

PESQUISA OPERACIONAL I

– PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Programação Inteira

6-2

SIMPLEX

Resolução de problemas com variáveis inteiras ou binárias

Problema da Designação

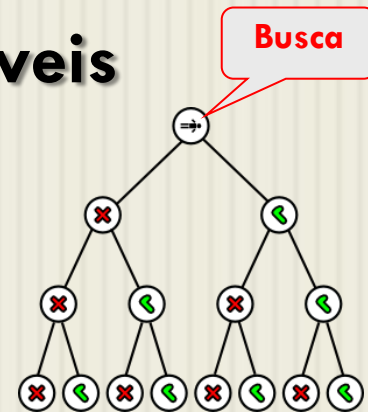
Branch-and-Bound

**Bifurcação e Limite
Separação e Avaliação**

1) Planos de Corte

Gomory (1929 –)

Computação IBM



Branch-and-Bound

**Branch
-and-
Bound**

3) Enumeração Implícita (0/1)

**Administração
Carnegie Mellon**

Balas (1922 –)

Capítulo 6

Programação Inteira



PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-3

Apresentação

Designação de:

- Operações a máquinas
- Operários a tarefas
- Trabalhadores a locais de trabalho
- Dinheiro a investimentos

Designação de custo mínimo

Minimizar o custo do transporte dos agentes designados aos locais de trabalho

Designação de lucro máximo

Maximizar a satisfação dos agentes designados aos locais de trabalho

$$\min f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Custo

$$s/a \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1..n)$$

Horizontal

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1..n)$$

Vertical

$$x_{ij} = 0/1$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44



Custo

6-4

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

Exercício 1

Designar 4
operários a 4
tarefas

$$\min f = 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} + 6x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44}$$

s/a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = 0/1$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3	1			
O4		1		



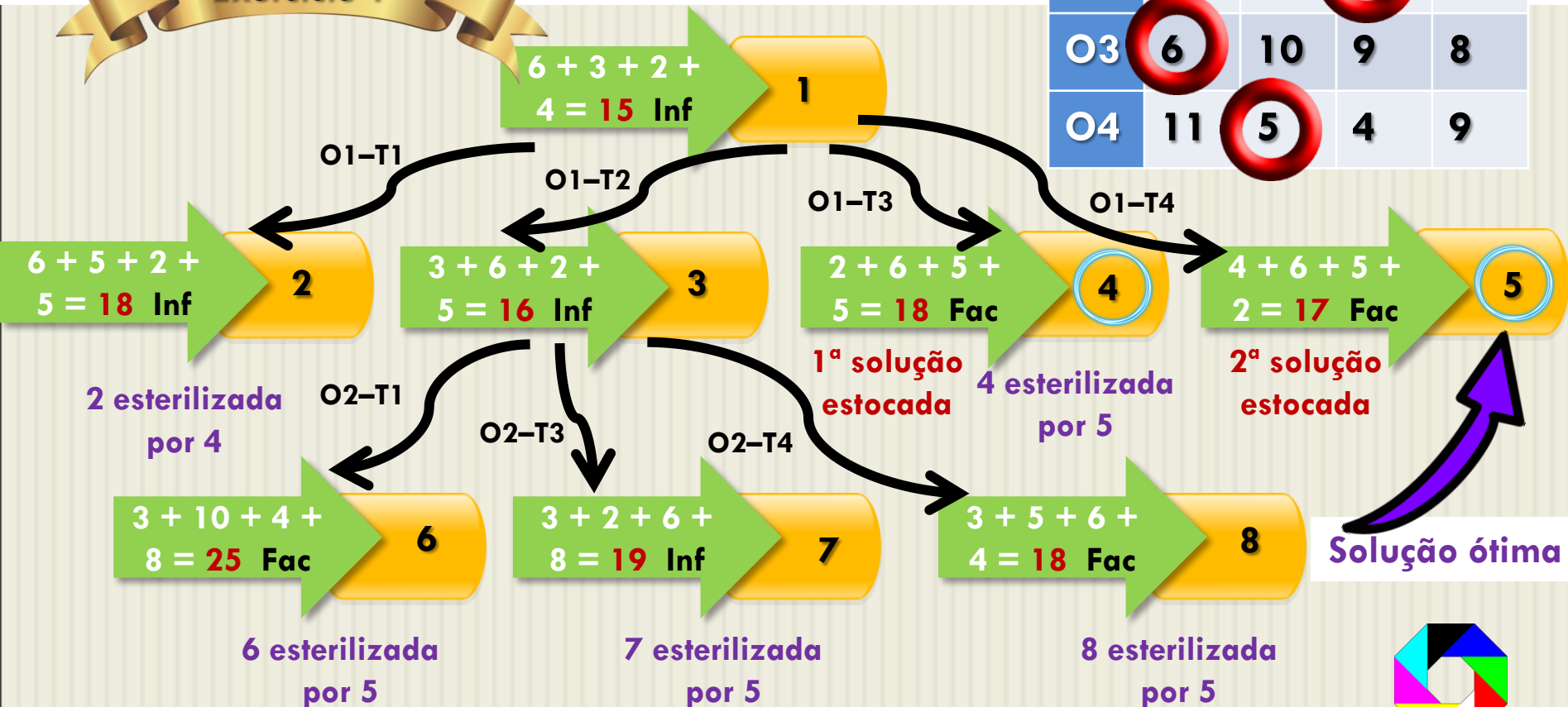
Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-5

Exercício 1

	T1	T2	T3	T4
O1	6	3	2	4
O2	10	6	2	5
O3	6	10	9	8
O4	11	5	4	9



Branch
-and-
Bound



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

Exercício 2

$$\min f = 5x_{11} + 10x_{12} + 28x_{13} + 10x_{14} + 24x_{21} + 25x_{22} + 9x_{23} + 17x_{24} + 13x_{31} + 3x_{32} + 8x_{33} + 15x_{34} + 7x_{41} + 23x_{42} + 5x_{43} + 3x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

Designar 4 operários a 4 tarefas

6-6

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1	1			
O2			1	
O3		1		
O4				1



Capítulo 6

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-7

Exercício 2

	T1	T2	T3	T4
O1	5	10	28	10
O2	24	25	9	17
O3	13	3	8	15
O4	7	23	5	3



Branch
-and-
Bound

Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

Exercício 3

$$\min f = 8x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 5x_{14} + 11x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 6x_{24} + 7x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

