© [Helder Almeida] / [Fotolia]

MATHEMATIQUES

PREMIERE ANNEE

AMERINSA

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

1PC

Année scolaire 2011 - 2012

Cours
Exercices

FORMATION

Auteur de la Ressource Pédagogique
Guy Athanaze

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

INSA LYON

Mathématiques

Première année

AMERINSA

2011-2012

PREFACE

Ce que n'est pas ce polycopié :

Ce polycopié n'est pas un cours exhaustif recouvrant le programme de première année de la filière AMERINSA. Vous n'y trouverez pas toutes les démonstrations des propriétés et théorèmes. Il ne vous dispense pas de l'assiduité aux cours et TD.

Ce qu'est ce polycopié :

Le but de ce polycopié est de vous aider dans la compréhension du cours de Mathématiques. Il reprend le plan des chapitres avec toutes les définitions et la majorité des théorèmes. Certaines démonstrations non faites en cours sont détaillées. Vous trouverez également des exemples et exercices corrigés.

A la fin de chaque chapitre, des exercices de niveau 1 sont présentés (parfois avec leur correction). Il s'agit d'applications directes du cours. Ces exercices doivent être faits par les étudiants après la présentation du cours correspondant et avant les TD. Ils ne seront pas repris par les enseignants. Ces exercices ont été élaborés avec la participation de M.C. Douineau, A. Aymes, H. Ricard, J.B. Dill, A. Lachal, S. Balac.

Je remercie C. Jaloux pour sa coopération et son investissement pour la partie « exercices corrigés ».

Le dernier chapitre « A propos de la rédaction » présente un certain nombre d'exercices et problèmes d'évaluation de l'INSA. Les énoncés sont suivis de fac-similé de copies d'étudiants. Ces copies sont données telles qu'elles. Il ne s'agit pas de corrigé mais simplement d'exemples de rédaction. Je remercie les étudiants qui ont accepté de voir leurs copies reproduites.

P.S. : Si vous décelez des fautes de frappe ou si vous avez des remarques, transmettez les à l'auteur… Je vous en remercie d'avance.

SOMMAIRE

QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre préliminaire, vous trouverez un certain nombre de définitions qui seront vues dans ce polycopié. Certaines sont déjà connues, d'autres non. Elles ont été regroupées ici afin d'en avoir une vue plus synthétique.

Vous trouverez aussi un petit mémo de formules classiques (trigonométrie, identité remarquables …).

APPLICATIONS

Injection ou application injective de E dans F

Une application $f : E \to F$ est **injective** si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $\forall (x, x') \in E^2$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
- $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$.
- Tout élément de F admet **au plus** un antécédent dans E.

Surjection ou application surjective de E sur F

Une application $f : E \to F$ est **surjective** si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $f(E)=F$.
- Tout élément de F admet **au moins** un antécédent dans E.

Bijection ou application bijective de E sur F

Une application $f : E \to F$ est **bijective** si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- f est injective et surjective.
- Tout élément de F admet un antécédent **unique** dans E.

Composition des applications

1. La composition des applications est associative ce qui signifie que, quelles que soient les applications f, g, h telles que :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. La composée de deux injections est une injection.

La composée de deux surjections est une surjection.

La composée de deux bijections est une bijection.

Involution ou application involutive

Une application $f: E \to E$ est une **involution** si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- f est bijective et $f=f^{-1}$.
- $f \circ f = id_E$.

Restriction d'une application. Prolongement

Soit une application $f: E \to F$ et $A \subset E$. La **restriction** de f à la partie A est l'application $g: A \to F$ telle que :

$$\forall x \in A,\ g(x)=f(x)$$

On dit aussi que f est un **prolongement** de g à E.

STRUCTURES

Groupe

(G,*) est un **groupe** si et seulement si :

- G est muni d'une loi de composition interne * (application de $G \times G$ dans G);
- la loi * est associative (quels que soient a, b, c de G : (a*b)*c=a*(b*c));
- elle admet un élément neutre (il existe e de G tel que, quel que soit a de G, a*e = e*a = a);
- tout élément a de G admet un symétrique a' dans G pour la loi * (a*a'=a'*a=e).

Groupe commutatif

Le groupe (G, *) est **commutatif** si et seulement si la loi * est commutative (quels que soient a et b de G: a*b=b*a).

Sous-groupe

Soit un groupe (G, *). Une partie H de G est un **sous-groupe** de G pour la loi * si et seulement si (H, *) est un groupe.

Corps commutatif

$(K, +, \times)$ est un **corps commutatif** si et seulement si :

- (K, +) est un groupe commutatif.
- K est muni d'une loi interne $\times$, associative, commutative, distributive par rapport à la loi + (quels que soient a, b, c de K: a(b+c)=ab+ac et (b+c)a=ba+ca), admettant un élément neutre et tout élément non nul de K admet un symétrique pour la loi $\times$.

Sous-corps commutatif

Soit $(K, +, \times)$ un corps commutatif. Une partie L de K est un **sous-corps commutatif** de $(K, +, \times)$ si et seulement si $(L, +, \times)$ est un corps commutatif.

Homomorphisme. Isomorphisme
Soit (E, *) et (F, o) deux ensembles munis respectivement des lois de composition internes * et o, une application $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme** (on dit aussi **morphisme**) si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x*y)=f(x)\,o\,f(y)$$

Un homomorphisme bijectif est appelé **isomorphisme**.

$\mathbb{R}$-Espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

(V +, •) est un **$\mathbb{R}$-espace vectoriel** ou un **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$** si et seulement si :

- (V , +) est un groupe commutatif;
- la loi de composition externe (application de $\mathbb{R} \times V$ dans V) possède les propriétés suivantes : quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et les réels λ et μ,

$$1 \bullet \vec{v} = \vec{v}$$
$$\lambda \bullet (\mu \bullet \vec{v}) = (\lambda\mu) \bullet \vec{v}$$
$$(\lambda+\mu) \bullet \vec{v} = \lambda \bullet \vec{v} + \mu \bullet \vec{v}$$
$$\lambda \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \bullet \vec{u} + \lambda \bullet \vec{v}$$

Sous-espace vectoriel
- **Définition**

Une partie V' de V est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel si V' est un espace vectoriel pour les deux lois + et • de V .

- **Caractérisation**

V' est un sous-espace vectoriel de V si et seulement s'il possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1- - V' est une partie non vide de V
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V'^2,\ \vec{u} + \vec{v} \in V'^2$ (stabilité pour la loi +)
  - $\forall\ \vec{v} \in V',\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \bullet \vec{v} \in V'$ (stabilité pour la loi •)

2- V' est une partie non vide de V
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V'^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in V'^2$ (stabilité pour combinaisons linéaires

COORDONNÉES

Le plan P est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

• $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires (on dit aussi linéairement dépendants ou encore que la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est liée) si et seulement si $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = \vec{0}$ avec $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$ est nul.

• Soit la droite D d'équation ax+by+c=0, $(a, b)\neq(0,0)$. La direction de D est la droite vectorielle $\vec{D}$ d'équation ax + by = 0.

• Un vecteur directeur de D est $\vec{w}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

• $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$ c'est-à-dire xx' + yy' =0.

Un vecteur normal à D est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

• La distance de $M(x_0, y_0)$ à D est: $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

L'espace E est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• Soit le plan P d'équation ax+by+cz+d=O, $(a, b, c) \neq (0, 0,0)$.

La direction de P est le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation ax + by + cz = 0.

• Des vecteurs de $\vec{P}$ sont les vecteurs de coordonnées :

$$\begin{pmatrix}0\\-c\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$$

E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• Un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

• La distance de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à P est $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

CALCULS ALGÉBRIQUES

Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ **Formule du binôme de Newton**

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+a^{n-p}b^p+\ldots+b^{n-1})$

FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE

Le plan P étant orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Formules d'addition

Dans le formulaire qui suit, toutes les formules sont vraies sous réserve de l'existence des termes.

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b+\sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b+\cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de multiplication par deux

$\cos 2a=\cos^2 a - \sin^2 a=2\cos^2 a - 1=1 - 2 \sin^2 a$

$\sin 2a =2 \sin a \cos a$

$\tan 2a= \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Si $\tan \dfrac{x}{2}=t$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Transformation de produits en sommes

$\cos a \cos b=\dfrac{1}{2} [\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a \sin b=-\dfrac{1}{2} [\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin a \cos b=\dfrac{1}{2} [\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Transformation de sommes en produits

$\cos p + \cos q = 2 \cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$1+ \cos x = 2 \cos^2\dfrac{x}{2}$

$1-\cos x = 2 \sin^2\dfrac{x}{2}$

Chapitre 1

THEORIE DES ENSEMBLES

Présentation historique :

Peano Giuseppe (1858-1932) est un mathématicien italien, également linguiste (il tenta de faire ratifier une langue internationale proche du latin), professa le calcul infinitésimal (calcul différentiel et calcul intégral) à l'Académie militaire de Turin mais ses travaux portent essentiellement sur la logique mathématique, la théorie des ensembles, l'axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels.

On lui doit la création d'un système de notations susceptibles d'énoncer et de démontrer les propositions mathématiques en utilisant un minimum de signes compatibles avec le raisonnement déductif reposant sur des notions premières acceptées (axiomes). Il usa le premier des notations ensemblistes $\mathbb{N}$ pour les nombres entiers naturels (*naturale*), $\mathbb{Q}$ pour les nombres rationnels -les fractions- autrement dit les quotients (*quoziente*). On lui doit aussi (1888) la notion d'espace vectoriel (réel) abstrait généralisant les travaux de **Grassmann** sur le calcul vectoriel (appelé à l'époque *calcul géométrique*).

On lui doit :

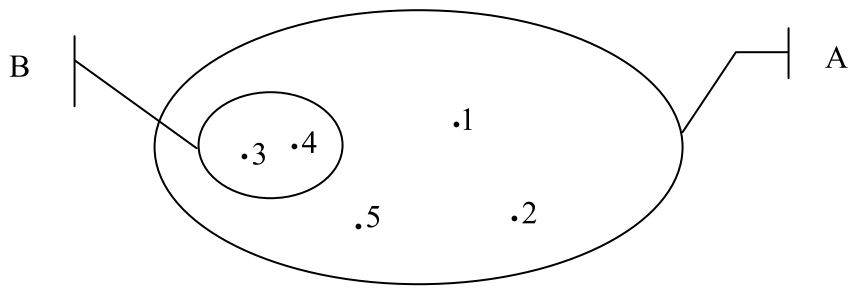
- les symboles ensemblistes $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ (en fait, le signe $\subset$ est plus sûrement dû à **Schröder**).
- faisant suite aux travaux de **Dedekind**, une construction de l'ensemble des entiers naturels et la notion moderne de suite numérique en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et la notion rigoureuse de raisonnement « par récurrence » .

Ensemble

1. **Définitions**

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble. On dit que ces éléments appartiennent à l'ensemble. La notation « $x \in E$ » signifie « x appartient à l'ensemble E ». La notation « $x \notin E$ » signifie « x n'appartient pas à l'ensemble E ».
Un ensemble peut être défini de deux façons : en extension ou en compréhension.

2. Représentation d'un ensemble avec un **diagramme de Venn**



3. L'**ensemble vide** est un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note : $\varnothing$.

4. Un **singleton** est un ensemble qui possède un seul élément.

Sous-ensemble – Inclusion

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A est élément de B. On note alors : $A \subset B$.

On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B, ou une **partie** de B.

Attention : Ne pas confondre « appartient » et « inclus ».

Soit A un ensemble. L'ensemble de ses sous-ensembles (de ses parties) est **l'ensemble des parties** de A noté $\mathscr{P}(A)$.

Remarque : Si le cardinal (nombre d'éléments) de A est fini et égal à l'entier n, alors le cardinal (le nombre d'éléments) de $\mathscr{P}(A)$ est 2^n.

Égalité de deux ensembles

1- Deux ensembles sont **égaux** s'ils ont les mêmes éléments.

2- **Théorème** : Soit A et B deux ensembles. $A=B$ équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$.

Complémentaire

1- On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble formé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\complement_E A$ ou s'il n'y a pas d'ambiguïté A^c ou $\overline{A}$.

2- **Propriété** : $\overline{\overline{A}} = A$

$\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$ si E est le référentiel.

Union de deux ensembles

1- Soient A et B deux ensembles. La **réunion** de A et B, noté $A \bigcup B$ (et se lit A union B) est l'ensemble formé des éléments appartenant à A ou (*inclusif*) à B.

2- **Propriété** :

$A \bigcup B = B \bigcup A$ *Commutativité*

$A \subset A \bigcup B$

$\varnothing \bigcup A = A$

$A \bigcup A = A$

Si $A \subset B$, $A \bigcup B = B$

$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ *Associativité*

Remarques : 1- L'union correspond à un « *ou inclusif* », nous verrons en exercice la différence symétrique qui correspond au « *ou exclusif* ».

2- Pour écrire $A \subset B$, on peut écrire $B \supset A$.

Intersection

1- Soient A et B deux ensembles. L'**intersection** de A et B, noté $A \bigcap B$ (et se lit A inter B) est l'ensemble formé des éléments appartenant à A et à B.

2- **Propriété** :

$A \bigcap B = B \bigcap A$ *Commutativité*

$A \bigcap B \subset A$

$\varnothing \bigcap A = \varnothing$

$A \bigcap A = A$

Si $A \subset B$, $A \bigcap B = A$

$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ *Associativité*

3- Deux ensembles A et B tels que $A \bigcap B = \varnothing$ sont dits **disjoints**.

Relations entre réunion et intersection

1- Distributivité de l'intersection sur l'union : $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
2- Distributivité de l'union sur l'intersection : $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
3- Lois de **De Morgan** : $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ et $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

Démonstration des lois de De Morgan :

1- Soit x tel que $x \in \overline{A} \bigcup \overline{B}$ ce qui signifie que x appartient à $\overline{A}$ ou $\overline{B}$.

Si $x \in \overline{A}$, $x \notin A \Rightarrow x \notin A \bigcap B \Rightarrow x \in \overline{A \bigcap B}$

Si $x \in \overline{B}$, $x \notin B \Rightarrow x \notin A \bigcap B \Rightarrow x \in \overline{A \bigcap B}$

Ceci est donc vrai pour tout x de $\overline{A} \bigcup \overline{B}$, on en déduit que:

$$\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$$

Soit x tel que $x\in\overline{A\cap B}$, ce qui signifie que x n'est pas un élément commun à A et B.

Si $x\in A$, $x\notin B \Rightarrow x\in\bar{B} \Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

Si $x\in B$, $x\notin A \Rightarrow x\in\bar{A} \Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

Si $x\notin A$ et $x\notin B \Rightarrow x\in\bar{A}$ et $x\in\bar{B} \Rightarrow x\in\bar{A}\cup\bar{B}$

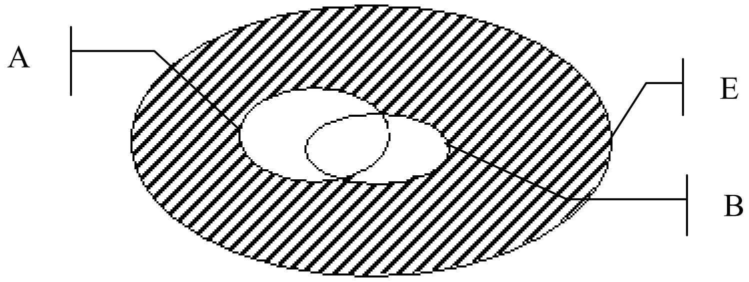
Ceci est donc vrai pour tout x de $\overline{A\cap B}$, on en déduit que:

$$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$$

D'où :

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

2- Sur un diagramme de Venn, la démonstration étant analogue à la précédente.

