Exercícios - Gabarito

Encontre todos os números reais que satisfaçam as desigualdades

a) $\frac{x}{x-3} < 4$

OBS: O denominador da fração não pode ser zero, ou seja, $x-3 \neq 0$.

$\Rightarrow$ caso 1: $x-3>0$

$\Rightarrow$ caso 2: $x-3<0$ $\Rightarrow$ na simplificação inverte o sinal da desigualdade

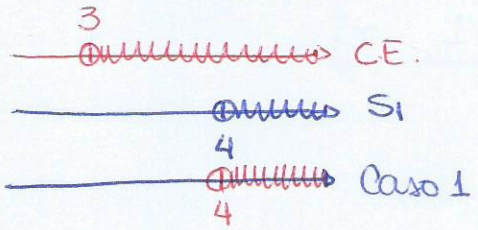
Caso 1: $x-3>0 \Rightarrow \boxed{x>3}$ C.E.

$$\frac{x}{x-3} < 4 \Rightarrow \frac{x}{x-3}(x-3) < 4(x-3) \Rightarrow x < 4x-12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4x < 4x-12-4x \Rightarrow -3x < -12 \Rightarrow -\frac{3x}{3} < -\frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x < -4 \Rightarrow (-1).-x < -4(-1) \Rightarrow \boxed{x>4} \ S_1$$

Logo, $CE \cap S_1$ é:




Caso2: $x-3<0 \Rightarrow \boxed{x<3}$ C.E.

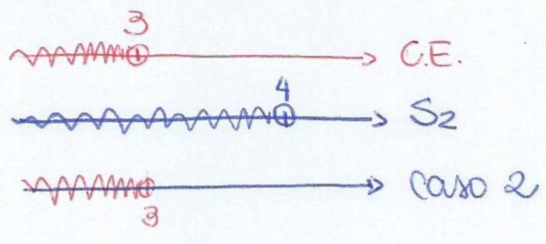
neste passo de simplificação, como $(x-3)$ é negativo, inverte o sinal da desigualdade.

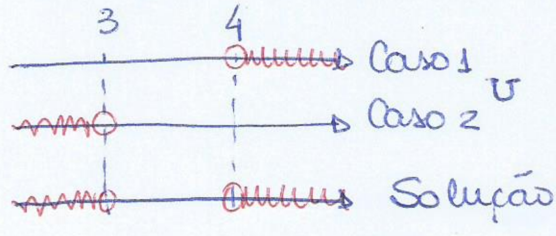
$$\frac{x}{x-3} < 4 \Rightarrow \frac{x}{x-3}(x-3) < 4(x-3) \Rightarrow x > 4x-12 \Rightarrow$$

$$x-4x > 4x-12-4x \Rightarrow -3x > -12 \Rightarrow -\frac{3x}{3} > -\frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$-x > -4 \Rightarrow (-1).-x > -4(-1) \Rightarrow \boxed{x<4} \ S_2$$

Logo, $CE \cap S_2$ é:




$(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$

SOLUÇÃO GERAL: Caso 1 $\cup$ Caso 2

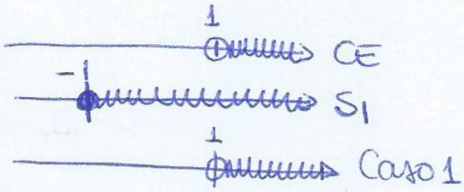
b) $\dfrac{2}{1-x} \leq 1$ OBS: $1-x \neq 0$ $\begin{cases} \text{caso 1: } 1-x<0 \rightarrow \text{na simplif. inverte o sinal} \\ \text{caso 2: } 1-x>0 \end{cases}$

Caso 1: $1-x<0 \Rightarrow \boxed{x>1}$ C.E.

$$\frac{2}{1-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{(1-x)}(1-x) \leq 1(1-x) \Rightarrow 2 \geq 1-x \Rightarrow 2-1 \geq 1-x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \geq -x \Rightarrow (-1).1 \geq -x(-1) \Rightarrow \boxed{-1 \leq x} \; S_1$$

Logo: $CE \cap S_1$

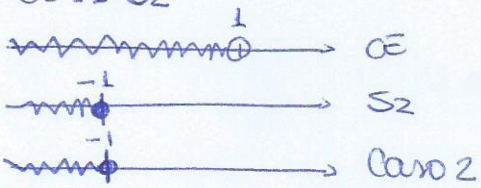



Caso 2: $1-x>0 \Rightarrow \boxed{x<1}$ C.E.

