão $n \times m$, $\underline{b}$ de dimensão $n \times 1$ e $\underline{\mathbf{x}}$ de dimensão $m \times 1$),

$$E\{\underline{\mathbf{y}}\} = A\,E\{\underline{\mathbf{x}}\} + \underline{b}$$

Média do produto

- Para o caso do produto de duas função não há um resultado simples como para o da soma.
- No caso especial onde $g(\mathbf{x},\mathbf{y})=g_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{y})$
- temos

$$\overline{g_1(\mathbf{x})\,g_2(\mathbf{y})}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,g_2(y)\,f_{\mathbf{xy}}(x,y)\;dx\;dy$$

- Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são independentes, então
- $$\overline{g_1(\mathbf{x})\,g_2(\mathbf{y})}=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,f_{\mathbf{x}}(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\,f_{\mathbf{y}}(y)\,dy=\overline{g_1(\mathbf{x})}\;\overline{g_2(\mathbf{y})}$$
- Um caso especial, também apenas quando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são independentes, é

$$\overline{\mathbf{x}\;\mathbf{y}}=\bar{\mathbf{x}}\;\bar{\mathbf{y}}$$

Valor esperado condicional

- O valor esperado condicional de uma variável aleatória $\mathbf{x}$ dado um evento M é definido como

$$E\{\mathbf{x}|M\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_{\mathbf{x}}(x|M)\, dx$$

- Por exemplo,

$$E\{\mathbf{x}|\mathbf{x}\geq a\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_{\mathbf{x}|\mathbf{x}\geq a}(x|x\geq a)\, dx = \int_{a}^{\infty} x \; \frac{f_{\mathbf{x}}(x)}{P(\mathbf{x}\geq a)}\, dx = \frac{\int_{a}^{\infty} x \; f_{\mathbf{x}}(x)\, dx}{\int_{a}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(x)\, dx}$$

- O resultado anterior pode ser facilmente estendido para um vetor aleatório de ordem n, por exemplo:

$$E\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(x|\mathbf{y})\, dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \; f_{\mathbf{xy}}(x, \mathbf{y})\, dx}{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})}$$

Valor esperado condicional

- Note que essa média é função da variável aleatória $\mathbf{y}$, sendo, portanto, também uma variável aleatória.
- Para calcularmos a média dessa média condicional procedemos como:

$$E\{E\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{x}|y\} f_{\mathbf{y}}(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\mathbf{xy}}(x,y)\, dx}{f_{\mathbf{y}}(y)} f_{\mathbf{y}}(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\mathbf{xy}}(x,y)\, dx\, dy = E\{\mathbf{x}\}$$

Momentos

- O momento de ordem k de uma variável aleatória $\mathbf{x}$ é definido por

$$m_k = \overline{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\mathbf{x}}(x)\, dx$$

- e os momentos centrais de ordem k por

$$\mu_k = \overline{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\mathbf{x}})^k f_{\mathbf{x}}(x)\ dx$$

- Pode-se ver, então que
- $m_0 = 1,\ m_1 = E\{\mathbf{x}\}$
- $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0$
- $\mu_2 = \sigma^2$ = variância da variável aleatória $\mathbf{x}$
- σ = desvio padrão.

Momentos

- Temos então que

$$\mu_k = E\left\{\left(\mathbf{x} - m_1\right)^k\right\} = E\left\{\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r m_1^r \mathbf{x}^{\mathbf{k-r}}\right\} = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r m_1^r E\left\{\mathbf{x}^{\mathbf{k-r}}\right\}$$

- Portanto:

$$\mu_k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r m_1^r m_{k-r}$$

- Exemplo:

$$\mu_2 = \sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}(-1)^r m_1^r m_{2-r} = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 = m_2 - m_1^2$$

- Ou seja

$$\sigma^2 = E\left\{\mathbf{x}^{\mathbf{2}}\right\} - E^2\left\{\mathbf{x}\right\}$$

Momentos

- Analogamente, dadas n variáveis aleatórias $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ definem-se seus momentos de ordem $r = k_1 + \ldots + k_n$ por

$$m_{k_1 \cdots k_n} = E\left\{ \mathbf{x}_1^{k_1} \ldots \mathbf{x}_n^{k_n} \right\}$$