Designar 4 operários a 4 tarefas

	T1	T2	T3	T4
O1	8	3	1	5
O2	11	7	1	6
O3	7	8	6	8
O4	11	6	4	9

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3	1			
O4		1		



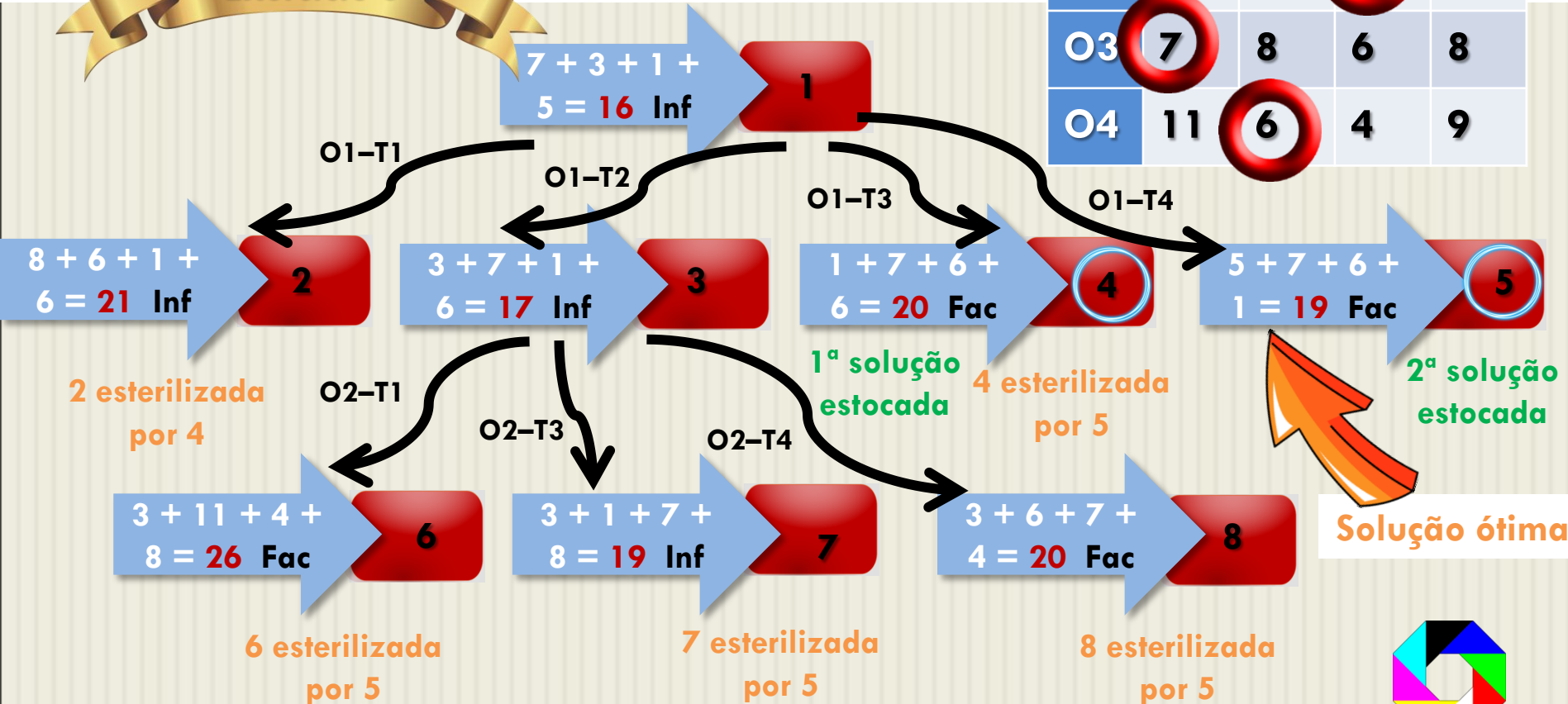
Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

6-9

Exercício 3

	T1	T2	T3	T4
O1	8	3	1	5
O2	11	7	1	6
O3	7	8	6	8
O4	11	6	4	9



Custo

Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

Exercício 4

Designar 4
operários a 4
tarefas

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 6x_{24} + x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34} + x_{41} + 3x_{42} + 3x_{43} + 7x_{44}$$

s/a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

6-10

	T1	T2	T3	T4
O1	2	1	4	2
O2	3	4	1	6
O3	1	2	6	5
O4	1	3	3	7

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44

	T1	T2	T3	T4
O1				1
O2			1	
O3		1		
O4	1			



Programação Inteira

PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

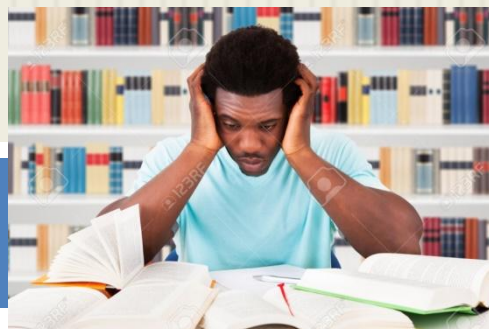
6-11

Exercício 4

	T1	T2	T3	T4
O1	2	1	4	2
O2	3	4	1	6
O3	1	2	6	5
O4	1	3	3	7



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX



6-12

Exercício 5

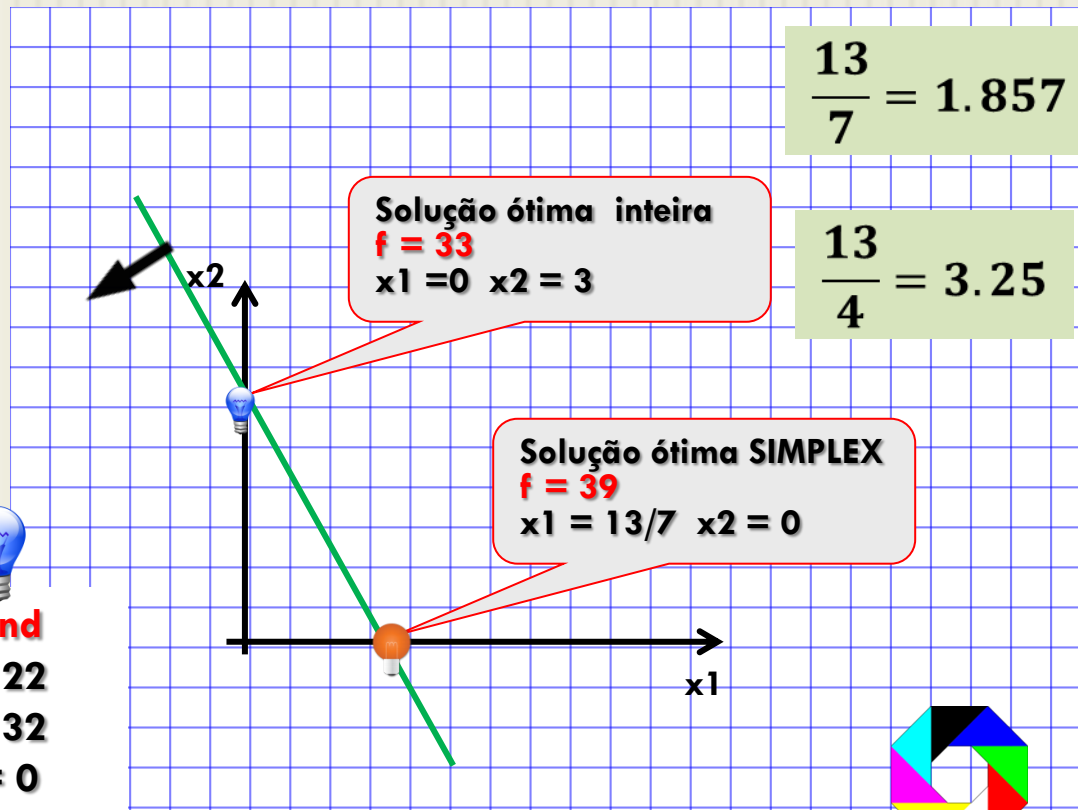
max $f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
s/a $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0$ inteiras