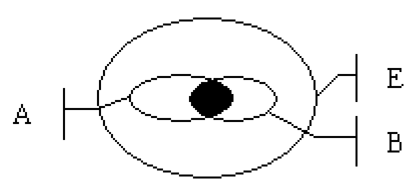
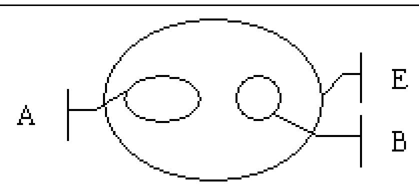


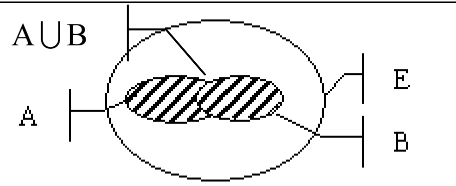
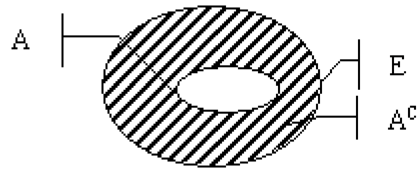
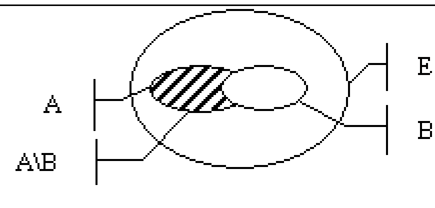
La partie ombrée représente $\bar{A}\cap\bar{B}$, on vérifie alors que :

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

Remarque : L'intersection est prioritaire sur la réunion, c'est-à-dire $A\cap B\cup C=(A\cap B)\cup C$ et non $A\cap(B\cup C)$.

Illustrations

Langage probabiliste	Langage des ensembles	Diagramme de Venn
A et B deux événements de Ω	A et B deux parties de E	
A et B	$A\cap B$	
A et B sont incompatibles	$A\cap B=\varnothing$	

A ou B	$A \cup B$	
$\overline{A}$ événement contraire de A	$\complement_E A = A^C$	
A\B différence de deux événements	$A\backslash B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$	

Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble des couples d'éléments de A et de B, pris dans cet ordre. On le note $A \times B$ et se lit « A croix B ».

On généralise cette définition pour n ensembles.

Remarques : - $A \times A$ se note A^2

- Ne pas confondre « couple » et « paire ».

Propriété : Si A et B sont deux ensembles *finis*, le nombre d'éléments de $A \times B$ est le produit des nombres d'éléments de A et B.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, peut-on dire que B = C ?
2. Si $A \cup B = A \cap B$, peut-on dire que A = B ?

Exercice 2. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
Donner une écriture plus simple des ensembles suivants :

1- $(A \bigcup (A \bigcap B)) \bigcap B$.

2- $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \overline{B})$.

3- $\left(\overline{A \bigcup B}\right) \bigcap (C \bigcup \overline{A})$.

4- $((A \bigcup B) \bigcap (B \bigcap C)) \bigcup (A \bigcup C)$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- non, 2- oui.

Exercice 2. 1- $A \cap B$; 2- A ; 3- $\overline{A} \cap \overline{B}$; 4- $A \cup C$.

EXERCICES

Exercice 1. Soit un ensemble E de 32 personnes de langue française dont 18 connaissent l'allemand et 24 l'anglais. Toutes les personnes parlent au moins une des deux langues allemand ou anglais.

1. Combien de personnes de E connaissent à la fois l'allemand et l'anglais?
2. On désire prendre dans E pour servir d'interprète:
   - soit une personne parlant à la fois l'allemand et l'anglais,
   - soit un couple de personnes connaissant l'une l'anglais seulement, l'autre l'allemand seulement. De combien de manières peut-on faire ce choix?

Exercice 2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Si $A \subset B$, que peut-on dire de $\overline{B}$ par rapport à $\overline{A}$?

Exercice 3. Soient A, B, C, trois parties d'un ensemble E non vide :
Montrer que si $A \bigcup B = A \bigcup C$ et $A \bigcap B = A \bigcap C$ alors $B = C$.

Exercice 4. Soient a et b deux réels. On pose $A = \{a, b\}$. Les relations suivantes sont-elles vérifiées ou non ?

(i) $a \in A$.

(ii) $\{a\} \in A$.

(iii) $\emptyset \in A$.

(iv) $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$.

(v) $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$.

Exercice 5. Soient a, b, c trois nombres réels. Trouver x pour que la relation $x \in \{a, b, c\}$ soit vérifiée. Même question avec $\{x\} \in \{a, \{b\}\}$, puis avec $\{x\} \in \{a,b,c\}$.

Exercice 6. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle différence A\B (A privé de B) l'ensemble $A \bigcap \overline{B}$.
Faire un diagramme de Venn représentant A\B et caractériser cet ensemble par une phrase.
Cette opération est-elle commutative ?
Montrer que: (i) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \bigcup C)$.
(ii) $(A\backslash B) \bigcap (C\backslash D) = (A \bigcap C)\backslash(B \bigcup D)$.

Exercice 7. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique $A \Delta B$ l'ensemble $(A\backslash B) \bigcup (B\backslash A)$.
Faire un diagramme de Venn représentant $A \Delta B$ et caractériser cet ensemble par une phrase.
Cette opération a-t-elle un rapport avec le "ou exclusif " ? Est-elle commutative ?
Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Simplifier $(A \Delta B) \bigcup (A \Delta \overline{B})$.
Montrer que Δ est commutative.
Que valent $A \Delta \emptyset$, $A \Delta A$, $A \Delta B$ quand $A \subset B$?

Exercice 8. Trouver l'ensemble des sous-ensembles de A=$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.

Exercice 9. Soient A, B et C trois ensembles. Simplifier les écritures suivantes :

1- $\left[A\cap(A\cap B)\right]\cap\overline{B}$

2- $(A\cap B)\cup\overline{\left(A\cup\overline{B}\right)}$

3- $\left[(A\cap C)\cap(B\cap C)\right]\cap A$

4- $\left(\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}\right)\cap(A\cap B)\right)\cup(C\cup B)$

Exercice 10. Soit A=$\{1, 2, 3\}$ et B=$\{3,\pi\}$. Décrire les ensembles A\B, B\A, $A\times B$, $\mathscr{P}(A\bigcup B)$ et $\mathscr{P}(A)\bigcup\mathscr{P}(B)$.

Faire de même pour A=[-2, 5[et B=$\{1\}\bigcup[4, +\infty[$ sauf pour l'ensemble des parties.

Exercice 11. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les deux ensembles C_1 et C_2 comme suit :

$C_1=\{M(x,y)/x^2+y^2=1\}$ et $C_2=\{M(x,y)/\exists\theta\in[0,2\pi[, x=\cos\theta \text{ et } y=\sin\theta\}$.

Démontrer par double inclusion que $C_1=C_2$.

Chapitre 2

LA LOGIQUE MATHEMATIQUE

Présentation historique :

Georg Ferdinand Cantor (1845-1918), d'origine danoise, naquit à Saint-Petersbourg. Il s'intéressa à l'analyse et à la théorie des nombres, le noyau de ses recherches étant les difficultés rencontrées dans les concepts de limite et de continuité des fonctions et des courbes, indissociables de celui de nombre réel et d'un langage mathématique précis.

Les conséquences de ses travaux allaient bouleverser les fondements des mathématiques, alors considérés comme inébranlables, jusqu'en 1963 avec les travaux de **Gödel** et de **Cohen** et la « découverte » de propositions indécidables (i.e. dont on ne peut prouver, au sein de la théorie elle-même et de par les axiomes qui la définissent, si elles sont vraies ou fausses).

Gödel Kurt (1906-1978), américain, est un philosophe et logicien d'origine autrichienne. Il formula des théorèmes fondamentaux relatifs à la théorie des ensembles et portant sur les relations indécidables et les théories contradictoires, dites aussi non consistantes : dont le système d'axiomes aboutit à une contradiction, c'est à dire à l'existence d'un théorème qui serait, dans la théorie elle-même, à la fois vrai et faux.

On lui doit le théorème d'incomplétude : toute théorie formelle T (fondée sur une axiomatique) consistante et susceptible de formaliser, en son sein, l'arithmétique (théorie des nombres) est incomplète : il existe au moins une proposition de l'arithmétique indémontrable dans T (on ne pourra prouver ni qu'elle est vraie ni qu'elle est fausse). Ce résultat ruine les espérances de **Hilbert** quant au formalisme, panacée supposée face aux contradictions rencontrées depuis la création de la théorie des ensembles de **Cantor**, et montre les limites du raisonnement logique et l'impossibilité de construire l'arithmétique sur le seul support logique comme le voulaient les partisans du logicisme que furent **Frege** et **Russell**.

La logique usuelle s'avère "insuffisante" pour les mathématiques en général ; on se plaça alors à un niveau supérieur : on parla de métalogique et de métamathématique. En gros, il fallait redéfinir le concept de démonstration. En 1940, **Ackermann** prouvait par ce biais la consistance de l'arithmétique, sans toutefois soulever grand enthousiasme.

1. Enoncé (Proposition ou assertion)

Il s'agit d'une affirmation qui est soit vraie (V), soit fausse (F) mais *jamais* les deux à la fois. C'est ce que l'on appelle le **principe du tiers exclu** (en logique mathématique binaire).

2. Les trois principaux connecteurs

1- La négation

La négation de P est notée $\neg P$ (se lit « non P »).

P	$\neg P$

2- La conjonction

Soient P et Q deux propositions. La conjonction de P et Q est notée $P \wedge Q$ (se lit « P et Q »).

P	Q	$P \wedge Q$

3- La disjonction

Soient P et Q deux propositions. La disjonction de P et Q est notée $P \vee Q$ (se lit « P ou Q »).

P	Q	$P \vee Q$

Remarque : Il existe des liens entre la théorie des ensembles et la logique mathématique.
En théorie des ensembles, il existe trois principales opérations : l'union, l'intersection et le complémentaire.
En logique mathématique, il existe trois principaux connecteurs : ou, et, non.
Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Considérons P la propriété « $x \in A$ » et Q la propriété « $x \in B$ ».Alors,

- $P \vee Q$ est la propriété « $x \in A \bigcup B$ »
- $P \wedge Q$ est la propriété « $x \in A \bigcap B$ »
- $\neg P$ est la propriété « $x \notin A$ » c'est-à-dire « $x \in A^c$ ».

On dit usuellement que $\vee$ correspond à $\bigcup$, $\wedge$ correspond à $\bigcap$, $\neg$ correspond au complémentaire.

4- Règles de De Morgan

$\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ ont les mêmes tables de vérité.
$\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ ont les mêmes tables de vérité.

3. D'autres connecteurs

1- L'équivalence

Soient P et Q deux propositions. L'équivalence de P et Q est notée $P \Leftrightarrow Q$ (se lit « P équivalent à Q »).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$

2- L'implication

Soient P et Q deux propositions. L'implication de P à Q est notée $P \Rightarrow Q$ (se lit « P implique à Q »).

P	Q	$P \Rightarrow Q$

Propriétés : 1- Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$ ont même table de vérité.
2- Les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont même table de vérité.

Remarques : 1- La négation d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ n'est pas une implication mais une conjonction $\left(P \wedge (\neg Q)\right)$.
2- La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
3- A quelle propriété de la théorie des ensembles correspond l'implication ?

Remarques quant à la définition de l'implication :

1- Pour les étudiants qui trouvent « bizarre » la définition que nous avons choisie de l'implication, donc l'équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$, étudier l'équivalence entre $\neg(P \Rightarrow Q)$ et $P \wedge \neg Q$ plus facile à interpréter…

2- Lewis Caroll et les paradoxes de l'implication

Si la définition des opérateurs logiques tels que la conjonction, la disjonction ou l'équivalence ne pose aucun problème à "l'honnête homme", il n'en va pas de même pour l'implication. L'auteur d'Alice au Pays des Merveilles, qui se piquait de logique, s'est penché sur ce problème dans un traité de logique qu'il avait rédigé (Symbolic Logic, 1896). De même, dans ses Principes des Mathématiques (1980, ed. Blanchard), Louis Couturat note ce qu'il appelle "les paradoxes de l'implication matérielle".

Toutes les propositions vraies sont équivalentes. Toutes les propositions fausses sont équivalentes. Chaque proposition fausse implique toutes les propositions (vraies ou fausses); chaque proposition vraie est impliquée par toutes les propositions (fausses ou vraies). Ces paradoxes inévitables (car ce sont des conséquences nécessaires au calcul, et cela dans n'importe quel système de Logique) s'expliquent par le fait que l'implication ici considérée est l'implication matérielle, et non pas l'implication formelle [... à laquelle tout le monde pense quand on parle d'implication (dans la vie courante)]. L'implication matérielle ($P \Rightarrow Q$) ne signifie rien de plus que ceci : "Ou P est fausse, ou Q est vraie". Peu importe que les propositions P et Q aient entre elles un rapport logique ou empirique quelconque: l'implication est vérifiée dès que P est fausse (quelle que soit Q) ou dès que Q est vraie (quelle que soit P). Voilà pourquoi on arrive à ce résultat paradoxal, que le faux implique le vrai.

Ces vérités paradoxales servent d'ailleurs à résoudre correctement certains paralogismes ou certains paradoxes où le bon sens vulgaire risquerait de s'embarrasser. Tel est par exemple le problème de Lewis Caroll :
[supposons que] "Q implique R ; mais [aussi que] P implique que Q implique non-R; Que faut-il en déduire ? [...] Lewis Caroll [adoptant le point de vue du sens commun] raisonne ainsi : si Q implique R, il est impossible que Q implique non-R; donc P implique l'impossible, et par suite est faux.

1 - En utilisant la méthode des tables de vérités, montrez que la conclusion, et donc le raisonnement, de Lewis Caroll sont erronés.

2 - Quel est le "maillon" de la démonstration de Caroll qui pose problème. Pourquoi ?

3 - Finalement, quelle conclusion peut-on tirer des deux hypothèses initiales ?

4. Les quantificateurs

1- Le quantificateur universel : $\forall$

$\forall x \in A$ se lit « quel que soit x élément de A » ou « pour tout x appartenant à A ».

Remarque : La notation $\forall$ est un A à l'envers. A est l'initiale de l'allemand Alle.

2- Le quantificateur existentiel : $\exists$

$\exists x \in A$ se lit « il existe un élément x de A ».

Remarque : La notation $\exists$ est un E retourné. E est l'initiale de l'allemand Existieren.

Remarque : On dit qu'un élément ayant une propriété P dans un ensemble E est **unique** si deux éléments de E ayant la propriété P sont forcément égaux, autrement dit :

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2 \ (P(x_1) \wedge P(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

L'unicité n'implique pas l'existence : quand il y a unicité, soit il y a un unique élément ayant la propriété P, soit il n'y en a pas.
Le fait qu'il y ait conjointement existence et unicité de l'élément x ayant la propriété P se symbolise par : $\exists! x \in E, P(x)$.

3- Ordre des quantificateurs :

a- On peut permuter deux quantificateurs de même nature
b- On ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différente

4- Négation de formule avec quantificateurs

La négation de ($\forall x \in A$, P(x)) est ($\exists x \in A, \neg P(x)$).
La négation de ($\exists x \in A$, P(x)) est ($\forall x \in A, \neg P(x)$).

Exemple : Traduire en langage mathématique, avec des quantificateurs, le fait qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est croissante. Nier ensuite cette propriété.
Réponse : Le fait que f soit croissante se traduit de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

La négation de cette propriété s'écrit :

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y) \wedge (f(x) > f(y))$$

On rappelle que l'on a vu que : $\neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$.

5. Tautologie et contradiction

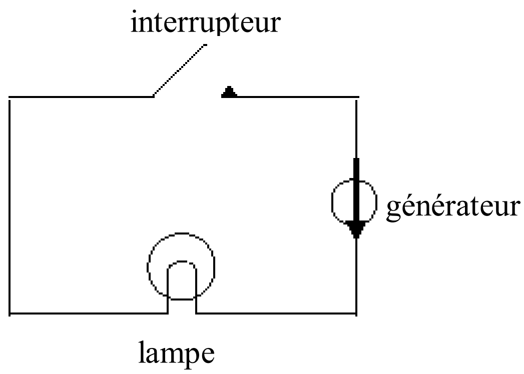
Une **tautologie** est une proposition qui, quelque soient les valeurs de vérités de ces « atomes » est vraie.
Une **contradiction** est une proposition qui, quelque soient les valeurs de vérités de ces « atomes » est fausse.
Une proposition est **satisfaisable** s'il existe des valeurs de vérité de ces « atomes » qui la rendent vraie.

Exemples : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ est une tautologie.
$P \Leftrightarrow \neg P$ est une contradiction
$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est une proposition satisfaisable.