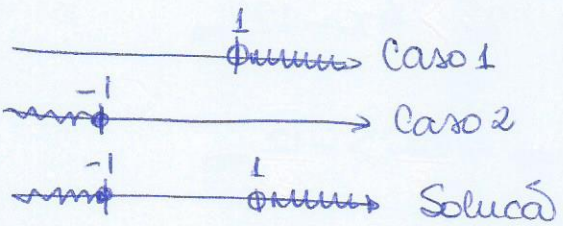
$$\frac{2}{1-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{1-x}(1-x) \leq 1(1-x) \Rightarrow 2 \leq 1-x \Rightarrow 2-1 \leq 1-x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq -x \Rightarrow (-1)1 \leq -x(-1) \Rightarrow \boxed{-1 \geq x} \; S_2$$

Logo. $CE \cap S_2$




SOLUÇÃO GERAL: Caso 1 ∪ Caso 2




$(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$

e) $(x+1)(x+3) < 0$

OBS: para o produto dos fatores $(x+1)$ e $(x+3)$ resultar em um número negativo $(<0)$ é necessário as seguintes combinações

$(x+1) > 0$ e $(x+3) < 0 \Rightarrow$ caso 1

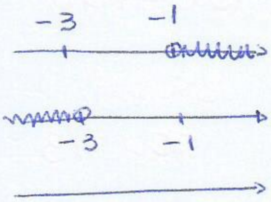
ou $\rightarrow \cup$

$(x+1) < 0$ e $(x+3) > 0 \Rightarrow$ caso 2

Caso 1: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

e

$x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$



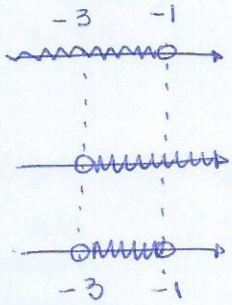

$\cap \Rightarrow$ não existe intersecção

Logo, $S = \phi$

Caso 2: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

e

$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$




$\cap$ $S_2$ = Solução Geral

$(-3; -1)$

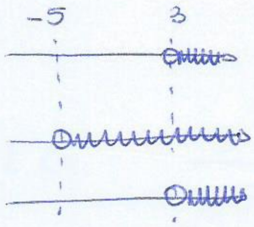
d) $(x-3)(x+5) > 0$

OBS: para o produto dos fatores $(x-3)$ e $(x+5)$ resultar em um número positivo $(>0)$ é necessário que os fatores tenham o mesmo sinal (ambos + ou ambos −).

Caso 1: $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

e

$x+5 > 0 \Rightarrow x > -5$

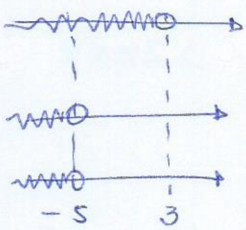



$\cap$ $S_1 = (3; +\infty)$

Caso 2: $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$

e

$x+5 < 0 \Rightarrow x < -5$




$\cap$ $S_2 = (-\infty; -5)$

Solução geral: caso 1 $\cup$ Caso 2

$S = (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$

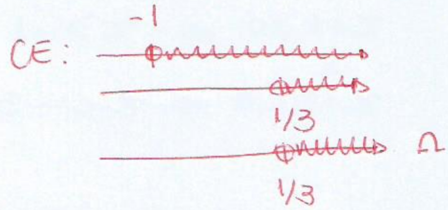
g) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$

OBS: Neste caso, como há duas frações, devemos considerar que ambos os denominadores devem ser diferente de zero, o que resulta em 4 diferentes casos já que cada um deles pode ainda ser $>0$ ou $<0$.