- e

$$\mu_{k_1 \cdots k_n} = E\left\{ \left(\mathbf{x_1} - \overline{\mathbf{x_1}} \right)^{k_1} \ldots \left(\mathbf{x_n} - \overline{\mathbf{x_n}} \right)^{k_n} \right\}$$

- Caso particular:

$$\mu_{11} = E\left\{ \left(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} \right) \left(\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}} \right) \right\} = \sigma_{\mathbf{xy}}$$

que é denominado covariância de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

- Mostra-se facilmente que

$$\sigma_{\mathbf{xy}} = E\left\{ \mathbf{x}\ \mathbf{y} \right\} - E\left\{ \mathbf{x} \right\}\ E\left\{ \mathbf{y} \right\}$$

Momentos

- A relação $$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$
- é chamada de coeficiente de correlação de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
- $|r| \leq 1$ (i):

$$E\left\{\left[a\left(\mathbf{x}-m_x\right)+\left(\mathbf{y}-m_y\right)\right]^2\right\} = a^2\sigma_x^2 + 2a\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = 4\sigma_{xy}^2 - 4\sigma_x^2\sigma_y^2 \leq 0 \Rightarrow \sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2\sigma_y^2 \Rightarrow |r| \leq 1$$

- $|r| = 1 \Leftrightarrow \mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$, sendo $a = \sigma_{xy}/\sigma_x^2$ e $b = E\{\mathbf{y}\} - (\sigma_{xy}/\sigma_x^2)E\{\mathbf{x}\}$ (ii):

$$E\left\{\left[\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mathbf{x} + \left(m_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}m_x\right) - \mathbf{y}\right]^2\right\} = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mathbf{x} + \left(m_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}m_x\right)$$

Momentos

- Define-se também, para o vetor aleatório $\underline{\mathbf{x}}$, a matriz de covariância $C_{\underline{\mathbf{x}}}$, dada por

$$C_{\mathbf{x}} = E\left\{\left(\underline{\mathbf{x}}-\overline{\underline{\mathbf{x}}}\right)\left(\underline{\mathbf{x}}-\overline{\underline{\mathbf{x}}}\right)^{T}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\underline{\mathbf{x}}-\overline{\underline{\mathbf{x}}}\right)\left(\underline{\mathbf{x}}-\overline{\underline{\mathbf{x}}}\right)^{T} f_{\mathbf{x}}\left(\underline{x}\right) d\,\underline{x}$$

$$C_{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- Note que o elemento da linha i coluna j dessa matriz é
- $c_{i,j} = \sigma_{xi,xj} = \sigma_{xj,xi} = c_{j,i}$
- ou seja, é a covariância de $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$.

Independência, correlação e ortogonalidade

- Dizemos que duas variáveis aleatórias $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são não correlacionadas se $E\{\mathbf{x}\,\mathbf{y}\}=E\{\mathbf{x}\}E\{\mathbf{y}\}$, ou seja, $\sigma_{xy}=0$.
- Elas são ditas ortogonais se $E\{\mathbf{x}\,\mathbf{y}\}=0$.
- Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ forem independentes, então elas são também não correlacionadas:

$$E\{\mathbf{x}\,\mathbf{y}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f_{\mathbf{x}}(x)\,f_{\mathbf{y}}(y)\,dx\,dy=$$

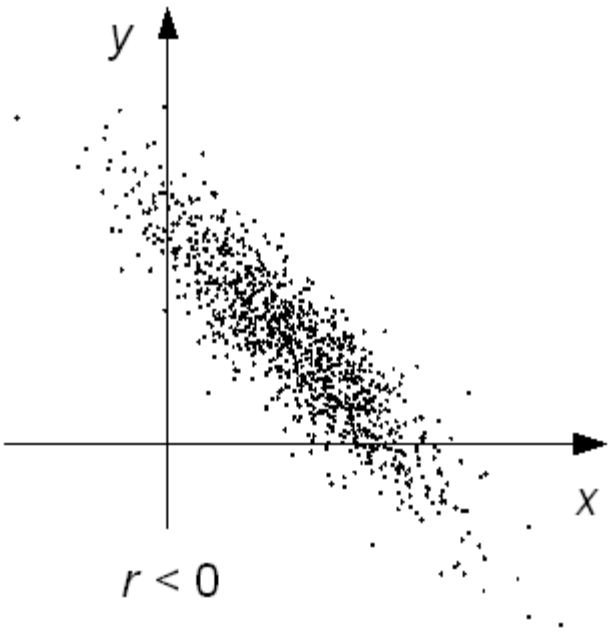
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,f_{\mathbf{x}}(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} y\,f_{\mathbf{y}}(y)\,dy=E\{\mathbf{x}\}\,E\{\mathbf{y}\}$$