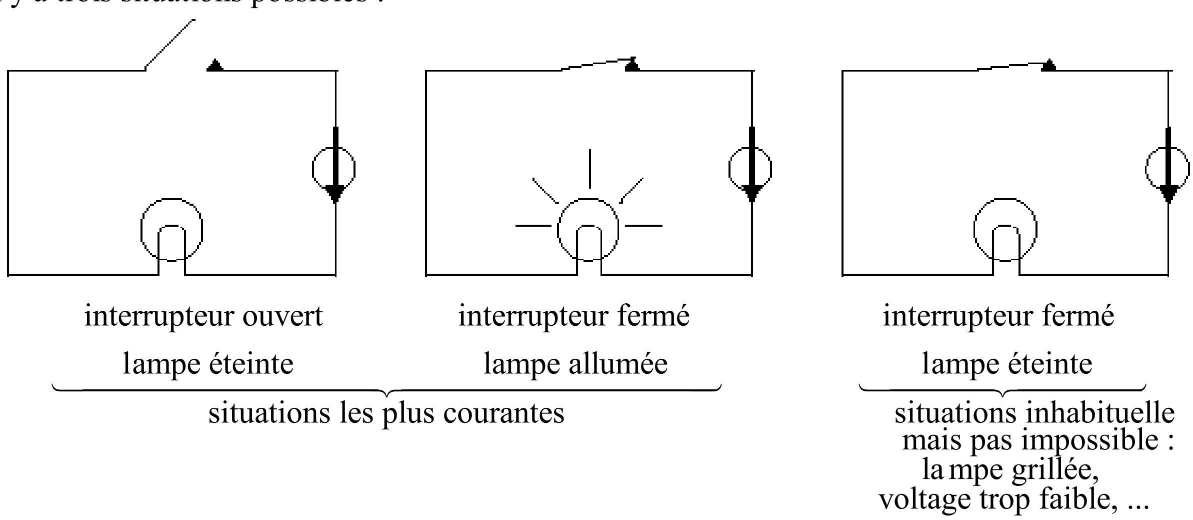
Encore au sujet de l'implication…

L'implication logique « P $\Rightarrow$ Q » est vraie si et seulement si P est fausse ou Q est vraie. Cette notion est la plus difficile à maîtriser, contrairement à ce qu'on peut penser au premier abord.

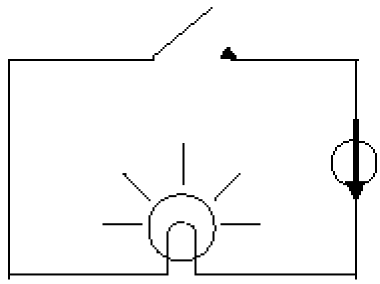
Prenons un exemple pour illustrer ce fait. Considérons un circuit électrique en série constitué d'un générateur de courant, d'un interrupteur et d'une lampe.



L'interrupteur peut être ouvert ou fermé ; la lampe peut être allumée ou éteinte.
Soit P la proposition : la lampe est allumée.
Soit Q la proposition : l'interrupteur est fermé.
Quelle est la relation d'implication logique entre P et Q ? A-t-on P $\Rightarrow$ Q ? Q $\Rightarrow$ P ? A-t-on l'équivalence P $\Leftrightarrow$ Q ? Précisons qu'on ne recherche pas une relation causale, telle que le conçoit le physicien. Nous cherchons une relation logique permettant de faire une déduction. Il y a trois situations possibles :



Une seule situation est impossible :



interrupteur ouvert
lampe allumée

La seule implication *logique* est la suivante :

$P \Rightarrow Q$: si la lampe est allumée, alors l'interrupteur est fermé.

L'implication $Q \Rightarrow P$ (si l'interrupteur est fermé, alors la lampe est allumée) correspond certes à une explication *causale* de l'allumage de la lampe, mais n'est possible que dans un monde idéal et parfait où les lampes ne tombent jamais en panne, et ne constitue en rien une conséquence logique.

On réfléchira au fait que toutes les phrases qui suivent ont la même signification :

$P \Rightarrow Q$	lampe allumée $\Rightarrow$ interrupteur fermé
non Q $\Rightarrow$ non P (contraposée)	interrupteur ouvert $\Rightarrow$ lampe éteinte
si P alors Q	si la lampe est allumée, alors on en déduit que l'interrupteur est fermé.
P est suffisant pour Q il suffit P pour avoir Q	il suffit que la lampe soit allumée pour conclure que l'interrupteur est fermé.
P seulement si Q	la lampe est allumée seulement si l'interrupteur est fermé.
Q est nécessaire pour P il faut Q pour avoir P	il faut que l'interrupteur soit fermé pour que la lampe soit allumée.
non P ou Q	la lampe est éteinte, ou l'interrupteur est fermé

Il résulte de cela que l'implication est vérifiée dans les trois cas suivants (correspondant à nos trois dessins) :

P est vrai et Q est vrai
P est faux et Q est vrai
P est faux et Q est faux

Ainsi, si P est faux, Q est quelconque et il n'y a rien à montrer. La seule chose à montrer est donc bien que si P est vrai, alors Q est vrai.

L'implication est fausse dans le seul cas suivant :

P est vrai et Q est faux

Il ne peut y avoir d'implication, puisque l'hypothèse est vérifiée, mais pas la conclusion.

La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Elle peut être vraie ou fausse, indépendamment de la valeur de vérité de $P \Rightarrow Q$. Dans notre exemple, la réciproque est fausse. Toutes les phrases qui suivent sont équivalentes à Q ⇒ P. Elles sont donc fausses, le contre-exemple étant donné par le troisième dessin :

Q ⇒ P	interrupteur fermé ⇒ lampe allumée
non P ⇒ non Q (contraposée)	lampe éteinte ⇒ interrupteur ouvert
si Q alors P	si l'interrupteur est fermé, alors la lampe est allumée.
Q est suffisant pour P il suffit Q pour avoir P	il suffit que l'interrupteur soit fermé pour conclure que la lampe est allumée.
Q seulement si P	l'interrupteur est fermé seulement si la lampe est allumée.
P est nécessaire pour Q il faut P pour avoir Q	il faut que la lampe soit allumée pour conclure que l'interrupteur est fermé.
non Q ou P	l'interrupteur est ouvert, ou la lampe est allumée

Enfin, dire que P ⇒ Q et Q ⇒ P, c'est dire que P ⇔ Q.

Théorèmes fondamentaux de logique mathématique

Théorèmes fondamentaux du calcul propositionnel

(1)	$A \vee \neg A$	Principe du tiers exclu
(2)	$\neg(A \wedge \neg A)$	Loi de non contradiction
(3)	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	Loi de la double négation
(4)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	Lois de De Morgan
(5)	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	Lois de De Morgan
(6)	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Règle de contraposition
(7)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	Règle du modus ponens
(8)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	Règle du modus tollens
(9)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Règle du modus barbara
(10)	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Règles de distributivité
(11)	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Règles de distributivité

Théorèmes fondamentaux du calcul des prédicats

(1)	$\neg \forall x\ A(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A(x)$	Règles de négation
(2)	$\neg \forall x\ \neg A(x) \Leftrightarrow \exists x\ A(x)$	Règles de négation
(3)	$\neg \exists x\ A(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A(x)$	Règles de négation
(4)	$\neg \exists x\ \neg A(x) \Leftrightarrow \forall x\ A(x)$	Règles de négation
(5)	$\forall x\ \forall y\ A(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ A(x,y)$	Règles d'échange
(6)	$\exists x\ \exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ A(x,y)$	Règles d'échange
(7)	$\exists x\ \forall y\ A(x,y) \Rightarrow \forall y\ \exists x\ A(x,y)$	Règles d'échange
(8)	$\forall x\ A(x) \Rightarrow A(x)$	
(9)	$A(x) \Rightarrow \exists x\ A(x)$	

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Traduire en langage mathématique, avec des quantificateurs, les phrases suivantes, et écrire leur négation :

1. tout nombre réel inférieur à 1 vérifie l'inégalité $x^2 \leq x$;
2. le produit de 2 entiers impairs est un entier pair ;
3. tout nombre complexe égal à son conjugué est un nombre réel.

Exercice 2. Traduire en langage naturel les assertions suivantes, étudier leur vérité et écrire leur négation :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = -1) \vee (x \neq 4)$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$;

Exercice 3. Soient P, Q et R trois assertions.

1. Montrer que $P \wedge (P \vee Q)$ et P ont la même table de vérité.
2. Donner la table de vérité de $P \wedge (Q \wedge R)$ et de $(P \wedge Q) \wedge R$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \leq 1) \Rightarrow (x^2 \leq x)$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2 > x) \wedge (x \leq 1)$

2- $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ (2p+1)(2q+1) = 2k$

Négation : $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ (2p+1)(2q+1) \neq 2k$

3- $\forall z \in \mathbb{C},\ (z = \overline{z}) \Rightarrow (z \in \mathbb{R})$

Négation : $\exists z \in \mathbb{C},\ (z = \overline{z}) \wedge (z \notin \mathbb{R})$.

Exercice 2. 1- « Pour tout réel x, il existe un réel y qui est inférieur ou égal à x. »
Cette assertion est vraie, pour tout réel x, il suffit de prendre le réel x-1, qui vérifie l'assertion.

La négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$.

2- « Tout réel x est soit égal à -1, soit différent de 4. »
Cette assertion est évidemment fausse, le réel 4 est un contre-exemple à cette assertion.

La négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \neq -1) \wedge (x = 4)$.

3- « Tout réel x vérifie, si x est égal à 3, alors x² est égal à 9. »

Cette assertion est vraie. Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ (x^2 \neq 9) \wedge (x = 3)$.

4- « Tout réel x dont le carré est 9 est égal à 3. »
Cette assertion est fausse, -3 est un contre-exemple.

La négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \neq 3) \wedge (x^2 = 9)$.

Exercice 3. 1-

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

2-

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

EXERCICES

Exercice 1. Les énoncés ou les formules suivantes sont-ils vrais ou faux ?
(i) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) La fonction $t \mapsto \sin t$ est croissante.
(iii) Toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$ admet une limite en $\pm\infty$.
(iv) Toute suite géométrique converge.
(v) Une suite géométrique converge si sa raison r vérifie $|r| \leq 1$.
(vi) Tout réel est limite d'une suite de réels.

Exercice 2. On considère les formules mathématiques suivantes :
(i) $P_1(x)$: « tout nombre réel supérieur à x est positif».
(ii) $P_2(x)$: « x réel et $\ln x \geq 0$ ».
(iii) $P_3(x, y)$: « la fonction $t \mapsto \cos t$ est croissante sur l'intervalle $[x, y]$ »
(iv) $P_4(x,y)$: « x et y sont réels et vérifient: $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.
Par quelles constantes peut-on remplacer les variables x et y pour obtenir des énoncés vrais ?

Exercice 3. À l'aide des tables de vérité, montrer que :
(i) $p \wedge \neg p$ est une contradiction.
(ii) $p \Leftrightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow p))$.
(iii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.

Exercice 4. Dresser les tables de vérité de $\neg(p \Rightarrow q)$ et $p \wedge \neg q$. Que constatez-vous ?

Exercice 5. Ecrire la négation des phrases suivantes :

1- Adrian va à la plage ou au tennis.
2- Paul a un pantalon rouge et un chapeau bleu.
3- S'il neige, alors je fais du ski.
4- John est heureux si et seulement s'il fait de la logique.

Exercice 6. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1) f est majorée.
2) f ne s'annule jamais.
3) f n'est pas la fonction nulle.
4) f est paire.
5) f est inférieure à g.
6) f n'est pas inférieure à g.

Exercice 7. Donner les interprétations des propriétés P, Q et R (par exemple P = Vrai ; Q = Faux ; R = Faux) qui rendent fausses les formules suivantes

1- $R \wedge \neg P \Rightarrow (Q \vee (R \Rightarrow P))$
2- $(Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)) \vee \neg R \vee P$

Exercice 8. 1 - Préciser, en utilisant la méthode des tables de vérité, si les formules suivantes sont des tautologies, des contradictions, ou des propositions simplement satisfaisables. On cherchera à limiter au maximum les calculs.

1- $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

2- $P \vee \neg(P \wedge Q)$

3- $\neg P \Rightarrow (P \wedge Q)$

4- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

5- $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Exercice 9. Préciser, en utilisant la méthode des tables de vérité, quelles sont les expressions, parmi les formules suivantes, qui sont des tautologies. On cherchera à limiter au maximum les calculs.

1- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$

2- $P \wedge Q \wedge R \Rightarrow P \vee Q$

3- $\big(P \Leftrightarrow (Q \vee R)\big) \Rightarrow \big(\neg Q \Rightarrow P \vee R\big)$

Exercice 10. Le connecteur NAND (non-et) est défini par : $p\text{NAND}q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. Donner sa table de vérité. Correspond-il à un ensemble ?
Que peut-on dire de pNANDp ? Peut-on définir les 3 connecteurs principaux en fonction uniquement du NAND ?
Le connecteur NOR (non-ou) est défini par $\neg(p \vee q)$. Donner sa table de vérité. Correspond-il à un ensemble ?
Peut-on définir les 3 connecteurs principaux en fonction uniquement du NOR ?

Remarque : Le connecteur NAND est aussi noté $\uparrow$. Cet opérateur est de première importance en informatique et en électronique, puisqu'il permet à lui seul de représenter l'ensemble des fonctions logiques nécessaire à la mise en œuvre des circuits des ordinateurs.

Exercice 11. Traduire en langage mathématique, en utilisant les quantificateurs existentiel et universel, les phrases suivantes :

(i) Tout nombre réel positif inférieur à 1 vérifie $x^2 \leq x$.

(ii) Pour tout x réel, il existe n entier naturel strictement supérieur à x.

(iii) Entre deux nombres réels distincts, on peut trouver un nombre rationnel.

Exercice 12. Dire qu'une suite $(u_n)_n$ de réels est bornée signifie intuitivement qu'on peut trouver un nombre M tel que tous les éléments de la suite lui restent inférieurs en valeur absolue. Mathématiquement, cela s'écrit : $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
Nier cette proposition.

Exercice 13. Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x. Intuitivement, cette fonction admet une limite réelle l en un point x_o de D_f si quand x se rapproche aussi près que possible de x_0 (mais sans l'atteindre), f(x) se rapproche de l et on peut rendre f(x) aussi proche que l'on veut de l à la seule condition de rendre x proche de x_0. Si de plus $l = f(x_o)$, on dit que f est continue en x_0. Mathématiquement, la continuité en x_0 se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

Nier cette proposition qui signifiera que f est discontinue en x_0.

Exercice 14. Dire qu'une suite $(u_n)_n$ admet une limite réelle l signifie mathématiquement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n>N_0 \Rightarrow |u_n-l| <\varepsilon$$

Nier cette proposition.

Exercice 15. Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x. On dit que f est une fonction croissante si pour tout x et x' appartenant à D_f, si $x > x'$ alors $f(x) \geq f(x')$.
Écrire mathématiquement que f est une fonction croissante. Nier cette proposition.

Exercice 16. Une application f de E dans F est dite surjective si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E.
Écrire mathématiquement que l'application f est une surjection. Nier cette proposition.

Exercice 17. Traduire en français :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x \geq y$.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ xy=z$.
(iii) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |x| \leq n$.
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \exists y \in \mathbb{R}^+\ \forall z \in \mathbb{R}\ xy> z$.

Exercice 18. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire les négations des propositions suivantes :

1- Pour tout $x>2$, $f(x)<1$.
2- Il existe x réel positif tel que $f(x)<0$.
3- Si x est élément de [3, 4], alors $f(x)<4x^2$.

Exercice 19. Dire si les affirmations suivantes sont vraies puis écrire leurs négations.

a- $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$
b- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$
c- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$
d- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$

Solution de l'exercice 5:

Commençons par introduire les notations.

On note R la propriété l'objet est rare et par C la propriété l'objet est cher.

Les deux affirmations précédentes s'écrivent alors sous la forme :

1. $R \Rightarrow C \left(\Leftrightarrow \neg R \vee C \right)$
2. $C \Rightarrow \neg R \left(\Leftrightarrow \neg C \vee \neg R \right)$

Ecrivons maintenant la table de vérité des ces deux propositions :

R	C	$\neg R$	$R \Rightarrow C$	$C \Rightarrow \neg R$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

On remarque ainsi que les deux affirmations précédentes peuvent être vraies simultanément, donc cet ensemble est satisfaisable.

Les deux annexes qui suivent sont destinées à des étudiants qui s'intéresseraient aux fondements des mathématiques.

Annexe 1 :
Ensembles dénombrables et non dénombrables

1- On pourrait penser qu'il n'y a que deux types d'ensembles, les ensembles finis et les ensembles infinis, ces derniers étant tous de même nature. Cette vision a été mise en défaut par Georg Cantor (1845 -1918). Ses travaux sont à la base de la théorie des ensembles au XX^{eme} siècle. Il définit plusieurs types d'infinis.