N^{os} Reais **SIMPLEX** 

(0,0) $f = 0$
(0, 13/4) $f = 35.75$
(13/7, 0) $f = 39$

N^{os} Inteiros **Branch-and-Bound** 

(0,3) $f = 33$	(0,2) $f = 22$
(0,1) $f = 11$	(1,1) $f = 32$
(1,0) $f = 21$	(0,0) $f = 0$



**Branch
-and-
Bound**



Programação Inteira

SIMPLEX



6-13

Exercício 5

max $f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
s/a $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0$ inteiras

$x_1 = 1.857$



1

2



$x_1 \leq 1$

$x_1 \geq 2$

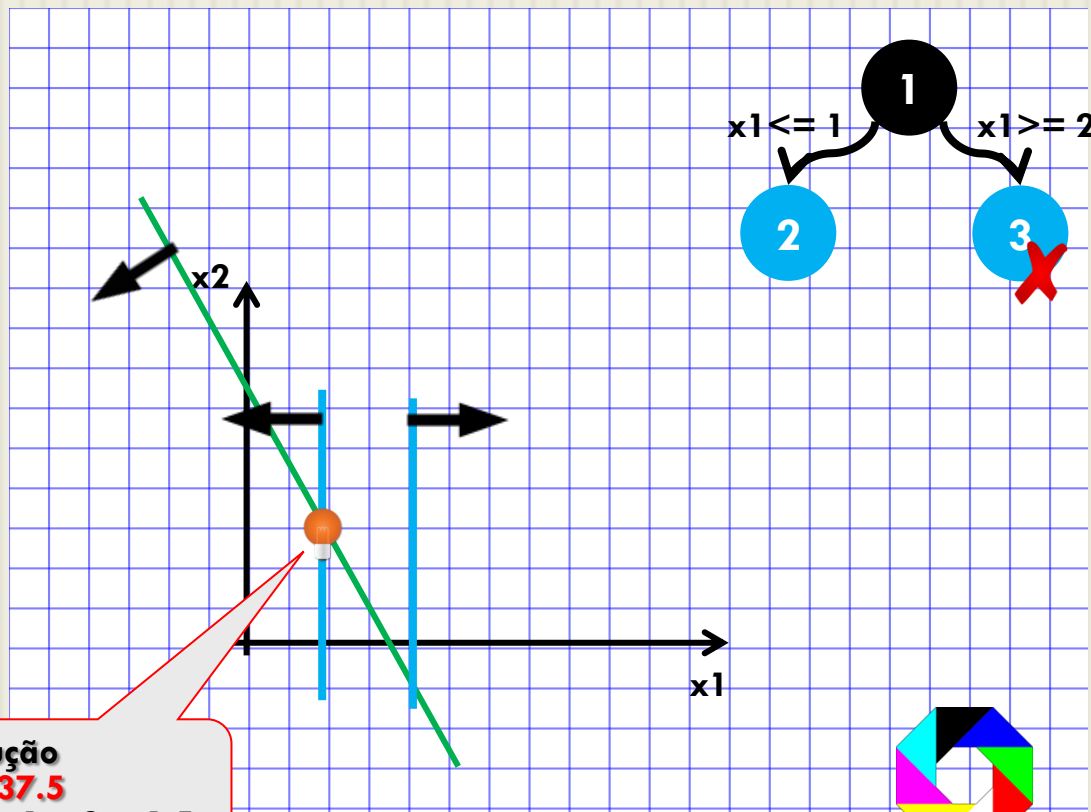
$x_1 = 1$

$x_2 = 1.5$

$f = 37.5$

Problema
Infatível

Solução
 $f = 37.5$
 $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.5$



Branch
-and-
Bound

Capítulo 6



Programação Inteira

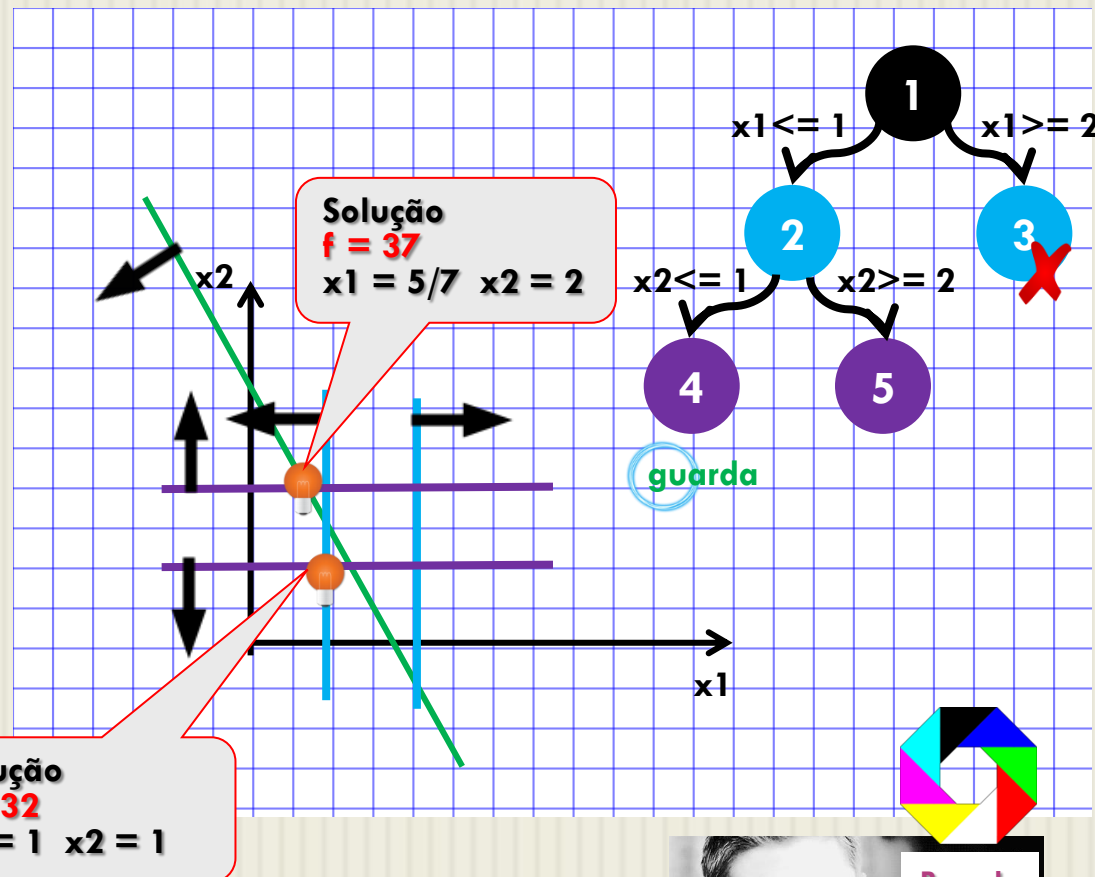
SIMPLEX

6-14

Exercício 5



max $f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
s/a $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0$ inteiras



$x_2 = 1.5$



$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$f = 32$

1ª solução
estocada

$x_1 = 5/7$ (0.714)

$x_2 = 2$

$f = 37$



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX



6-15

Exercício 5

max $f = 21 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$
s/a $7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13$
 $x_1, x_2 \geq 0$ inteiras