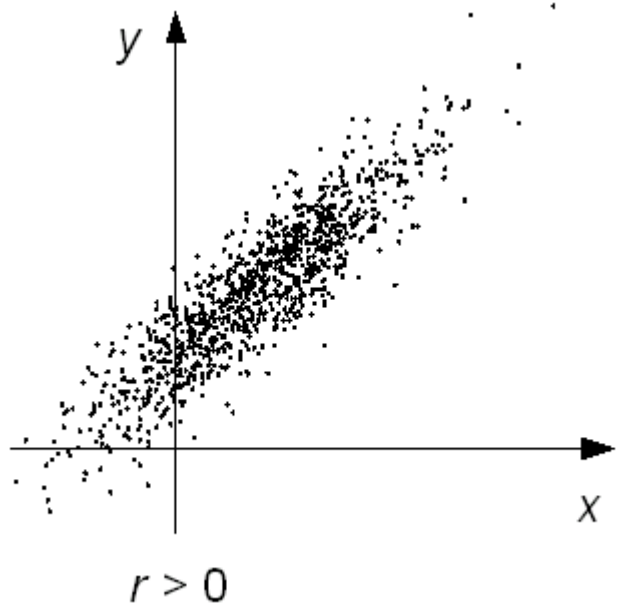
- Note que a recíproca não é verdadeira!

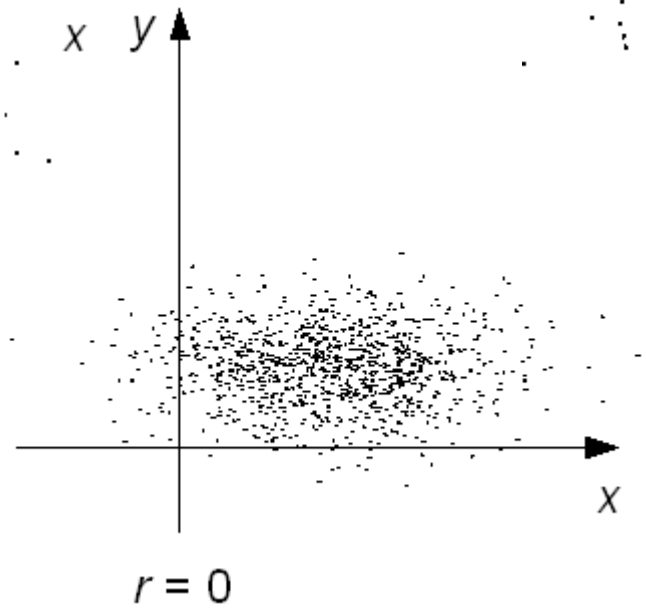
Independência, correlação e ortogonalidade

- Consequências:
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são não-correlacionadas então sua covariância e coeficiente de correlação são nulos;
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são não-correlacionadas e a média de pelo uma delas é nula,então $E\{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2\}=E\{\mathbf{x}^2\}+E\{\mathbf{y}^2\}$;
- A variância da soma de variáveis não correlacionadas é a soma de suas variâncias;
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são não-correlacionadas e a média de pelo uma delas é nula, então elas são ortogonais.