Un ensemble infini est en bijection avec l'une de ses parties strictes. Par exemple, $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$, au moyen de la bijection suivante : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $n \mapsto n+1$.

Soit plusieurs ensembles infinis, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,et $\mathbb{R}$. Sont-ils en bijection les uns avec les autres ? On prouvera que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont effectivement en bijection, mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{R}$. Les premiers sont dits dénombrables.

Galilée a bien remarqué que les termes "autant d'éléments", "moins d'éléments" ou "plus d'éléments" ne peuvent s'appliquer sans paradoxe aux ensembles infinis. Le terme bijection n'était pas encore inventé, mais Galilée a mis en évidence une bijection entre $\mathbb{N}$ et une partie stricte de $\mathbb{N}$:

1 2 3 4 .. . n ...
1 4 9 16 ... n^2 ...

2- Deux ensembles en bijection sont dits équipotents. S'ils sont finis, cela signifie simplement qu'ils ont le même nombre d'éléments. Soit E un ensemble quelconque, et $\mathcal{P}(E)$ l`ensemble de ses parties. Alors E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents. Cela est évident si E est fini, à n éléments, puisque alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments, et pour tout n, $2^n > n$. Mais cette propriété reste vraie si E est infini. Il faut prouver qu'il ne peut exister de bijection f entre E et $\mathcal{P}(E)$. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une telle bijection f :

$f : E \to \mathcal{P}(E)$, $x \mapsto f(x)$

A tout élément x de E, f associe f(x), élément de $\mathcal{P}(E)$, autrement dit, f(x) est une partie de E. Considérons maintenant la partie A de E définie de la façon suivante :

$A = \{x \in E \;/\; x \notin f(x)\}$

Par définition de A, on a l'équivalence: $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Puisque f est une bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$, et que A étant une partie de E est un élément de $\mathcal{P}(E)$, A possède un antécédent unique par f, a. On a donc f(a) = A. On se pose alors la question suivante: a-t-on $a \in f(a)$? Or

$a \in f(a) \Leftrightarrow a \in A$ car f(a) = A

$\Leftrightarrow a \notin f(a)$ par définition de l'appartenance à A

Ainsi la proposition $a \in f(a)$ est équivalente à sa négation. La contradiction ne peut être levée qu'en rejetant l'hypothèse de l'existence de f.

Cette démonstration assure l'existence d'ensembles non dénombrables, c'est-à-dire qui ne sont pas en bijection avec $\mathbb{N}$, par exemple $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On conçoit même une hiérarchie infinie d'espaces $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, …

3- $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini. Si E est un ensemble quelconque, alors ou bien E est fini, ou bien il est dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$), ou bien il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E mais pas de bijection (exemples: E = $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ou E = $\mathbb{R}$). Un ensemble dénombrable, étant en bijection avec $\mathbb{N}$, peut s'écrire sous la forme $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$; la bijection est l'application $f : \mathbb{N} \to E,\ n \mapsto x_n$. Un ensemble dénombrable se reconnaît à ce q u'on peut énumérer ses éléments.

Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable, toute image d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Ainsi $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Voici une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \frac{n}{2} \text{ si n est pair et } -\frac{n+1}{2} \text{ si n est impair}$$

Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Ainsi $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Il suffit d'énumérer ses éléments dans l'ordre suivant :

1 (0,0)				
2 (1,0)	3 (0,1)			
4 (2,0)	5 (1,1)	6 (0,2)		
7 (3,0)	8 (2,1)	9 (1,2)	10 (0,3)	
11 (4,0)	12 (3,1)	13 (2,2)	14 (1,3)	15 (0,4)
…				
$\frac{n(n-1)}{2}+1$ (n-1,0)	... ... (n-2,1)	(n-3,2) ...		$\frac{n(n+1)}{2}$ (0,n-1)

En particulier $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet $\mathbb{Q}^+$ peut s'injecter dans $\mathbb{N}^2$ au moyen d'une application du type $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$.

4- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. S'il l'était, il en serait de même de [0,1[. Considérons alors une énumération $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de [0,1 [, obtenue au moyen d'une bijection $f : \mathbb{N}^* \to [0,1[$, $n \mapsto x_n$, et considérons le développement décimal des x_n.

$x_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1p}...$
$x_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2p}...$
...
$x_n = 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{np}...$
…

a_{np} est le $p^{\text{ème}}$ chiffre de la décomposition décimale de x_n. C'est un élément de {0,1,...,9}. Considérons maintenant l'élément y de]0,1[défini de la façon suivante :
$y = 0,b_1b_2b_3...b_p...$
où $b_p= 0$ si $a_{pp} \neq 0$ et bp=1 si $a_{pp}=0$.

On obtient le développement décimal d'un réel distinct de tous les x_n. En effet, le $n^{\text{ème}}$ chiffre de x_n et y sont différents ($\forall$ n, $b_n \neq a_{nn}$). Par ailleurs, il est évident que y appartient à [0,1[. Cela est contradictoire avec le fait que f soit bijective, puisque alors, tout élément de [0,1[serait de la forme d'un des x_n. Cette démonstration est connue sous le nom de *diagonalisation de Cantor*.

On peut prouver que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, et que les trois ensembles suivants sont équipotents: $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et $C^0(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

5- Signalons également une question étonnante. Peut-on trouver un ensemble E compris entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, mais qui ne soit équipotent ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{R}$? On aurait seulement des injections de $\mathbb{N}$ dans E et de E dans $\mathbb{R}$. Rappelons que $\mathbb{Q}$,ne répond pas à la question puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. On a prouvé qu'il était impossible de répondre à cette question. Cela ne signifie pas qu'on n'ait pas encore trouvé si cette propriété était vraie ou fausse, mais bel et bien qu'on ne peut ni prouver qu'elle est vraie, ni prouver qu'elle est fausse. Elle est dite indécidable. Elle ne découle pas des axiomes de la théorie des ensembles, pas plus que sa négation. Cela signifie également qu'on peut prendre comme axiome supplémentaire l'existence d'un tel ensemble E sans apporter de contradiction à l'édifice des Mathématiques, ou au contraire, de prendre comme axiome la non-existence de E. Dans ce dernier cas, on adopte ce qu'on appelle l'hypothèse du continu. L'un ou l'autre choix conduit donc à deux théories mathématiques différentes.

Ces considérations n'ont aucune importance en ce qui nous concerne, car nous n'utiliserons jamais cette propriété, ni sa négation.

6- Donnons enfin une conséquence curieuse de ce qui précède en informatique. On peut montrer que l'ensemble de tous les algorithmes possibles est dénombrable, alors que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{R}$. Il y a donc des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne sont calculables par aucun ordinateur. Aucun algorithme ne permet de les calculer. De telles fonctions ont été explicitement définies.

Annexe 2 :
Axiomes

Qu'est-ce qu'un axiome ?
D'Alembert écrit, dans son Encyclopédie (1788) :

Axiome : En Mathématiques, on appelle axiomes des propositions évidentes par elles-mêmes, et qui n'ont pas besoin de démonstrations. Telles sont les propositions suivantes :le tout est plus grand que la partie ; si à deux grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront égales ; si deux figures étant appliquées l'une sur l'autre se couvrent parfaitement, ces deux figures sont égales en tout.

Théorème : C'est une proposition qui énonce et démontre une vérité.

Notre conception moderne des axiomes ne correspond plus à des notions évidentes par elles-mêmes ou des principes très clairs. On fait actuellement reposer une théorie mathématique sur des notions primitives (non définies) et les axiomes ne servent qu'à décrire les règles d'utilisation de ces notions primitives. Voici des exemples modernes d'axiomes et de notions primitives :

i) La notion d'ensemble et d'appartenance est une notion primitive. On ne cherchera à définir ni rune ni l'autre.

ii) Frege, en 1893, avait proposé comme axiome le suivant : ϕ étant un prédicat quelconque, il existe un ensemble A tel que, pour tout x, x appartient à A si et seulement si $\phi(x)$ est vrai. Russel, en 1902, proposa de prendre comme prédicat : $\phi(x) \Leftrightarrow x \notin x$. D'après Frege, il existe alors un ensemble A tel que :

$$\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \notin x$$

Cette équivalence est vraie en particulier lorsque x = A, ce qui donne :

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$$

Ce qui contradictoire. Cet exemple prouve qu'on ne peut pas prendre n'importe quoi pour axiome, en particulier en ce qui concerne la construction des ensembles. Voici quelques axiomes actuellement en vigueur.

- La réunion d'une famille d'ensemble (indicée par un ensemble) est un ensemble.
- La famille constituée des parties d'un ensemble est un ensemble.
- Il existe un ensemble infini.
- Le $5^{\text{éme}}$ postulat d'Euclide : par un point donné, il passe une parallèle à une droite donnée et une seule.
- L'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Un axiome contesté, l'axiome du choix
Considérons la proposition suivante :
Soit f une application injective de E dans F. Alors il existe une application surjective g de F dans E telle que $g \circ f = Id$.

Démonstration :
Soit a un élément quelconque de E. On pose :

i) si y appartient à f(E), g(y) = x où x est l'unique élément tel que y=f (x).

ii) si y n'appartient pas à f(E), on pose g(y) = a.

On alors g surjective et $g \circ f = Id$.

Considérons maintenant la proposition suivante :
Soit f une application surjective de E dans F. Alors il existe une application injective g de F dans E telle que $f \circ g = Id$.

Démonstration
Pour tout y de F, $f^{1}(\{ y\})$ est non vide. Soit g(y) un élément de cette partie. Alors g est injective et $f \circ g = Id$.

Il y a une différence fondamentale entre ces deux démonstrations. La première ne fait appel qu'au choix arbitraire d'un unique élément a, alors que la seconde fait appel au choix simultané et arbitraire d'un nombre quelconque et éventuellement infini d'éléments g(y). La possibilité d'un tel choix a été vivement contesté au début de ce siècle et nécessite un axiome : *l'axiome du choix*. Ce dernier est également lié à la question de munir un ensemble d'un « bon ordre » ; un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément. Un exemple typique d'ensemble bien ordonné est $\mathbb{N}$. Par contre, $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné avec l'ordre usuel. Cantor pensait que tout ensemble pouvait être muni d'un bon ordre, et la nécessité d'une démonstration s'est posé. On se demande en effet comment munir par exemple $\mathbb{R}$ d'un bon ordre. Au début du siècle, un mathématicien pensa avoir montre l'impossibilité de munir $\mathbb{R}$ d'un bon ordre. Mais Zermelo prouva le contraire en utilisant pour la première fois ce qui allait devenir l'axiome du choix :

> Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides, indicée par un ensemble I quelconque et soit A la réunion des A_i. Alors il existe une application f de I dans A telle que :
> $$\forall i \in I,\ f(i) \in A_i$$

La fonction f permet de choisir un élément noté f(i) dans chaque A_i. D'autres formulations équivalentes sont possibles. Par exemple, le produit $\prod_{i\in I} A_i$ est non vide.

On montre que cet axiome permet de munir $\mathbb{R}$ d'un bon ordre, sans qu'on puisse cependant l'expliciter, et ceci choqua bon nombre de mathématiciens qui le rejetèrent. Cependant, d'autres théorèmes, dont les énoncés paraissaient vraisemblables à la communauté mathématique nécessitent l'axiome du choix. En voici quelques-uns :

- Soit E et F deux ensembles. Alors ou bien il existe une injection de E dans F ou bien il existe une injection de F dans E. (Théorème de Cantor, équivalent à l'axiome du choix)
- Soit E un espace vectoriel. Alors il existe une base sur E.
- Tout ensemble inductif admet un élément maximal. (Un ensemble est inductif si toute partie totalement ordonnée est majorée). (Théorème de Zorn, équivalent à l'axiome du choix).

Certains résultats cependant sont prouvés au moyen de l'axiome du choix et fortement contraires à l'intuition :

- Lebesgue a développé une théorie de l'intégration très puissante. Toutes les fonctions usuelles sont mesurables au sens de Lebesgue. Les seuls exemples non mesurables qui ont été découverts nécessitent l'axiome du choix.

- La sphère unité peut être décomposée en quatre parties isométriques A, B, C, D avec D également isométrique à $A \bigcup B$. (D est donc à la fois le quart et le tiers de la sphère). (Théorème de Hausdorf, extrêmement choquant).

- Dans le même ordre d'idée, deux ensembles bornés quelconques de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur non vide peuvent être partitionnés en deux familles finies respectives (A_i) et (B_i) de façon que A_i soit isométrique à B_i. (Théorème de Banach-Tarski).

- Il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, avec f différente des fonctions linéaires $x \mapsto ax$. Cependant aucune de ces fonctions ne peut être explicitée.

Alors, pour ou contre l'axiome du choix ?

Chapitre 3

LA DEMONSTRATION EN MATHEMATIQUE

Un peu de vocabulaire

Rappelons que l'on appelle *conjecture*, toute assertion (proposition) que l'on considère comme vraie mais que l'on ne sait pas prouver dans l'état actuel de la connaissance. Du latin *cum* = *avec*, *ensemble* et *jacere* = *jeter* : émettre, avancer des idées formant un tout. Ne pas confondre avec conjoncture provenant de *jungere* = *joindre* : conjonction (précisément!) d'événements divers aboutissant à une situation présente. Mais on peut se perdre en conjectures à propos de la conjoncture...

Si une conjecture est prouvée, elle devient un *théorème*, du grec *theôrein* = *examiner* et *theôrêma* = *objet de contemplation*, *objet d'étude* et, par extension : proposition dont on peut apporter la preuve. Par proposition, on entend souvent un théorème de moindre importance. Enfin, un lemme (du grec *lêmma* = *argument*, *prémisse* et aussi *ce que l'on prend*) est un résultat (théorème) préliminaire facilitant la preuve d'un théorème difficile à établir.

1. La théorie mathématique

Démarche *hypothético-déductive*.

2. Les principales méthodes de démonstration

a) Raisonnement direct (ou par hypothèse auxiliaire ou par déduction) :

Il utilise la règle du Modus-Ponens, ou *syllogisme* :

Si H est vrai et ($H \Rightarrow C$) est vrai, alors C est vrai.

Il s'agit de la méthode la plus usitée. Elle a été popularisé par :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Remarque : Un *sophisme* est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité.
Exemple classique : Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.

b) Raisonnement par contraposée

II utilise la régie du modus-tollens : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Exemples : Démontrer qu'étant donné un entier n, si n^2 est impair, alors n est impair.
Démontrer qu'étant donné un entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

c) Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on suppose son contraire vrai et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.

Exemple : Montrer que :

- La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

d) Raisonnement par récurrence

Pour prouver que P(n) est vraie pour tout entier n supérieur à n_0, il suffit d'établir :

1- $P(n_0)$ vraie (on dit que la propriété est *fondée*)

2- Soit i un entier naturel supérieur à n_0. P(i) vraie implique P(i+1) vraie (on dit que la propriété est *héréditaire*)

La récurrence ainsi présentée est la récurrence *simple*.

Nous verrons dans la suite du cours la récurrence *forte* où nous raisonnons sur plusieurs rangs, voir jusqu'à un certain rang. Dans ce cas, nous modifierons la fondation et l'hérédité. Par exemple, pour une récurrence double, le raisonnement est le suivant :

On montre les propriétés :

1- $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ vraies

2- Soit i un entier naturel supérieur à n_0. P(i) et P(i+1) vraies implique P(i+2) vraie

On en déduit que P(n) est vraie pour tout entier supérieur à n_0.

Voir en exercice un exemple de récurrence forte.

Exemple : Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

Réponse : Soit $n \geq 4$.

Notons $P(n)$ la propriété $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Initialisation :

Pour n=4, on a $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1+8+27+64 = 100$

D'autre part, $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = (1+2+3+4)^2 = 10^2 = 100$

D'où $P(4)$ vraie.

Hérédité :

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Supposons $P(n)$ alors :

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+...+n)^2 + (n+1)^3$

Or on sait que $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On a donc :

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+\left(n+1\right)^3=\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^2+\left(n+1\right)^3=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}+\left(n+1\right)^3$$

$$=\left(n+1\right)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=\left(n+1\right)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=\left(n+1\right)^2\left(\frac{\left(n+2\right)^2}{4}\right)=\left(\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}\right)^2$$

$$=\left(1+2+\ldots+n+\left(n+1\right)\right)^2$$

D'où $P\left(n+1\right)$ vraie.