$x_1 = 0.714$



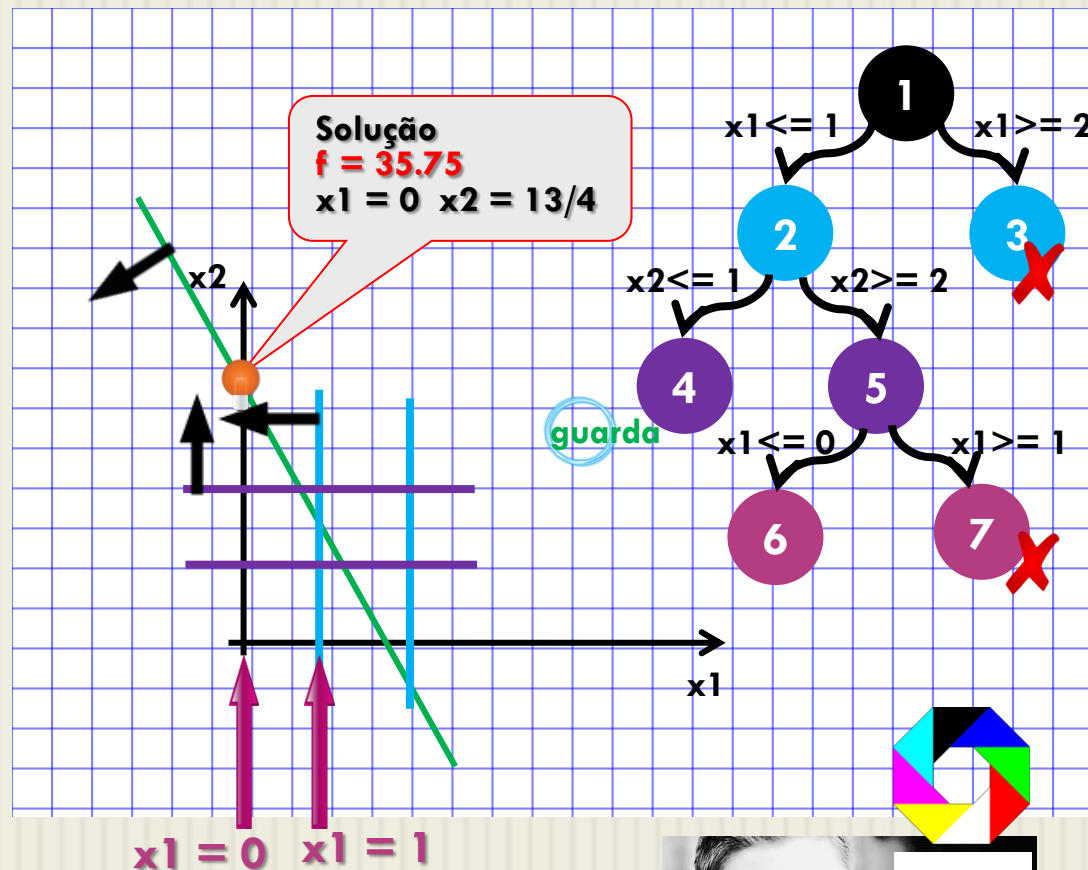
$x_1 \leq 0$

$x_1 \geq 1$

$x_1 = 0$

Problema Infactível

> $x_2 = 13/4$ (3.25)
 $f = 35.75$



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX



6-16

Exercício 5

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s/a} \quad & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_2 = 3.25$$