Independência, correlação e ortogonalidade



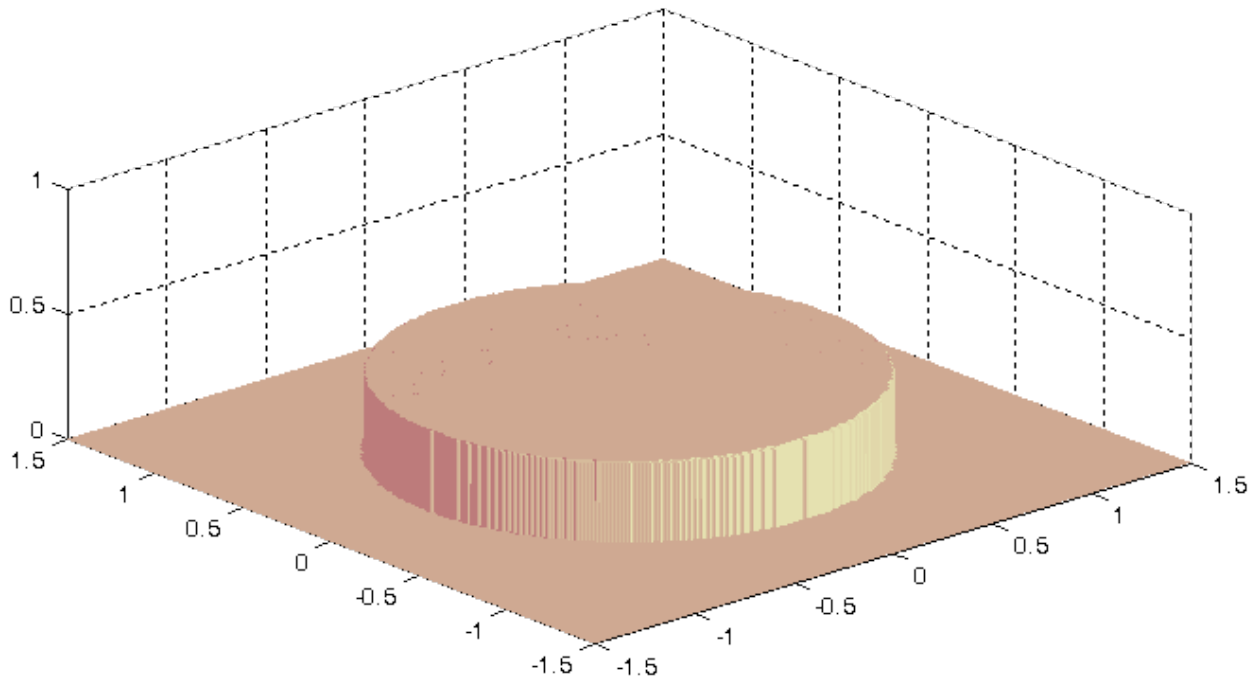




Exemplo: densidade uniforme num círculo

- Sejam duas variáveis aleatórias **x** e **y**, com densidade de probabilidade dada por

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\, a^2} & x^2+y^2\le a^2\\ 0 & x^2+y^2>a^2\end{cases}$$



Exemplo: densidade uniforme num círculo

- As variáveis aleatórias **x** e **y** são não correlacionadas?

$$E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dy\,dx = 0 \quad \text{pois } f_{\mathbf{xy}}(x,y) \text{ é par em } x.$$

$$E\{\mathbf{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \text{pois } f_{\mathbf{xy}}(x,y) \text{ é par em } y.$$

$$E\{\mathbf{x}\,\mathbf{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dy\,dx = 0 = E\{\mathbf{x}\}\,E\{\mathbf{y}\} \Rightarrow \text{SIM!}$$

- As variáveis aleatórias **x** e **y** são independentes?

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi\, a^2}\,dy = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi\, a^2} \quad |x| < a$$

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{1}{\pi\, a^2}\,dx = \frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi\, a^2} \quad |y| < a$$

$$f_{\mathbf{xy}}(x,y) \neq f_{\mathbf{x}}(x)\, f_{\mathbf{y}}(y) \Rightarrow \text{NÃO!}$$

Correlação e matriz de covariância

- Dado um vetor aleatório cujas componentes sejam não correlacionadas entre si, ou seja:

$$E\left\{\mathbf{x_i}\ \mathbf{x_j}\right\} = E\left\{\mathbf{x_i}\right\} E\left\{\mathbf{x_j}\right\}$$

- A sua matriz de covariância será uma matriz diagonal:

$$C_{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- E vice versa.