On en conclut par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

e) Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer que la propriété $\forall x\ P(x)$ est fausse, il suffit de donner un exemple où $P(x)$ est fausse.

f) Raisonnement par analyse-synthèse

Exemple : Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Analyse On suppose le problème résolu. Il existe donc une fonction p paire et une fonction i impaire telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x) + i(x)$,

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$.

On a alors nécessairement : $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse : On vérifie que les candidats obtenus conviennent. Si l'on pose

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, alors p et i ont les propriétés voulues.

3. Condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante

a) Condition nécessaire (CN), suffisante (CS)

Soient P et Q deux propositions telles que l'implication $P \Rightarrow Q$ soit vraie.
P est une **condition suffisante** de Q.
Q est une **condition nécessaire** de P.

b) Condition nécessaire et suffisante (CNS)

Soient P et Q deux propositions.
Dire que P est une **condition nécessaire et suffisante** de Q signifie que l'on a : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$; on a donc $P \Leftrightarrow Q$.

Remarque : Les notions définies dans ce paragraphe sont souvent source de confusion. Cette confusion est entre autre due au mauvais emploi de l'expression « il faut » en langage naturel.

En effet, très souvent, on utilise l'expression « il faut » au lieu de l'expression « il suffit ».
Par exemple : *pour dîner ce soir, il faut aller faire des courses d'alimentation*. Alors que la bonne expression est : *pour dîner ce soir, il suffit aller faire des courses d'alimentation*. On peut très bien dîner sans aller faire des courses, par exemple, en allant au restaurant… Le contexte dans la vie courante permet de lever cette erreur. En mathématiques, ce ne sera pas le cas. Il **faut**, lors d'un raisonnement, d'une rédaction, faire attention à l'expression utilisée (« Il faut » ou « il suffit ») sinon il y a confusion entre hypothèse et conclusion…
J'espère que cette mise en garde **suffit**…

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Montrer en trouvant un contre-exemple que les assertions suivantes sont fausses :

1. Si un entier n est divisible par 2, il est divisible par 4.
2. Tous les polynômes de degré 2 ont deux racines réelles.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- 6 est un contre-exemple.
2- X^2+1 est un contre-exemple.

EXERCICES

Exercice 1. Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, la propriété :
Il n'existe pas de réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = ax^2+bx+c$

Exercice 2. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que : si $x \neq y$, alors $x-\sqrt{y} \neq y-\sqrt{x}$.

Exercice 3. Soit x un nombre réel. Montrer le théorème : $(\forall \varepsilon>0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x=0$.

Exercice 4. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto 3x - 1$ est injective.

Exercice 5. Montrer que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n \geq n$.

Exercice 7. On considère un nombre réel x tel que $x > -1$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Inégalité de Bernoulli)

Exercice 8. Montrer que pour tout entier n supérieur à 2 :

- $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$
- $2+4+6+\ldots+2n=n^2+n$

Exercice 9. Soient n, m deux entiers naturels, $m \neq 0$. On appelle division euclidienne de n par m tout couple (q, r) d'entiers naturels tels que $n = mq + r$, avec $r \in \{0,1,...,m-1\}$.

(i) Soit P(n) la propriété : pour tout $m \geq 1$ il existe (q, r) entiers naturels tels que $n=mq + r$, avec $r \in \{0,1,... , m-1\}$. Montrer P(n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que le couple (p, q) est unique.

Exercice 10. Critiquer le raisonnement suivant :
Montrons que n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite.
Ceci est vrai pour n = 1, et même pour n = 2.
Supposons que n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite (hypothèse de récurrence) et considérons n + 1 points du plan $A_1, A_2,\ldots, A_n, A_{n+1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2,\ldots, A_n$ sont alignés sur une droite D et les n points $A_2,\ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D' ; mais comme les points A_2 et A_3 sont communs à D et D', D = D' et les n + 1 points $A_1, A_2,\ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur D=D', ce qui achève la récurrence.

Exercice 11. Soit $(P_n)_n$ la famille de polynômes définie par :
$P_0=1$, $P_1=X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}=XP_n-nP_{n-1}$
Montrer que : pour tout entier naturel non nul, $P_n' = nP_{n-1}$.

Exercice 12. La condition de continuité d'une fonction f en x_0 est-elle une condition nécessaire, une condition suffisante ou les deux pour qu'elle soit dérivable en x_0 ?

Exercice 13. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n=\sum_{i=0}^{n} u_i$. Montrer qu'une condition nécessaire pour que la suite $(S_n)_n$ admette une limite est $\lim u_n=0$. Est-ce une condition suffisante ?

Quelques exercices corrigés

Exercice 14. Montrer que si une fonction f admet une limite λ lorsque x tend vers x_0, cette limite est unique.

Corrigé : Commençons par donner la définition d'une limite :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \le \varepsilon$$

On raisonne par l'absurde.
Pour cela, on suppose qu'il existe $\tilde{\lambda}$ différent de λ tel que f tend aussi vers $\tilde{\lambda}$ en x_0.
Par définition, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{\delta} > 0\ \forall x \in D_f\ |x - x_0| \le \tilde{\delta} \Rightarrow |f(x) - \tilde{\lambda}| \le \varepsilon$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ quelconque.
Choisissons δ et $\tilde{\delta}$ comme précédemment, et posons $\beta = \min(\delta, \tilde{\delta})$.
On a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \le |\lambda - f(x)| + |f(x) - \tilde{\lambda}|$$

Mais en choisissant x tel que $|x - x_0| \le \beta$, on obtient :

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \le \varepsilon + \varepsilon \le 2\varepsilon$$

On vient donc de prouver que : $\forall \varepsilon > 0\ |\lambda - \tilde{\lambda}| \le \varepsilon$

Mais d'après un exercice du chapitre précédent, on a vu que cela impliquait que $|\lambda - \tilde{\lambda}| = 0$ soit $\lambda = \tilde{\lambda}$
Ceci contredit notre hypothèse, d'où le résultat.

Exercice 15. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. La convergence de chacune de ces suites est-elle une condition nécessaire (suffisante ou les deux) pour que la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n=u_n+v_n$ soit elle aussi convergente ?

Corrigé : 1- C'est une CS : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent $\Rightarrow (w_n)_n$ converge
En effet, supposons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers respectivement l_u et l_v alors :
$\forall \varepsilon > 0, \exists (N_u, N_v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ \ (n \ge N_u) \Rightarrow |u_n - l_u| < \varepsilon$ et $(n \ge N_v) \Rightarrow |v_n - l_v| < \varepsilon$
Soit alors $\varepsilon > 0$ et posons $N = \max(N_u, N_v)$.
Alors $|w_n - (l_u + l_v)| = |u_n + v_n - (l_u + l_v)| = |u_n - l_u + v_n - l_v| \le |u_n - l_u| + |v_n - l_v| \le \varepsilon + \varepsilon$
Donc $(w_n)_n$ converge vers $l_u + l_v$.
2- Par contre, ce n'est pas une CN : $\neg\big((w_n)_n \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \text{ convergent}\big)$.
Considérons par exemple $u_n = -v_n = \sin(n)$.
Il est clair que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne convergent pas.
Par contre, $(w_n)_n$ (qui est la suite nulle) converge évidemment vers 0.
En particulier, ce n'est pas une CNS.

Chapitre 4

FONCTIONS - APPLICATIONS - BIJECTIONS

0. Présentation

Le concept de *relation* est la base de toute *la mathématique* dont le but est d'étudier - par observation & déduction (raisonnement), calcul & comparaison - des configurations abstraites ou concrètes de ses objets (nombres, formes, structures) en cherchant à établir les liens logiques, numériques ou conceptuels entre ces objets.

Considérons deux ensembles non vides E et F. Si à certains éléments de E on peut associer par une règle précise R (non ambiguë) un élément y de F, on définit ainsi une *relation* de E vers F dite *binaire* car faisant intervenir deux éléments. On écrit :

$$R : E \mapsto F \quad \text{et} \quad x \, R \, y$$

- Lorsque E = F, on parle de relation binaire *dans E*.
- Si x R y, on dit que y est une *image* de x *par la relation* R et que x est un *antécédent* de y par cette même relation;
- L'ensemble des couples (x,y) tels que x R y soit une assertion vraie est appelé *graphe* de la relation R. C'est une partie du produit cartésien E x F. On peut représenter ces couples dans un repère (O,Ox,Oy) : on parle alors de *représentation graphique* de la relation R.
- Lorsque cela se peut, la relation R', de F vers E, définie par xR'y si et seulement si yRx, est dite réciproque de R. On la note souvent R^{-1} par analogie avec la notion élémentaire de puissance
- L'ensemble D des éléments de E qui ont au moins une image par R est *l'ensemble de définition* de R.
- Lorsque chaque élément de E possède au plus une image (aucune ou une seule), on dit que R est une *fonction*.

Lorsqu'une relation R est une fonction, on note y=R(x), plutôt que x R y, l'unique image de x par R si cette image existe.

Cette notation *fonctionnelle* est due à **Leibniz** (Allemand, 1646-1716).

1. Fonctions, applications

a) Fonction

Soient A et B deux ensembles. On appelle **fonction** de A vers B tout mode de correspondance qui à tout élément de A associe **au plus** un élément de B.
Notion d'**image** et d'**antécédent**.

L'ensemble des éléments de A qui ont une image par la fonction f constitue l'**ensemble de définition** de f (parfois noté D_f).

Soit D une partie de A. L'ensemble des images des éléments de D par la fonction f se note f(D).

$$f(D)=\{y\in B \;/\; \exists x\in D, y=f(x)\}$$

f(D) est l'image (directe) de D par f.

Soit E une partie de B. L'ensemble des antécédents des éléments de E par la fonction f se note $f^{-1}(E)$.

$$f^{-1}(E)=\{x\in A \;/\; \exists y\in E, y=f(x)\}$$

$f^{-1}(E)$ est l'image réciproque de E par f.

Attention : Pour tout fonction f de A vers B, nous pouvons définir $f^{-1}(E)$ pour E sous-ensemble de B, que f soit bijective ou non. Nous n'avons pas, dans la définition de $f^{-1}(E)$, utiliser f^{-1}…

Notion de **restriction** et de **prolongement**.

b) Application

Soient A et B deux ensembles. On appelle **application** de A vers B une fonction de A vers B qui à tout élément de A associe **un** *(unique)* élément de B.

Une application de A vers B est donc une fonction de A vers B dont le domaine de définition est A.

2. Composition de fonctions

1- Soient A, B, C trois ensembles. Soit f une fonction de A vers B et g une fonction de B vers C. On définit la fonction $h=g\circ f$ de A vers C par :

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]$$

2- La composition est associative, non commutative.

3. Injection, Surjection, bijection

Soit f une **application** de A vers B.

1- Injection

f est dite **injective** de A vers B lorsque tout élément de B admet **au plus** un antécédent dans A par f.

Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\forall\left(x_1,x_2\right)\in A^2,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

2- Surjection

f est dite **surjective** de A vers B lorsque tout élément de B admet **au moins** un antécédent dans A par f.

Mathématiquement, cela se traduit par l'une des propriétés équivalentes :

1- $\forall y\in B,\ \exists x\in A,\ y=f(x)$

2- $f(A)=B$

3- Bijection

f est dite **bijective** de A vers B lorsqu'elle est à la fois injective et surjective. Cela signifie que tout élément de B admet **un unique** un antécédent dans A par f.

Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\forall y\in B,\ \exists! x\in A,\ y=f(x)$$

4- Bijection réciproque

Soit f une bijection de A vers B. Il existe donc une bijection réciproque de B vers A notée f^{-1}.

Remarque : la notation f^{-1} a été choisis par analogie avec l'inverse des réels. Attention à ne pas confondre bijection réciproque f^{-1} (lorsqu'elle existe) et fonction inverse $\frac{1}{f}$ (lorsqu'elle existe).

Avec les notations ci-dessus, nous avons :

$$f^{-1}\circ f=Id_A\ \text{ et }\ f\circ f^{-1}=Id_B$$

c'est-à-dire :

$$\forall x\in A,\ f^{-1}(f(x))=x\ \text{ et }\ \forall x\in B,\ f(f^{-1}(x))=x$$

Attention : dans les formules précédentes, x représente une fois un élément de B, une fois un élément de A…

Exemples :

1- avec la fonction ln bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$

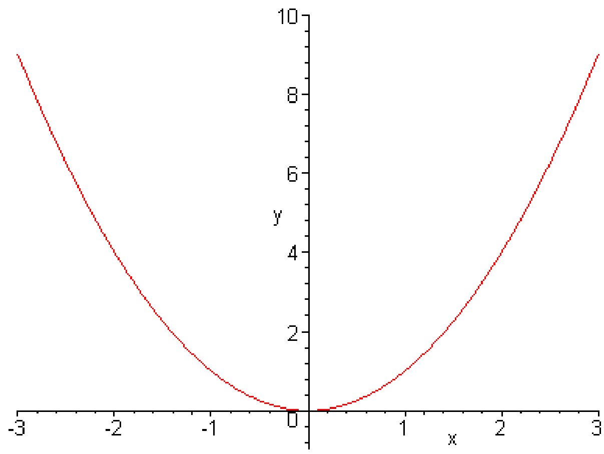
2- avec la fonction $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

Remarque générale sur les définitions de ce chapitre : Dès que l'on utilise les notions de fonctions, applications, injections…., il est indispensable de préciser les ensembles de départ et d'arrivée.

Exemple : Soit f définie par $f(x)=x^2$. Prenez comme ensembles de départ et d'arrivée $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$…

Exemples de représentation graphique, avec des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, des notions d'injection, surjection et bijection :

1- Avec la fonction $x\mapsto x^2$



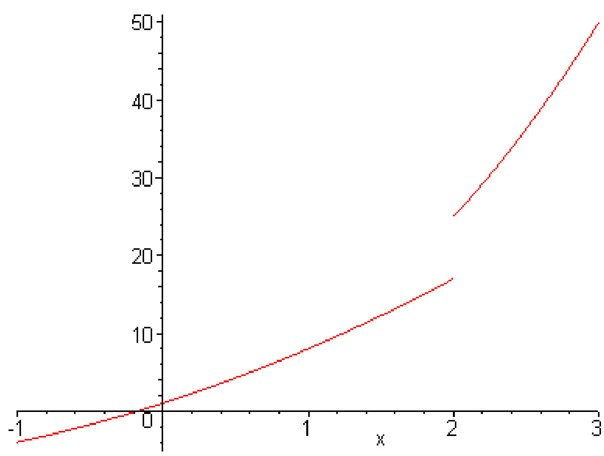
a- de [-3,3] dans [0,9], f est une surjection non injective.

b- de [-3,3] dans $\mathbb{R}$, f n'est ni une surjection ni une injection.

c- de [0,3] dans $\mathbb{R}$, f est une injection non surjective

d- de [0,3] dans [0,9], f est une bijection.

2- Avec la fonction définie par : $\begin{cases} x^2+6x+1 & \text{si } x<2 \\ 5x^2+5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

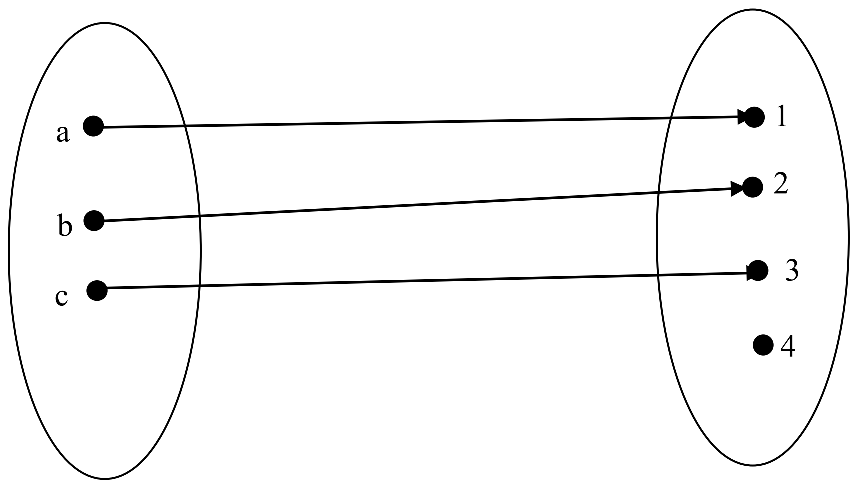


a- de [-1,3] dans [-4,50], f est une injection non surjective.

b- de [-1,3] dans [-4,17[$\cup$ [25,50], f est une bijection.