$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

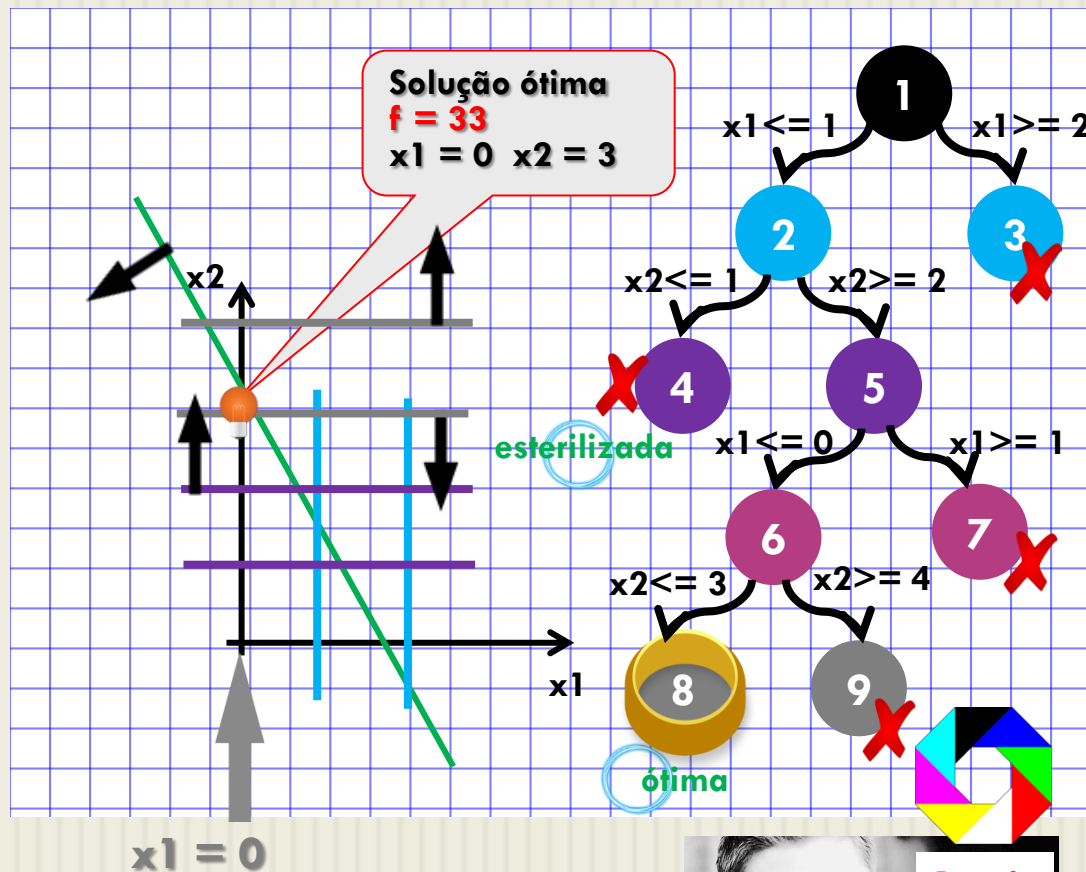
$$f = 33$$

Problema
Infatível

Solução
Ótima



Capítulo 6



Programação Inteira

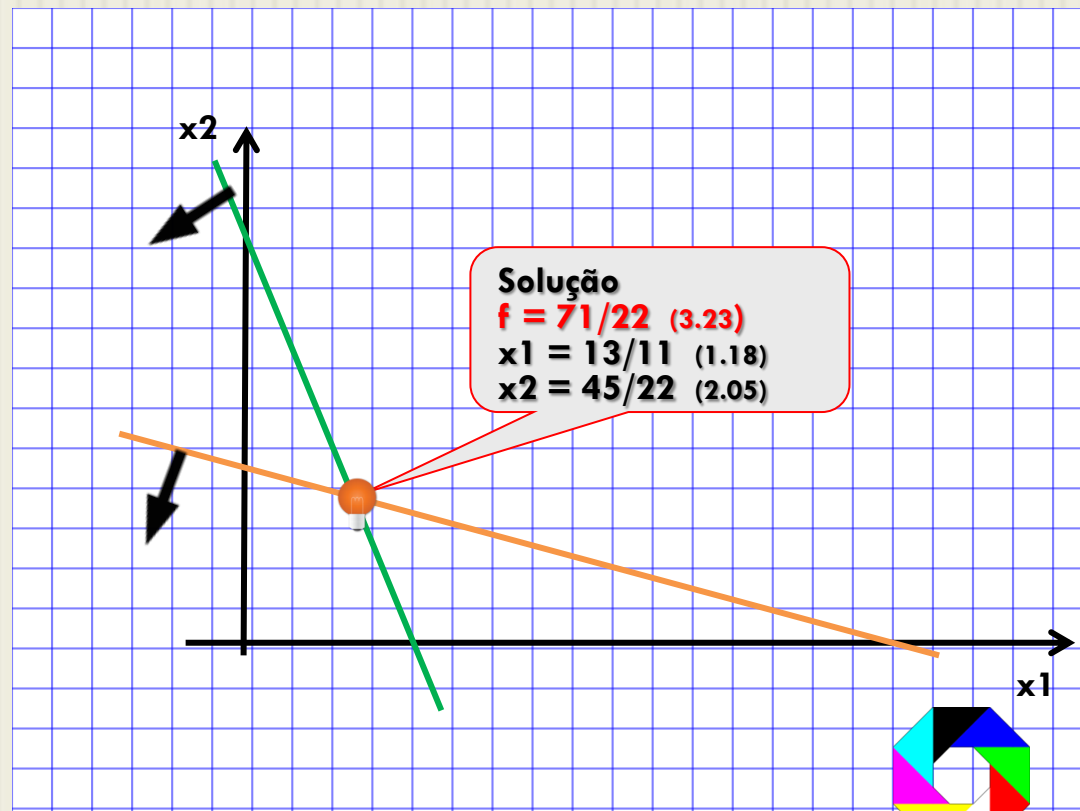
SIMPLEX

6-17

Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 10x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$



Programação Inteira

SIMPLEX

6-18

Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 10x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_2 = 2.05$$

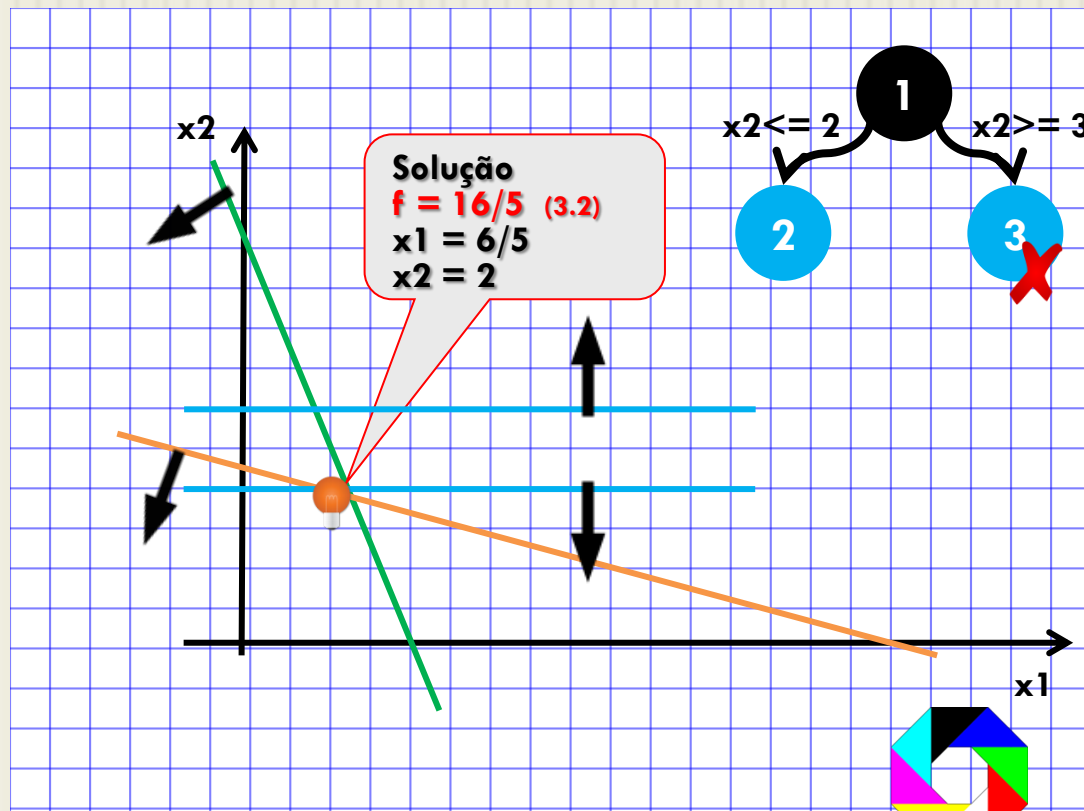


$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$\begin{aligned} & x_1 = 6/5 \quad (1.2) \\ & x_2 = 2 \\ & f = 16/5 \quad (3.2) \end{aligned}$$

Problema Infatível



Branch
-and-
Bound



Programação Inteira

SIMPLEX

6-19

Exercício 6

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s/a} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 10x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1.2$$



$$x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2$$

$$x_2 = 0$$

$$f = 3$$

$$f = 2$$

Solução Ótima

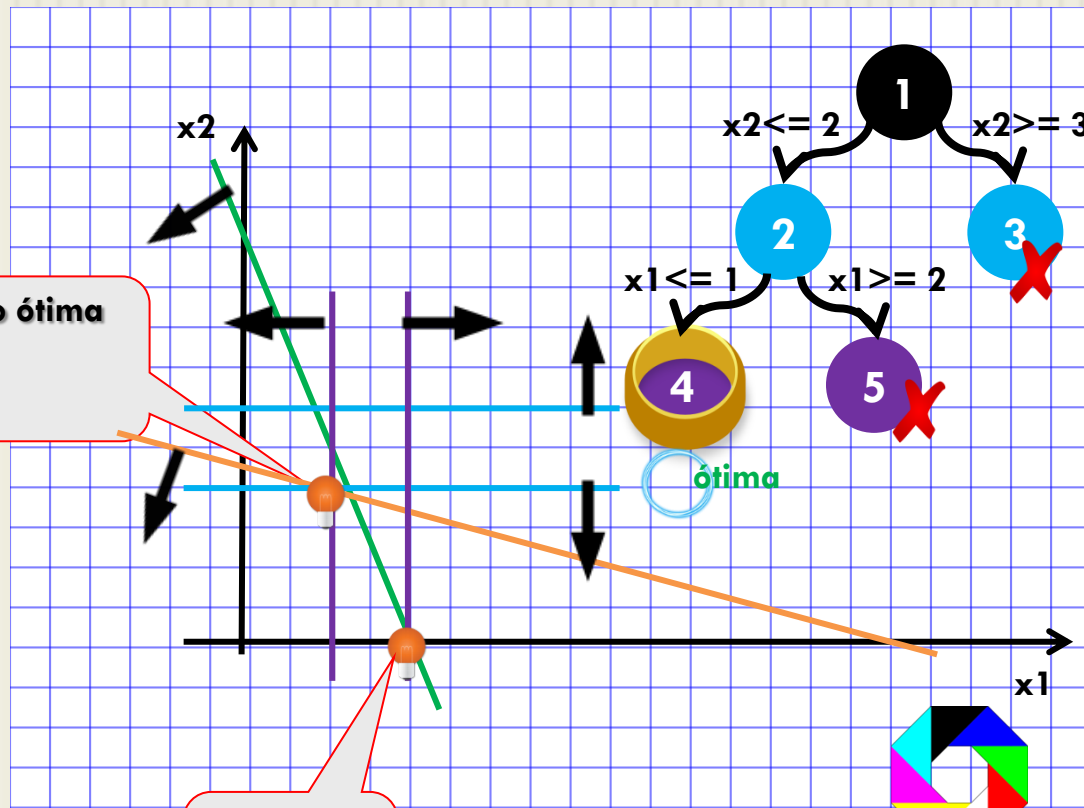
Esterilizada por $f = 3$

Solução ótima

$$\begin{aligned} f &= 3 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} f &= 2 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$