Caso 1: $x+1>0$ e $3x-1>0$

$x>-1$ e $3x>1$

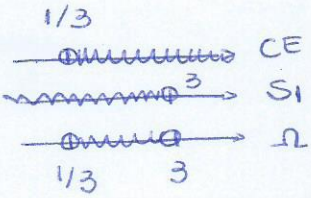
$x>1/3$




$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1} \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}(x+1) < \dfrac{2}{3x-1}(x+1) \Rightarrow 1 < \dfrac{2x+2}{3x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1(3x-1) < \dfrac{2x+2}{3x-1}(3x-1) \Rightarrow 3x-1 < 2x+2 \Rightarrow 3x-1-2x < 2x+2-2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1<2 \Rightarrow \boxed{x<3}$ $S_1$

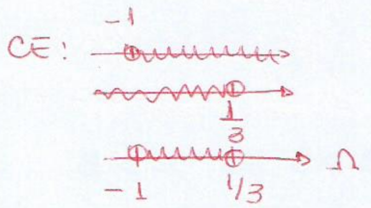



$S_{caso1} = (+\frac{1}{3}; 3)$

Caso 2: $x+1>0$ e $3x-1<0$

$x>-1$ e $3x<1$

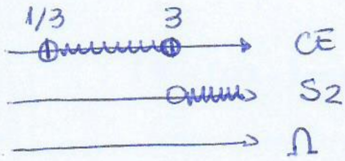
$x<1/3$




negativo

$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1} \Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)}(x+1) < \dfrac{2}{3x-1}(x+1) \Rightarrow 1 < \dfrac{2x+2}{3x-1} \Rightarrow 1(3x-1) < \dfrac{2x+2}{3x-1}(3x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-1 > 2x+2 \Rightarrow 3x-1-2x > 2x+2-2x \Rightarrow x-1>2 \Rightarrow \boxed{x>3}$ $S_2$



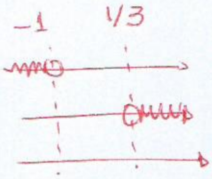

Ω não há. logo, $S=\emptyset$ $\quad S_{caso2} = \emptyset$

↓ continua casos 3 e 4

Caso 3: $x+1<0$ e $3x-1>0$

$x<-1$ e $3x>1$

$x>1/3$



CE: não há possibilidade

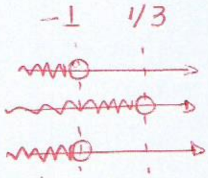
$S_3 = \phi$

nem precisa resolver!

Caso 4: $x+1<0$ e $3x-1<0$

$x<-1$ e $3x<1$

$x<1/3$



CE

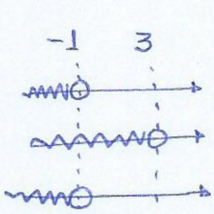
negativo, inverte o sinal

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1}(x+1) < \frac{2}{3x-1}(x+1) \Rightarrow 1 > \frac{2x+2}{3x-1} \Rightarrow$$

negativo, inverte sinal

$$\Rightarrow 1\,(3x-1) > \frac{2x+2}{3x-1}(3x-1) \Rightarrow 3x-1 < 2x+2 \Rightarrow 3x-1-2x < 2x+2-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1<2 \Rightarrow \boxed{x<3}\ S_4$$



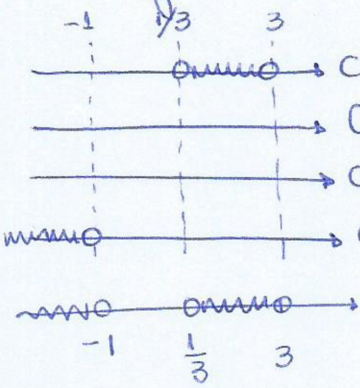
CE

$S_4$

$\cap$

$S_{caso 4} = (-\infty\,;-1)$

Solução geral: caso 1 ∪ caso 2 ∪ caso 3 ∪ caso 4



Caso 1

Caso 2 $S=\phi$

Caso 3 $S=\phi$

Caso 4

Solução $\Rightarrow (-\infty\,;-1) \cup \left(\frac{1}{3}\,;3\right)$