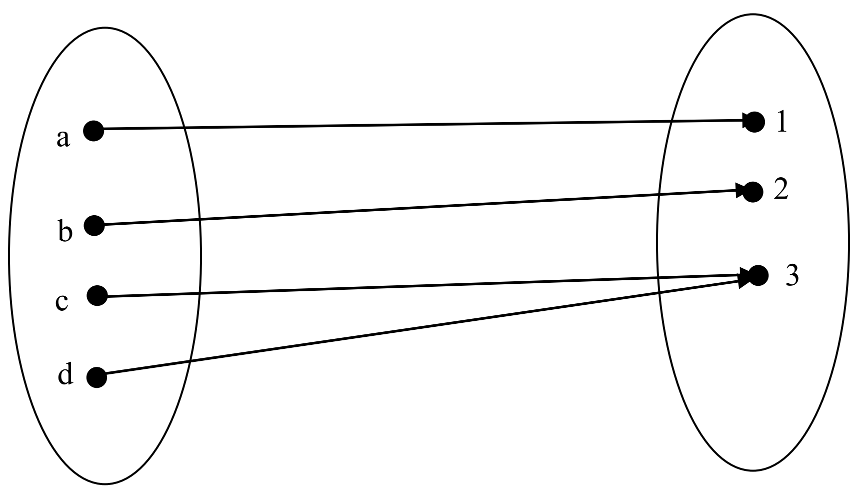
Exemples de représentation graphique, avec des fonctions diagrammes de Venn, des notions d'injection, surjection et bijection :

1- f : A $\rightarrow$ B, avec A={a,b,c} et B={1,2,3,4}



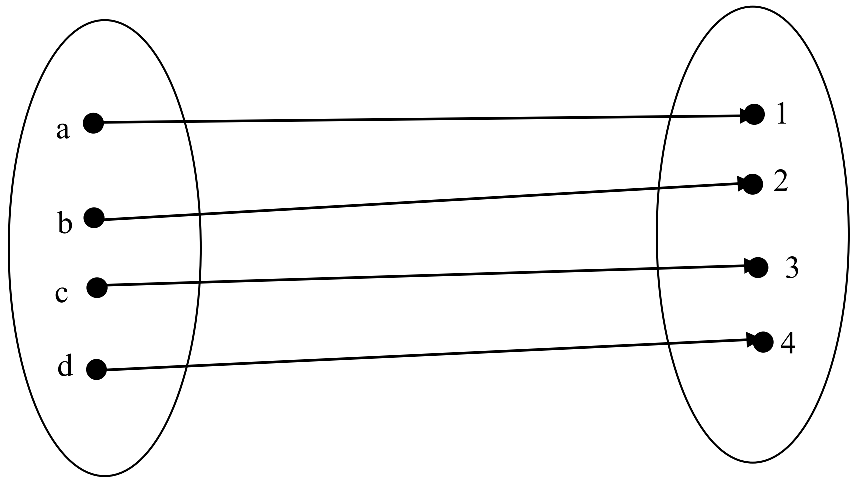
f est injective non surjective de A vers B.

2- f : A $\rightarrow$ B, avec A={a,b,c,d} et B={1,2,3}



f est surjective non injective de A vers B.

3- f : $A \to B$, avec A={a,b,c,d} et B={1,2,3,4}



f est bijective de A vers B.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- Dire si les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des applications, sinon, définir l'application naturellement induite, on précisera alors si elle est injective, surjective ou bijective.

$$x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto \cos(x),\ x \mapsto \tan^2(x)+1,\ x \mapsto \begin{cases} \ln\left(|x-1|\right) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2- Donner dans chacun des cas précédents, un ensemble I tel que f restreint à I soit injective.

3- Donner dans chacun des cas précédents, un ensemble J tel que f est surjective de son domaine de définition vers J.

Exercice 2. Soient E, F et G trois ensembles. Considérons deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si f et g sont injectives (respectivement surjectives, respectivement bijectives) alors $g \circ f$ est injective (respectivement surjective, respectivement bijective).

Exercice 3. On considère des applications définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Démontrer les propositions suivantes ou donner un contre-exemple.

1. La somme de deux applications injectives est injective.
2. Le produit de deux applications injectives est injectif.
3. La somme de deux applications surjectives est surjective.
4. Le produit de deux applications surjectives est surjectif.
5. Si f est bijective et n est un entier, alors f^n est bijective.

Exercice 4. Déterminer les plus grands sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ constitue une bijection de A vers B et déterminer sa bijection réciproque.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- a- f n'est pas une application, on doit la restreindre à $\mathbb{R}^*$, dans ce cas, elle est injective mais non surjective.

b- f est une application, elle n'est ni injective ni surjective.

c- f n'est pas une application, $D_f = \bigcup_{k\in Z} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, elle n'est ni injective ni surjective.

d- f est une application, elle n'est pas injective, elle est surjective.

2 et 3- Attention, il y a plusieurs réponses possibles.

a- $J=\mathbb{R}^*$

b- $I=[0;\pi],\ J=[-1;1]$

c- $I=\bigcup_{k\in Z}\left[k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ J=[1;+\infty[$

d- $I=[1;e+1[\cup]e+1;+\infty[$

Exercice 3. Toutes ces affirmations sont fausses (trouver des contre-exemples). Par contre, l'affirmation 5 est fausse ainsi énoncée, mais elle est vraie si n est impair, (cf. exercice 2).

Exercice 4. On étudie f (dérivée, tableau de variations) et on trouve : $A=\mathbb{R}^*$ et $B=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$. Pour $y\in B,\ f^{-1}(y)=\ln\left(\frac{2+y}{y-1}\right)$.

EXERCICES

Exercice 1. Tracer le graphe d'une fonction :

a- ni injective ni surjective
b- injective et non surjective
c- surjective et non bijective
d- injective et surjective

Exercice 2. Soient A, B et C trois ensembles, f une application de A vers B et g une application de B vers C. Montrer que :
a- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective. La réciproque est-elle vraie ?
b- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
c- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soient A et B deux sous-ensembles de E.

(i) Montrer que $f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$.
(ii) A-t-on $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$?
(iii) A-t-on $f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B)$?
(iv) On suppose de plus f surjective de E sur F. A-t-on $\overline{f(A)}=f(\overline{A})$?

Exercice 4. Soit une application $f : E \rightarrow F$ et soient A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et que l'on a égalité si f est injective.

Exercice 5. 1- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=sin(x). Donner f(A) pour $A=\left[-\frac{\pi}{2},0\right[$, pour $A=\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$, pour $A=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Donner $f^{-1}(B)$ pour $B=[2,+\infty[$, pour $B=\left]-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, pour $B=\mathbb{R}^*$.

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soient G et H deux sous-ensembles de F. On note : $f^{-1}(G) = \{x \in E / f(x) \in G\}$.
Montrer que :

(i) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$
(ii) $f^{-1}(G \cap H)=f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$
(iii) $f^{-1}(G\backslash H)= f^{-1}(G)\backslash f^{-1}(H)$
(iv) $f^{-1}(\overline{G})=\overline{f^{-1}(G)}$
(v) A-t-on $f^{-1}(f(A))=A$, pour tout A sous-ensemble de E ?
(vi) A-t-on $f(f^{-1}(G))=G$?

Exercice 7. Soit f une application de E dans F.

(i) Montrer que l'application f est injective si et seulement si, pour tout $C\subset E$, $C=f^{-1}(f(C))$.
(ii) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $A\subset F$, $f(f^{-1}(A))=A$.

Exercice 8. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f : x\mapsto\frac{x+2}{x-2}$$

est une bijection. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 9. Soient P et D deux parties de $\mathbb{C}$ définies par :

$$P=\{z\in\mathbb{C}\ /\ \mathrm{Im}(z)>0\}\ \text{ et }\ D=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z|<1\}$$

Montrer que l'application f définie par : $z\mapsto\dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Exercice 10. Soient E un ensemble et A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Soit f l'application définie sur $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$ par :

$$f\colon X\mapsto(X\cap A, X\cap B)$$

Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit injective (surjective, puis bijective) ?

Exercice 11. Soient E un ensemble et A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Soit f l'application définie sur $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$ par :

$$f\colon X\mapsto(X\cup A, X\cup B)$$

Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit injective (surjective, puis bijective) ?

Exercice 12. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E\to F$, $g : F\to G$ deux applications.

(i) Montrer que si $g\circ f$ est injective de E dans G, alors f est injective de E dans F et que si de plus f est surjective de E sur F, alors g est injective de F dans G.

(ii) Montrer que si $g\circ f$ est surjective de E sur G, alors g est surjective de F sur G et que si de plus g est injective de F dans G, alors f est surjective de E sur F.

(iii) On suppose E=G et $g\circ f=I_E$. Que peut-on dire de f et g ?

(iv) On suppose E=G, $g\circ f=I_E$ et $f\circ g=I_F$. Que peut-on dire de f et g ?

Eléments de solutions de quelques exercices.
Exercice 2.
a- Soient f et g deux applications injectives.
Soient x et y tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, ie : $g(f(x)) = g(f(y))$.
g injective implique que : $f(x) = f(y)$.
f injective implique que : $x = y$.
On en déduit que $g \circ f$ est injective.

La réciproque est fausse.
En effet, posons $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x)=x^2$.
Il est facile de vérifier que : $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et est définie par : $g \circ f(x)=x$.
Cette application est bijective.
De plus, il est clair que g n'est pas injective.

b- Soient f et g deux applications surjectives.
Soit $z \in C$.
Comme g est surjective, $\exists y \in B,\ g(y) = z$.
Comme f est surjective, $\exists x \in A,\ f(x) = y$.
Donc $\exists x \in A,\ g \circ f(x) = z$ et ainsi $g \circ f$ est surjective.

La réciproque est fausse.
On reprend l'exemple précédent.
Il est clair que f n'est pas surjective.

Exercice 3.
(iii) Soit y élément de f(A)\f(B). Donc, il existe a élément de A tel que y=f(a) et il n'existe aucun b de B tel que y=f(b). Donc, a n'est pas élément de B. D'où y est élément de f(A\B).
On obtient donc l'inclusion : $f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B)$.
L'inclusion réciproque est fausse.
Il suffit de considérer : $f : x \mapsto x^2$, A=[-1,2] et B=[-1,0].

(iv) Soit y élément de $\overline{f(A)}$. Donc, y n'est pas élément de f(A). Donc, pour tout a de A, $y \neq f(a)$. Donc, y est élément de $f(\overline{A})$ (avec f surjective de E sur F).
On obtient donc l'inclusion : $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
L'inclusion réciproque est fausse. Il suffit de considérer : $f : x \mapsto x^2$, A=[-1,2].

Exercice 4.
Soit $y \in f(A \cap B)$.
Par définition, $\exists x \in A \cap B, y = f(x)$.
En particulier, comme $A \cap B \subset A$, $\exists x \in A, y = f(x)$ et donc $y \in f(A)$.
De même, on voit clairement que $y \in f(B)$.
On en déduit donc que $y \in f(A) \cap f(B)$ et ainsi que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

L'inclusion : $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$ est fausse dans le cas général (Chercher un exemple).
Supposons maintenant que f est injective.
Par définition, cela signifie que $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$.
D'après ce q ui précède pour démontrer l'égalité, il suffit de démontrer l'inclusion $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$.
Soit alors $y\in f(A)\cap f(B)$.
Cela signifie que $y\in f(A)$ et $y\in f(B)$.
Donc $\exists a\in A, y=f(a)$ et $\exists b\in B, y=f(b)$.
Mais dans ce cas, on a $f(a)=f(b)$ et par injectivité de f, cela implique que a=b.
Ainsi $a\in A\cap B$ et comme $y=f(a)$, on en déduit que $y\in f(A\cap B)$.

Exercice 5.

(vi) Montrons que $f(f^{-1}(G))\subset G$. Soit $y\in f(f^{-1}(G))$. Il existe $x\in f^{-1}(G)$ tel que $y=f(x)$; comme $x\in f^{-1}(G)$, on a $f(x)\in G$. D'où : $y\in G$. On a ainsi démontrer que : $f(f^{-1}(A))\subset A$.
L'inclusion réciproque est fausse. Pour le montrer, il suffit de présenter un contre-exemple.
Prenons l'application $E : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec E(x)=Partie entière de x et G =[0,2].
On obtient : $f^{1}(G)=[0,3[$ et $f(f^{-1}(G))=\{0,1,2\}\neq G$.

Exercice 6.

Dans ce qui suit, f est une application de E dans F.

(i) Soit $C\subset E$ et soit x un élément de C. Alors y=f(x) est élément de f(C) et $x=f^{-1}(y)$ est élément de $f^{-1}(f(C))$. Donc, $C\subset f^{1}(f(C))$. (Remarquons que nous n'avons pas encore utiliser l'injectivité de f).

Pour l'inclusion réciproque, nous allons utiliser l'injectivité de f.
Soit x élément de $f^{-1}(f(C))$.
Alors, f(x) est élément de f(C), donc il existe x' élément de C vérifiant f(x)=f(x'), d'où x=x'. (cf. injectivité de f). Donc, x est élément de C.
Nous avons donc montrer que (f injective) $\Rightarrow$ (pour tout $C\subset E$, $C=f^{-1}(f(C))$).
Montrons l'implication réciproque.
On suppose pour tout $C\subset E$, $C=f^{-1}(f(C))$. (En fait, nous aurons besoin que de $f^{-1}(f(C))\subset C$).
Montrons que f est injective.
Soit x et x' tels que f(x)=f(x'). En prenant C={x}, $f^{-1}(f(\{x\}))$ ne contient que x. Or, x' est élément de $f^{1}(f(\{x\}))$. Donc, x=x' et donc f est injective.

(ii) Comme précédemment, une inclusion est toujours vérifiée : $f(f^{-1}(A))\subset A$. En effet, soit x élément de $f(f^{-1}(A))$.
$\exists z\in f^{-1}(A)/x=f(z)$.
Donc, z est élément de $f^{-1}(A)$, d'où x=f(z) est élément de $f^{-1}(A)$.
On a ainsi montré que $f(f^{-1}(A))\subset A$.
Supposons f est surjective. Soit A une partie de F et soit a élément de A. Il existe x élément de E tel que a=f(x). Donc, a est élément de $f(f^{-1}(A))$ car x est élément de $f^{-1}(\{a\})$.
Si $A\subset f(f^{-1}(A))$ pour toute partie A, soit y élément de F et A={y}. Comme $\{y\}\subset f(f^{-1}(\{y\})$, il existe x élément de E tel que y=f(x). Donc f est bien surjective.

Exercice 9.

1- La CNS pour que f soit injective est $A\cup B=E$. En effet, a- Supposons f injective. Alors, $f(A\bigcup B)=((A\bigcup B)\bigcap A,(A\bigcup B)\bigcap B)=(A,B)=f(E)$. Donc, $A\bigcup B=E$.

b- Supposons $A\bigcup B=E$ et soit $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/f(X)=f(Y)$. Alors : $X=X\bigcap E=X\bigcap(A\bigcup B)=(X\bigcap A)\bigcup(X\bigcap B)=(Y\bigcap A)\bigcup(Y\bigcap B)=Y\bigcap(A\bigcup B)=Y\bigcap E=Y$. Donc, f est une injection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$.

2- La CNS pour que f soit surjective est $A\bigcap B=\varnothing$. En effet,

a- Supposons f surjective. $\exists X\in\mathscr{P}(E)\,/\,f(X)=(\varnothing,B)$. Donc, $X\subset A^c$ et $X\subset B$, donc $A\bigcap B=\varnothing$.

b- Supposons $A\bigcap B=\varnothing$ et soit $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2$. On a : $f(X\bigcup Y)=((X\bigcup A)\bigcup(Y\bigcap A),(X\bigcap B)\bigcup(Y\bigcap B))=(X,Y)$ car $X\bigcap B=Y\bigcap A=\varnothing$.

Exercice 10.