Branch-and-Bound



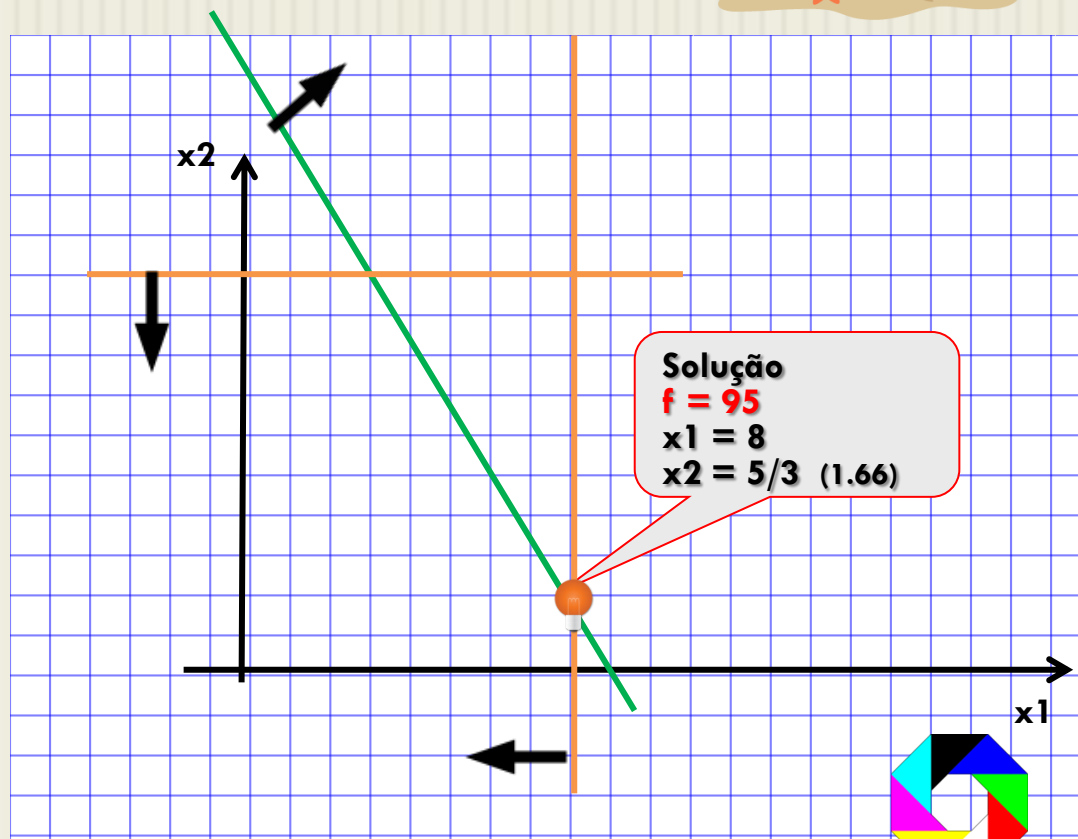
Programação Inteira

SIMPLEX

6-20

Exercício 7

min $f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$
s/a $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45$
 $0 \leq x_1 \leq 8$
 $0 \leq x_2 \leq 10$ inteiras



Programação Inteira

SIMPLEX

6-21

Exercício 7

min $f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$
s/a $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45$
 $0 \leq x_1 \leq 8$
 $0 \leq x_2 \leq 10$ inteiras

$$x_2 = 1.66$$

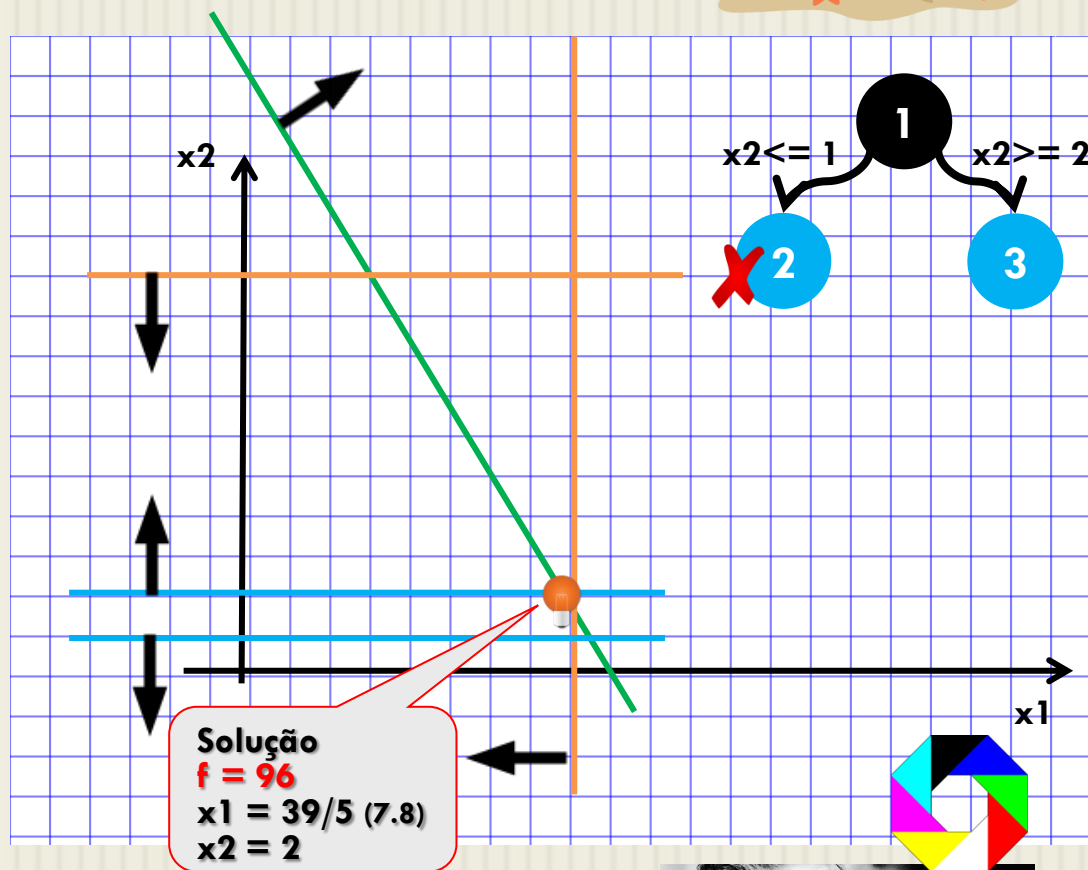


$$x_2 \leq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

Problema Infactível

> $x_1 = 39/5$ (7.8)
 $x_2 = 2$
 $f = 96$



**Branch
-and-
Bound**



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX



6-22

Exercício 7

$$\begin{array}{ll}\min & f = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{s/a} & 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ & 0 \leq x_1 \leq 8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 10 \text{ inteiras}\end{array}$$