1- La CNS pour que f soit injective est $A\bigcap B=\varnothing$. En effet :

a- Supposons f injective. Alors, $f(A\bigcap B)=(A,B)=f(\varnothing)$. Donc, $A\bigcap B=\varnothing$.

b- Supposons $A\bigcap B=\varnothing$ et soit $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/f(X)=f(Y)$. Alors : $X\subset\left(X\bigcup A\right)=Y\bigcup A$ (car f(X)=f(Y)) et $X\subset\left(X\bigcup B\right)=Y\bigcup B$. Donc, $X\subset\left(\left(Y\bigcup A\right)\bigcap\left(Y\bigcup B\right)\right)=Y$.
L'inclusion réciproque $(Y\subset X)$ s'obtient de la même façon. D'où : X=Y

2- L'application f n'est jamais surjective. Si elle l'était, $\left(\varnothing,\varnothing\right)$ admet un antécédent, donc $A=B=\varnothing$.
Ainsi, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, on a f(X)=(X,X) mais alors $(E,\varnothing)$ n'a pas d'antécédent.

Chapitre 5

COMPLEMENTS SUR LES COMPLEXES

0- Présentation historique

L'ingénieuse invention du nombre i est due à **Bombelli** dans son « Algèbre » de 1572. La reconnaissance de ces *nombres imaginaires* reste très controversée chez les mathématiciens jusqu'à leur représentation géométrique par **Gauss** décrite dans sa lettre à **Bessel** en 1811 : « …de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini; où chaque point déterminé par son abscisse a et par son ordonnée b représente en même temps la quantité a+ib ». L'invention de **Bombelli** accède au statut de « *nombre* ».

Euler

Le symbole « i » est introduit par **Euler** pour la première fois en 1777 seulement en lieu et place de la notation plus qu'ambiguë « $\sqrt{-1}$ », utilisée depuis le milieu du XVI[e] siècle par les algébristes et les géomètres.

En effet, les racines carrées de - 1 furent souvent notées $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Malheureusement, cette notation conduit à d'épouvantables contradictions.

Effectuer le produit $\left(\sqrt{-1}\right)\times\left(\sqrt{-1}\right)$:

- d'une part en appliquant la définition d'une racine carrée ;
- d'autre part en appliquant la règle : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$;

La présence du symbole $\sqrt{\ }$ incite à appliquer une règle uniquement valable pour des réels positifs. Pour ne pas succomber à cette tentation, et pour en éviter les conséquences fâcheuses, **Euler** proposa donc de remplacer les symboles $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ par i et -i. Ainsi $i^2 = -1$ et $(-i)^2=-1$. Cette notation, reprise par **Gauss**, est toujours utilisée.

Dans le passage suivant, **Gauss** situe l'invention des nombres complexes dans le cadre des extensions successives des ensembles numériques.

« Notre arithmétique générale, qui dépasse si largement la géométrie antique, est dans sa totalité la création de l'époque moderne. Partie du concept de nombres entiers, elle a progressivement élargi son domaine. Aux nombres entiers sont venus s'ajouter les nombres fractionnaires, aux nombres rationnels les nombres irrationnels, aux nombres positifs, les nombres négatifs, aux nombres réels, les nombres imaginaires. Cette progression s'est cependant toujours effectuée d'un pas craintif et hésitant. Les premiers algébristes appelaient encore fausses racines les racines négatives des équations (et elles le sont effectivement là où le problème auquel elles réfèrent, est présenté de telle façon que la nature de la grandeur cherchée n'admet pas d'opposé). Mais de même qu'on a peu de scrupules à accueillir les nombres fractionnaires au sein de l'arithmétique générale, alors qu'il existe une multitude de choses dénombrables pour lesquelles un nombre fractionnaire est dénué de sens, de même on ne devrait pas refuser aux nombres négatifs des droits identiques à ceux des nombres positifs, sous prétexte qu'une infinité de choses n'admettent pas d'opposés. La réalité des nombres négatifs est amplement justifiée, puisqu'ils trouvent en mille autres occasions un support adéquat. En vérité, depuis longtemps, un fait est désormais établi : seules les grandeurs imaginaires qui s'opposent aux grandeurs réelles (grandeurs imaginaires jadis, et parfois encore aujourd'hui appelées de façon maladroite impossibles) n'ont toujours pas acquis droit de cité ; elles sont seulement tolérées ; elles ressemblent donc davantage à un jeu de signes vides de contenu réel, auxquels on refuse résolument un support imaginable, sans vouloir pour autant dédaigner le riche tribut que ce jeu de signes verse en fin de compte au trésor des relations entre grandeurs réelles. »

Exercices hors programme :

Exercice 1 Dans $\mathbb{C}$, on pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. On définit $\leq$ par :

$$z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow [(a_1 < a_2) \vee ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \leq b_2))]$$

a- Classer du plus petit au plus grand les nombres complexes suivants: i , 5 + i , -6 ,-6 + 2i.

b- Vérifier que la relation $\leq$ ainsi définie fait de $\mathbb{C}$ un ensemble ordonné (ordre lexicographique).

c- Représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que ($z \leq 1+i$).

d- ($\mathbb{C}$; $\leq$) possède-t-il la propriété de la borne supérieure?

Exercice 2 Soit (K, $\leq$) un corps ordonné c'est-à-dire un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale ($\leq$) compatible c'est-à-dire vérifiant :

$$1\text{-}\forall(x,y,z) \in K^3, x \leq y \Rightarrow (x+z) \leq (y+z)$$
$$2\text{-}\forall(x,y) \in K^2, (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq xy)$$

a- Montrer que ($x<0 \Rightarrow -x>0$)

b- Montrer que ($\forall x \in K, 0 \leq x^2$)

c- Montrer que $1>0$

d- Montrer qu'aucune relation d'ordre totale définie sur $\mathbb{C}$ n'est compatible avec sa structure de corps.

1- Définitions

Nous admettons le résultat suivant, qui fonde ce chapitre.

Théorème 1 :

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.

- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : z = a + ib (a et b réels).

Vocabulaire • $\mathbb{C}$ est l'ensemble des **nombres complexes**.

• Si z = a + ib (a et b réels), a est la **partie réelle** de z, notée Re (z) ;

b est la **partie imaginaire** de z, notée Im (z).

• L'écriture z = a + ib est **la forme algébrique** de z.

Autres écritures :

- $z=|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec z non nul : **forme trigonométrique**
- $z=|z|e^{i\theta}$: **forme exponentielle**

Structure de $\mathbb{C}$:

- $(\mathbb{C},+)$

1- + est une loi de composition interne
2- Associativité
3- Il existe un élément neutre : 0
4- Tout nombre complexe admet un opposé
5- Commutativité

On dit alors que $(\mathbb{C},+)$ est un *groupe commutatif*.

- $(\mathbb{C},\times)$

1- $\times$ est une loi de composition interne
2- Associativité
3- Il existe un élément neutre : 1
4- Tout nombre complexe non nul admet un inverse
5- $\times$ est distributive par rapport à +
6- Commutativité

On dit alors que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un *corps commutatif*.

2- Formule du binôme de Newton

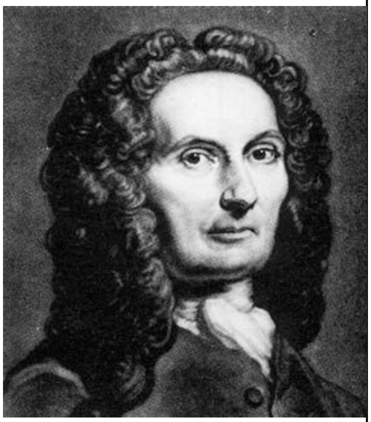
Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Newton Isaac (anglais, 1642-1727) Illustre physicien, philosophe et, on l'oublie parfois, mathématicien renommé. La fin du 17e siècle marque la fin de l'inquisition et il sut allier les progrès de la science aux idées théologiques de son temps.

On dit que c'est en voyant tomber une pomme d'un pommier, qu'il eut l'idée de la théorie de la gravitation universelle. Newton formule la loi selon laquelle les corps célestes s'attirent entre eux suivant une force proportionnelle à leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

3- Formule de Moivre



Abraham De Moivre
(1667-1754)

Pour tout réel θ et tout entier n, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Application : expression de $\cos(n\theta)$ et de $\sin(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
Par exemple, $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

4- Formule d'Euler

Pour tout réel α, $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

Application à la linéarisation : Soit α un réel. Linéariser $\sin^5(\alpha)$.
En utilisant le triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux, on va développer $\left(\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^5$, ensuite il suffit de regrouper les termes deux à deux :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^5 &= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)^5 = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5i\alpha}-5e^{3i\alpha}+10e^{i\alpha}-10e^{-i\alpha}+5e^{-3i\alpha}-e^{-5i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(\left(e^{5i\alpha}-e^{-5i\alpha}\right)-5\left(e^{3i\alpha}-e^{-3i\alpha}\right)+10\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^4}\left(\frac{\left(e^{5i\alpha}-e^{-5i\alpha}\right)}{2i}-5\frac{\left(e^{3i\alpha}-e^{-3i\alpha}\right)}{2i}+10\frac{\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{2^4}\left(\sin(5\alpha)-5\sin(3\alpha)+10\sin(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

5- Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 1 :
Soit Z un nombre complexe. On appelle *racine carrée* de Z tout nombre complexe z tel que :

$$z^2=Z.$$

Remarque : la notation $\sqrt{z}$ n'a aucun sens (sauf bien sûr si z est un réel positif).

Théorème 2 :
Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées.

Méthode de calcul : la recherche des racines carrées du complexe Z = A + iB revient à rechercher les complexes z = a + ib tels que : $\begin{cases} a^2-b^2 & = & A \\ 2ab & = & B \\ a^2+b^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} \end{cases}$.

6- Racines n^ième d'un nombre complexe

Définition 2 :
Soit Z un nombre complexe et n un entier *naturel non nul*. On appelle *racine n^ième* de Z tout nombre complexe z tel que :

$$z^n=Z.$$

Remarque : la notation $z^{\frac{1}{n}}$ n'a aucun sens (sauf bien sûr si z est un réel positif).

Théorème 3 :
Soit n un entier *naturel non nul*. Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines n^ième.

7- Racines n^ième de l'unité

On note U_n l'ensemble des racines n^ième de l'unité.

Théorème 4 :

Soit n un entier *naturel non nul*. $U_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\right\}$.

Théorème 5 :
Soit n un entier *naturel supérieur (ou égal) à 2*.
La somme des racines n^ième de l'unité est nulle.

Propriété :

On note M_k le point d'affixe $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,...,n-1\}$.
Les n points M_k sont les sommets d'un polygone régulier centré à l'origine et de rayon 1.

Cas particulier : $U_3=\{1, j, j^2\}$ avec $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. De plus, $j^2 = \bar{j}$.

8- Equation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, à coefficients complexes et $a \neq 0$.
Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de cette équation.

– si $\Delta = 0$ alors l'équation admet $-\frac{b}{2a}$ comme unique solution.

– si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1.

1- Mettre sous la forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i\sqrt{3})(2-i)\ ;\ z_2 = (1+i)^3\ ;\ z_3 = \frac{4-3i}{i-1}$$

2- Donner l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)\ ;\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ z_3 = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

Exercice 2. Calculer les racines carrées de $100, -100, 3+4i, -5-12i$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Exercice 4.

1- Calculer les racines quatrièmes de l'unité. Les représenter dans le plan complexe.

2- Montrer que le produit de 2 racines nièmes de l'unité est encore une racine nième de l'unité. (On dit que l'ensemble des racines nièmes de l'unité est stable par la multiplication.)

Exercice 5. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^6(x)$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. 1- $z_1=2+\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-1)$; $z_2=-2+2i$; $z_3=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$.

2- $-\theta$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}-\theta$.

Exercice 2. 1. 10, -10 ;
2. 10i, -10i ;
3. 2+i, -2-i ;
4. 2-3i, 2+3i ;

Exercice 3. j, j^2

Exercice 4. voir le cours.

Exercice 5.

$$\cos^5(x)=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x) \text{ et } \sin^6(x)=-\frac{1}{32}\cos(6x)+\frac{3}{16}\cos(4x)-\frac{15}{32}\cos(2x)+\frac{5}{8}$$

EXERCICES

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i} \; ; \; z_2 = \frac{a+i}{1-ai} \text{ avec a réel} \; ; \; z_3 = \frac{a+ib}{b+ia} + \frac{a-ib}{b-ia} \text{ avec a et b réels} \; ;$$

$$z_4 = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \text{ avec } \theta \text{ et } \varphi \text{ réels}$$

Exercice 2. Calculer le module et l'argument de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 3. 1- Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de (-7-24i) et de (-3+4i).

2- Résoudre l'équation : $z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.

3- Quelles sont les formes algébriques des racines quatrième de l'unité et de (-7-24i) ?

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a- $z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

b- $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$

c- $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$

Exercice 5. Sachant que $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4$ a une racine réelle , résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 6. 1- Soit l'équation : $z^5-1=0$ (E).
Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ en calculant les racines sous forme module et argument.

2- Déterminer le polynôme Q tel que pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ on ait :

$$z^5-1=(z-1)Q(z)$$

3- Résoudre l'équation $Q(z)=0$ en effectuant le changement d'inconnue $Z=z+\frac{1}{z}$ (pour cela vous pourrez commencer par mettre z^2 en facteur dans $Q(z)$).

4- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 7. Linéariser $\cos^3 x . \sin^2 x$ où x est un réel.

Exercice 8. Calculer cos(5x) - respectivement sin(5x) - en fonction de puissance de cos(x) - respectivement sin(x) -.

Exercice 9. Mettre sous forme algébrique $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ avec θ réel distinct de $2p\pi$ (p entier).

En déduire $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.

Exercice 10. α, β, ρ étant des nombres réels et n un entier naturel non nul, calculer :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta) \text{ et } B = \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)$$

Exercice 11. 1- θ étant un nombre réel compris entre 0 et 2π, déterminer le module et l'argument du nombre complexe :

$$\alpha = 1+\cos\theta + i\sin\theta$$

2- Déterminer les éléments z de $\mathbb{C}^*$ tels que z, $z+1$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes :

1- $(z+i)^n = (z-i)^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

2- $z+\overline{z}+i(z+1)+2=0$

3- $\begin{cases} \operatorname{Arg}(z) = -\operatorname{Arg}(z+1) + 2k\pi, \text{ k entier} \\ |z| = 1 \end{cases}$

Exercice 13. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et soient a, b, c trois complexes donnés. Résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

Exercice 14. Soient les trois nombres complexes : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $v=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1- Montrer que u et v sont conjugués. Calculer u + v et en déduire la partie réelle de u.

2- Calculer uv, puis la partie imaginaire de u. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

(Remarque : dans ces deux questions, on demande des valeurs numériques et pas simplement des résultats en fonction de ω).

Quelques exercices corrigés

Exercice 15. Ecrire sous forme exponentielle : $(1-i)^5$, $\left(1+i\sqrt{3}\right)^7$, et $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$. A l'aide du dernier, en déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Corrigé :

$$(1-i)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc $(1-i)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{-i\frac{5\pi}{4}}$.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc $\left(1+i\sqrt{3}\right)^7=2^7e^{i\frac{7\pi}{3}}$.

On a $(1-i)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

D'autre part $\sqrt{6}+i\sqrt{2}=\sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}+i\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right)=\sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{8}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Donc $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}=\dfrac{\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=2e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}}=2e^{5i\frac{\pi}{12}}$.

Pour déterminer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, il faut transformer l'écriture de $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$. Pour cela, on multiplie le dénominateur par sa quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}=\frac{\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right).$$

Comme $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}=2e^{i5\frac{\pi}{12}}=2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$.

On en déduit que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a- $z^2-2iz+2-4i=0$

b- $z^4=-119+120i$

c- $z^2-2e^{i\alpha}z+1=0$ avec $\alpha\in[0,\pi]$

Corrigé : a- On calcule le discriminant $\Delta=(-2i)^2-4(2-4i)=-4-8+16i=-12+16i$

On cherche une racine carré de Δ, c'est-à-dire que l'on cherche z=a+ib tel que z²= Δ.

$$z^2=\Delta \Leftrightarrow (a+ib)^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=\mathrm{Re}(\Delta) \\ 2ab=\mathrm{Im}(\Delta) \\ (a^2+b^2)^2=|\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-12 \\ 2ab=16 \\ a^2+b^2=20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=8 \\ 2ab=16 \\ 2b^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ ab=8 \\ b^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \end{cases}$$

Les racines de l'équation sont donc $\begin{cases} z_1=\dfrac{2i+2+4i}{2}=1+3i \\ z_2=\dfrac{2i-2-4i}{2}=-1-i \end{cases}$

b- Cherchons tout d'abord une racine quatrième de $-119+120i$.
Pour cela, nous allons dans un premier temps déterminer une racine carrée, puis nous recommencerons pour obtenir une racine carrée de celle trouvée.

$$z^2=-119+120i \Leftrightarrow (a+ib)^2=-119+120i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-119 \\ 2ab=120 \\ a^2+b^2=169 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=50 \\ 2ab=120 \\ 2b^2=288 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ ab=60 \\ b^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=12 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a=-5 \\ b=-12 \end{cases}$$

On choisit $z=5+12i$ par exemple.
Déterminons une racine de z :

$$z^2=5+12i \Leftrightarrow (a+ib)^2=5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=12 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=18 \\ 2ab=12 \\ 2b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ ab=6 \\ b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$$

On en déduit que $\alpha=3+2i$ est une racine quatrième de $-119+120i$.