$$x_1 = 7.8$$



$$x_1 \leq 7$$

$$x_1 \geq 8$$

$$x_1 = 7$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 10/3$$

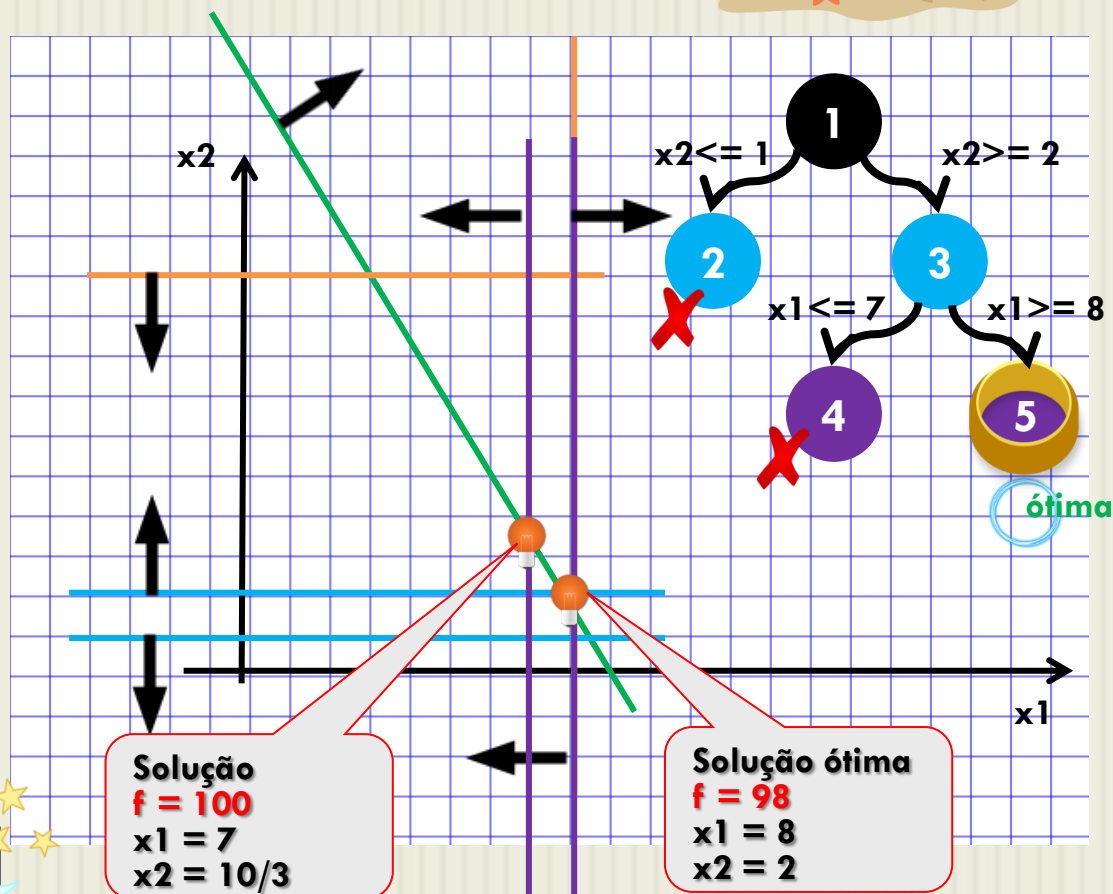
$$x_2 = 2$$

$$f = 100$$

$$f = 98$$

Esterilizada por
 $f = 98$

Solução
Ótima



Solução
 $f = 100$
 $x_1 = 7$
 $x_2 = 10/3$

Solução ótima
 $f = 98$
 $x_1 = 8$
 $x_2 = 2$



Programação Inteira

SIMPLEX

6-23

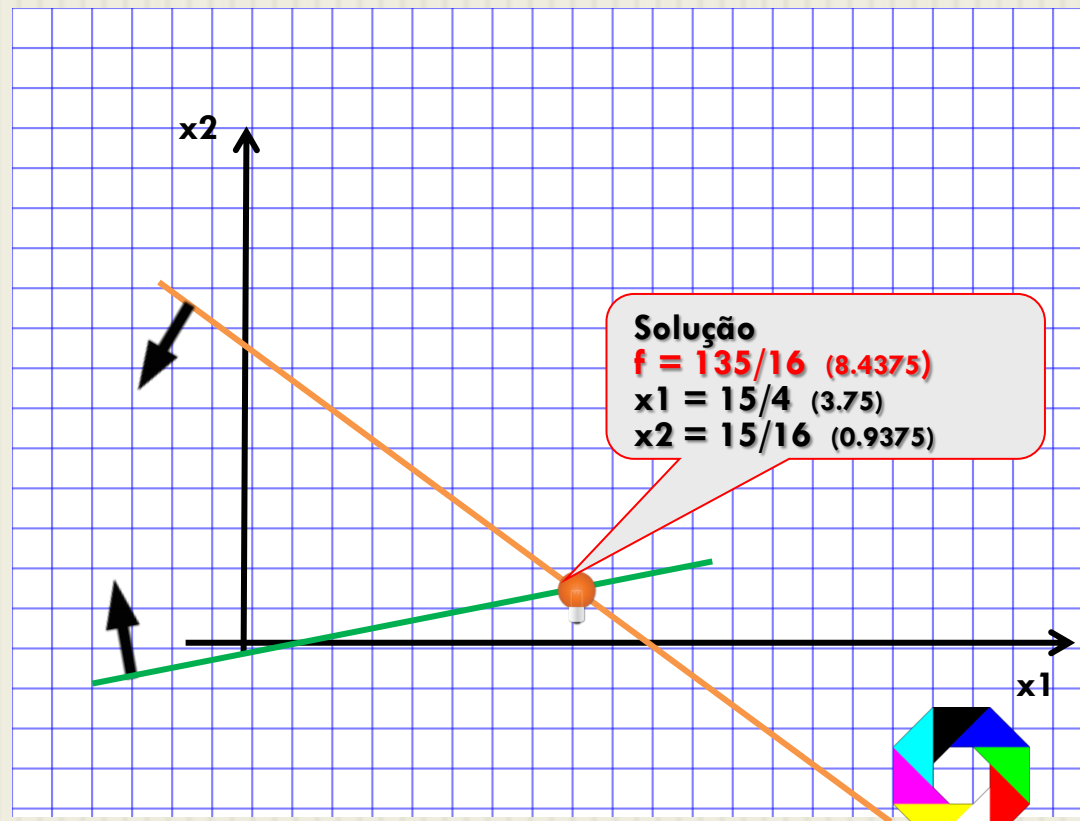
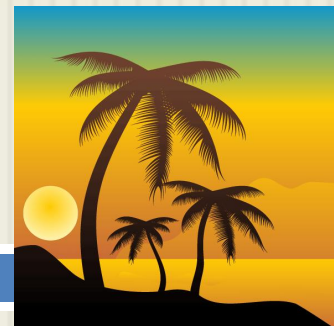
Exercício 8

$$\max f = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s/a } x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$



Programação Inteira

SIMPLEX

6-24

Exercício 8

$$\max f = 2x_1 + x_2$$

s/a

$$x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$

$$x_1 = 3.75$$



3



4

$$x_1 \leq 3$$

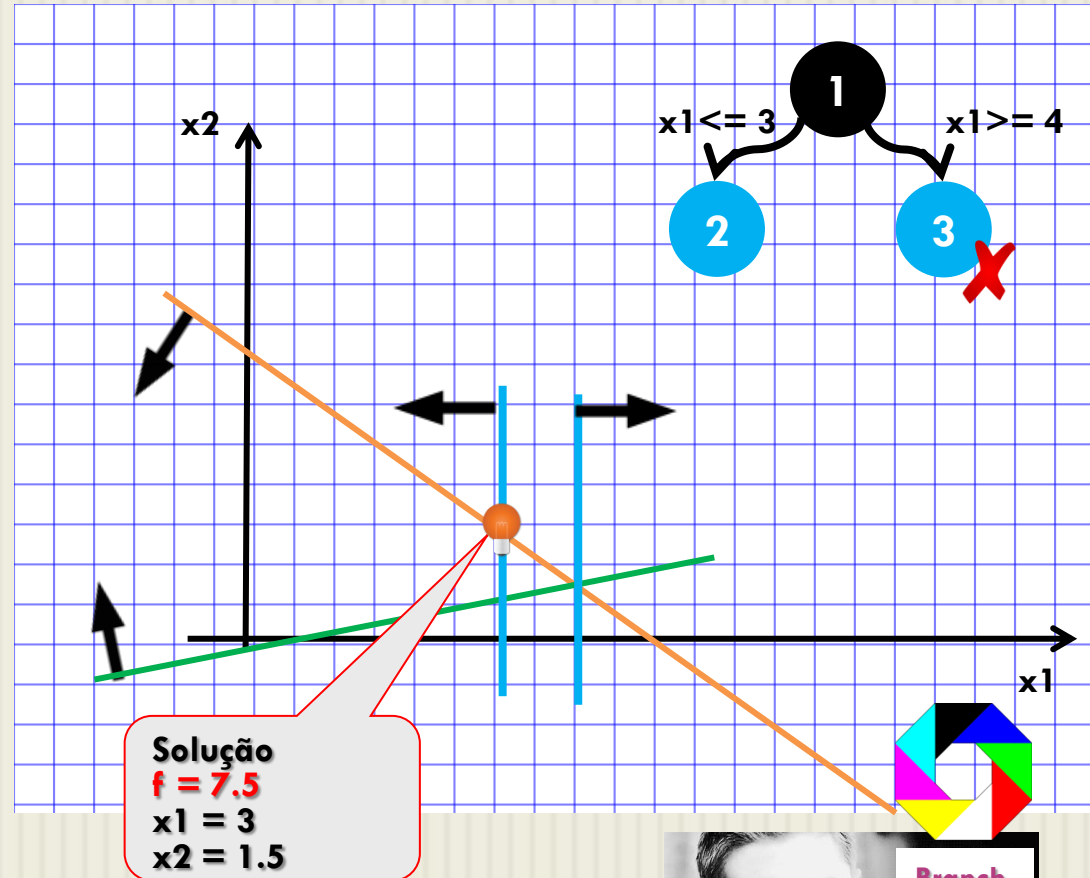
$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1.5$$

$$f = 7.5$$

Problema
Infactível



Capítulo 6



Programação Inteira

SIMPLEX

6-25

Exercício 8

$$\max f = 2x_1 + x_2$$

s/a

$$x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ inteiras}$$

Solução
 $f = 6.66$
 $x_1 = 7/3$
 $x_2 = 2$

$$x_2 = 1.5$$



$$x_2 \leq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$f = 7$$

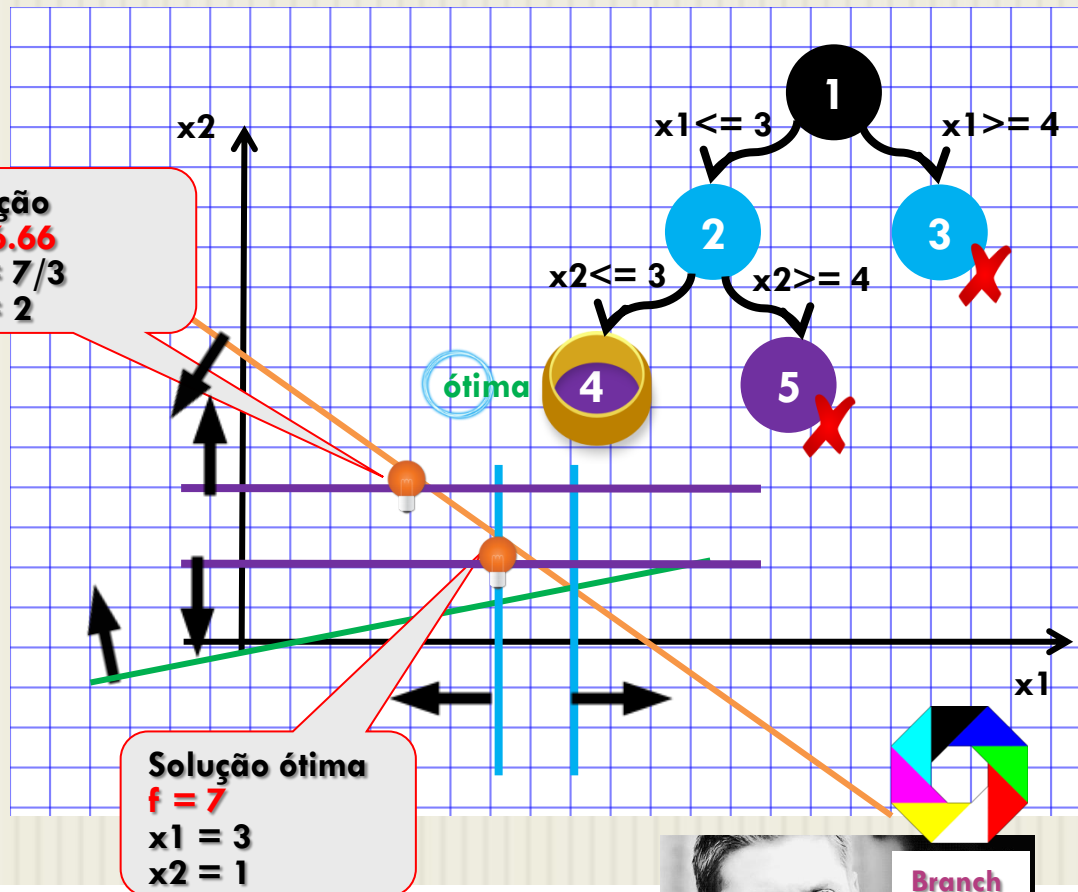
Solução Ótima

$$> x_1 = 7/3$$

$$x_2 = 2$$

$$f = 20/3 \text{ (6.66)}$$

Esterilizada por
 $f = 7$



Solução ótima
 $f = 7$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = 1$

Branch-and-Bound