L'équation $z^4=-119+120i$ s'écrit alors $z^4=\alpha^4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{\alpha}\right)^4=1$.

On est donc ramené à déterminer las racines quatrième de l'unité.

Notons alors $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$ les racines quatrième de l'unité $\left(\omega_k=e^{\frac{ik\pi}{2}}\right)$, les solutions de l'équation sont $\omega_1\alpha,\ \omega_2\alpha,\ \omega_3\alpha,\ \omega_4\alpha$.

c- On calcule le discriminant $\Delta=\left(-2e^{i\alpha}\right)^2-4=4\left(e^{2i\alpha}-1\right)$.
On cherche une racine carré de Δ.

Remarquons tout d'abord que :

$\Delta = 4\left(e^{2i\alpha} - 1\right) = 4e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = 4e^{i\alpha}\left(2i\sin(\alpha)\right) = 8ie^{i\alpha}\sin(\alpha) = 8\sin(\alpha)e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Comme $8\sin(\alpha)$ est un réel positif, on a immédiatement une racine carrée de Δ :

$\sqrt{8\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} = 2\sqrt{2\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

Les racines de l'équation sont donc

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2e^{i\alpha} + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{2e^{i\alpha} + 2\sqrt{2\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}}{2} = e^{i\alpha} + \sqrt{2\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} \\ z_2 = \dfrac{2e^{i\alpha} - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{2e^{i\alpha} - 2\sqrt{2\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}}{2} = e^{i\alpha} - \sqrt{2\sin(\alpha)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} \end{cases}$$

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations :

a- $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

b- $(z+1)^n = (z-1)^n$

c- $z^7 = \overline{z}$

d- $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$ (On pourra faire un changement de variable…)

Corrigé : a- Cherchons tout d'abord une racine quatrième de $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Nous avons : $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\left(1+i\sqrt{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On a donc $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}}$.

Ainsi une racine quatrième de $\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ est $\alpha = 2^{-\frac{1}{8}}e^{\frac{-7\pi}{48}}$.

L'équation $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ s'écrit alors $z^4 = \alpha^4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{\alpha}\right)^4 = 1$.

On est donc ramené à déterminer las racines quatrième de l'unité.

Notons alors ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les racines quatrième de l'unité $\left(\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{2}}\right)$, les solutions de l'équation sont $\omega_1\alpha,\ \omega_2\alpha,\ \omega_3\alpha,\ \omega_4\alpha$.

b- Remarquons tout d'abord que $z = 1$ n'est pas solution.

Cette équation est donc équivalente à $\dfrac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Posons alors $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Les solutions de l'équation $Z^n = 1$ sont les racines nièmes de l'unité. Notons les ω_k.

On a $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \{0,\ n-1\}$.

Pour trouver les solutions de l'équation de départ, il suffit de résoudre : $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega_k$

$\dfrac{z+1}{z-1} = \omega_k \Leftrightarrow z(1-\omega_k) = -(1+\omega_k)$

Il est clair que pour $\omega_0 = 1$, il n'y a pas de solution.

Par contre, pour $k \in \{1,\ n-1\}$, les solutions sont $z = -\dfrac{(1+\omega_k)}{(1-\omega_k)}$

c- Soit z une solution de cette équation.

En passant au module, on récupère $\left|z^7\right| = \left|\overline{z}\right|$, c'est-à-dire :

$|z|^7 = |z| \Leftrightarrow |z|\left(|z|^6 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \text{ ou } |z|^6 = 1 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } |z| = 1$

Il est facile de vérifier que $z = 0$ est solution de l'équation.

Supposons $z \neq 0$.

D'après ce qui précède, on a $|z| = 1$ donc $z = e^{i\theta}$.

Comme z est solution, on a $e^{i7\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{i8\theta} = 1 \Leftrightarrow 8\theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Finalement, les solutions de l'équation $z^7 = \overline{z}$ sont : $0,\ 1,\ e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\frac{3\pi}{4}},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{5\pi}{4}},\ e^{i\frac{3\pi}{2}},\ e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

d- Posons $X = \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$, on a :

$X^3 + X^2 + X + 1 = 0$

Il est clair que $X = 1$ n'est pas solution de cette équation.

Remarquons de plus que pour $X \neq 1$, on a $\dfrac{X^4 - 1}{X - 1} = X^3 + X^2 + X + 1$.

Pour voir cela, soit on calcule la somme des termes d'une suite géométrique, soit on connaît la formule : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right)$.

Ainsi, $X^3 + X^2 + X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X \neq 1) \wedge \left(\dfrac{X^4 - 1}{X - 1} = 0\right) \Leftrightarrow (X \neq 1) \wedge \left(X^4 = 1\right)$.

Les solutions de l'équation $X^3 + X^2 + X + 1 = 0$ sont donc les racines quatrièmes de l'unité différentes de 1. Nous les noterons $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ $\left(\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{2}}\right)$.

Pour trouver les solutions de l'équation de départ, il suffit de résoudre : $\dfrac{z+i}{z-i} = \omega_k$.

$\dfrac{z+i}{z-i} = \omega_k \Leftrightarrow z(1-\omega_k) = -i(1+\omega_k)$

Comme pour $k \in \{1,\ 3\}$, $\omega_k \neq 1$, les solutions sont : $z = -i\dfrac{(1+\omega_k)}{(1-\omega_k)}$.

Exercice 18. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
1- Calculer A + B et AB
2- En déduire A et B

Corrigé : 1- On a $A + B = \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^5 + \omega^6 = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.

Comme $\omega \neq 1$, on a $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \dfrac{\omega^7 - 1}{\omega - 1}$.

Or $\omega^7 = e^{2i\pi} = 1$ donc $A + B + 1 = 0$, c'est-à-dire $A + B = -1$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} AB &= \left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6\right) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega^7 \times \omega + 1 + \omega^7 \times \omega^2 + \omega^7 \times \omega^3 \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 3 + A + B = 2 \end{aligned}$$

2- D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ AB = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A - 1 \\ A(-A-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A - 1 \\ A^2 + A + 2 = 0 \end{cases}$$

Déterminons les solutions de $X^2 + X + 2 = 0$.

On a $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7$ donc les deux solutions sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

On a donc deux possibilités $\begin{cases} A = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \\ B = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} A = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \\ B = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$.

Pour déterminer la bonne solution, il faut étudier le signe de la partie imaginaire de A par exemple :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A) &= \operatorname{Im}\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right) = \operatorname{Im}(\omega) + \operatorname{Im}\left(\omega^2\right) + \operatorname{Im}\left(\omega^4\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right) + \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{4\pi}{7}}\right) + \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{8\pi}{7}}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}_{2\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Il est donc clair que $\operatorname{Im}(A) \geq 0$. On en déduit que $\begin{cases} A = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \\ B = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$.

Exercice 19. En calculant $(1+i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ de deux manières différentes, calculer :

$$S_1 = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + ... = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}}$$

$$S_2 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + ... = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k+1}{2}}$$

Corrigé : Tout d'abord, on peut calculer $(1+i)^n$ à l'aide du binôme de Newton :

$$(1+i)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} + i \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k+1}{2}}$$

On a donc $(1+i)^n = S_1 + iS_2$.

Mais on peut aussi calculer $(1+i)^n$ à l'aide de la forme exponentielle :

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

On en déduit que : $S_1 = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ et $S_2 = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

Chapitre 6

COMPLEMENTS DE TRIGONOMETRIE

Dans ce chapitre, a et b désignent deux réels.

1- Formule d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$ lorsque les deux membres existent.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$ lorsque les deux membres existent.
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$ lorsque les deux membres existent.

2- Transformation de produit en somme

- $\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
- $\sin a.\sin b = -\dfrac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$
- $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$
- $\cos a.\sin b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$

3- Transformation de somme en produit

Soient p et q deux réels.

- $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$

Voir la fiche d'exercice.

4- Résolution de l'équation acos x + bsin x = c

avec a, b, c trois réels, a et b non simultanément nuls.
On se ramène à une équation du type : $\cos(x-\varphi)=\cos(\theta)$ en divisant l'équation initiale par $\sqrt{a^2+b^2}$.
Voir la fiche d'exercice.

5- Expression de cos θ, sin θ, tan θ en fonction de $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Soit θ un réel tel que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ existe.

- $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ lorsque les deux membres existent.

EXERCICES
Conversion de sommes en produits

Le but de cette fiche est de transformer en produits des sommes comme cos p + cos q, sin p + sin q, ... et d'appliquer les résultats obtenus à la résolution d'équations trigonométriques.

Les formules

1. Avec les nombres complexes
p et q sont deux réels quelconques, cos p + cos q est la partie réelle de $e^{ip}+e^{iq}$ et sin p + sin q est la partie réelle de $e^{ip}+e^{iq}$.
a) Montrer que :

$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\ \cos\frac{p-q}{2}$ et $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\ \cos\frac{p-q}{2}$

Indication : Mettre en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans $e^{ip}+e^{iq}$.

b) En déduire les formules $\cos p - \cos q =-2\sin\frac{p+q}{2}\ \sin\frac{p-q}{2}$ et $\sin p - \sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\ \cos\frac{p+q}{2}$.

2. En utilisant des formules déjà établies
a) À partir des formules donnant cos (a + b) et cos (a - b), vérifier que :

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$$

Puis poser a +b=p et a-b=q, et retrouver la formule qui donne cosp + cosq.
b) Retrouver de même la formule donnant sin p + sin q.

Des applications à la résolution d'équations

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$
b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
c) $\cos 5x + 2 \cos 3x + 3 \cos x = 0$

Indication : b) Transformer sin x + sin 3x en un produit.

Réponses non simplifiées :

a- $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

b- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

c- $\cos5x+2\cos3x+3\cos x=0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Transformation de a cos θ + b sin θ

De nombreux problèmes, en Physique notamment, conduisent à une équation $a\cos\theta + b\sin\theta = c$, dans laquelle l'inconnue est le nombre θ. En général, pour résoudre une telle équation, on l'écrit sous la forme $r\cos(\theta - \varphi) = c$; r et φ étant connus, on sait alors trouver $\theta - \varphi$, donc θ.

Nous allons voir comment on peut opérer pour obtenir l'écriture $r\cos(\theta - \varphi) = c$.

Transformation de a cos θ + b sin θ (a, b, θ réels)

1. Par utilisation des nombres complexes

La méthode qui suit repose sur la remarque suivante : $a\cos\theta + b\sin\theta$ est la partie réelle du complexe $e^{i\theta}(a - ib)$.

a- On suppose que a et b ne sont pas tous deux nuls.

On pose $r = |a + ib|$ et $\varphi = \arg(a + ib)$. Montrer alors que pour tout réel θ :

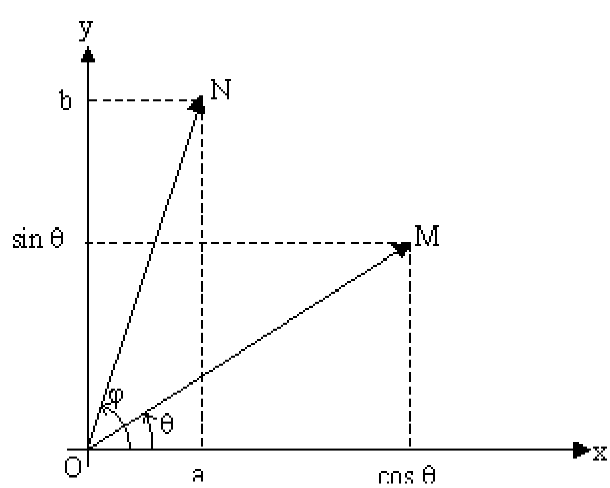
$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi)$

b- Application : En utilisant la question a, transformer chacune des expressions :

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \ ; \ \cos 3\theta + \sin 3\theta$$

2. Par le produit scalaire

La méthode qui suit repose sur la remarque suivante : $a\cos\theta + b\sin\theta$ est de la forme $xx' + yy'$, et peut donc s'exprimer comme un produit scalaire. Dans un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, considérons les points M $(\cos\theta; \sin\theta)$ et N $(a; b)$.



a- Vérifier que $a\cos\theta + b\sin\theta = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

b- Poser $r = ON$ et $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}\right)$.

En déduire alors de a que $a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi)$.

3. En posant $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$, $a\neq 0$

a- Vérifier qu'alors il existe toujours un nombre φ réel tel que $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

b-En écrivant $a\cos\theta + b\sin\theta=a\left(\cos\theta+\dfrac{b}{a}\sin\theta\right)$, vérifier que :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(\theta-\varphi)$$

Résolution d'équations a cos x + b sin x = c

1. Montrer que l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ n'a pas de solution lorsque $c^2 > a^2 + b^2$.
2. Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\cos x+\sqrt{3}\sin x= 1$

b) $2\cos x-3\sin x= -6$

c) $\cos 3x + \sin 3x=1$

d) $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x=\sqrt{2}$.

Réponses non simplifiées

a- $\cos x+\sqrt{3}\sin x= 1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

b- $2\cos x-3\sin x= -6$ Pas de solution

c- $\cos 3x + \sin 3x=1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

d- $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Quelques exercices corrigés :

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\sin(3x) = \cos(2x)$

$4\cos^2(x) + 4\cos(x) - 3 = 0$

Corrigé : a- $\sin(3x) = \cos(2x)$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{2} - 2x[2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow 5x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \pi - \frac{\pi}{2} + 2x[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

b- $4\cos^2(x) + 4\cos(x) - 3 = 0$.

On pose évidemment $X = \cos(x)$, et on obtient $4X^2 + 4X - 3 = 0$.

Les solutions de cette équation sont $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -\frac{3}{2}$.

On se ramène donc à résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{3}{2}$.

Il est clair que la deuxième équation n'a pas de solution.

En outre, $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc les solutions de l'équation initiale sont $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 2. Démontrer que l'on a : $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Simplifier : $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Corrigé :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos(x)+\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+\cos(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$
$$=0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)$$
$$=\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=\cos(x)$$

Exercice 3. Soit x un réel différent d'un multiple de π. On considère l'expression F(x) définie par :

$$F(x)=\frac{\sin(7x)}{\sin(x)}-2\cos(2x)-2\cos(4x)-2\cos(6x)$$

Montrer que : $F(x)=1$.

On rappelle que $2\sin(a)\cos(b)=\sin(a+b)+\sin(a-b)$.

Corrigé :

$$F(x)=\frac{\sin(7x)-2\sin(x)\cos(2x)-2\sin(x)\cos(4x)-2\sin(x)\cos(6x)}{\sin(x)}$$
$$=\frac{\sin(7x)-\sin(3x)-\sin(-x)-\sin(5x)-\sin(-3x)-\sin(7x)-\sin(-5x)}{\sin(x)}$$
$$=\frac{\sin(7x)-\sin(3x)+\sin(x)-\sin(5x)+\sin(3x)-\sin(7x)+\sin(5x)}{\sin(x)}=\frac{\sin(x)}{\sin(x)}=1$$

Chapitre 7

LES POLYNÔMES

0- Présentation historique

Viète François, français, 1540-1603, est considéré, en France, comme étant à l'origine du calcul algébrique "moderne". Il écrit encore en latin, à la façon de **Bombelli**, mais en utilisant les signes opératoires actuels + et - pour la somme et la différence, hérités de l'allemand **Widmann**.

Dans une équation, les consonnes (resp. les voyelles) sont les paramètres connus (resp. les inconnues). Il utilisa le terme actuel de "coefficient" dans une équation.

Viète résolut complètement l'équation du second degré « $ax^2+bx=c$ ». Il affirma pouvoir ramener les problèmes de son époque à la résolution d'équations et émet, à juste titre, la conjecture selon laquelle la trisection de l'angle est liée à l'équation du 3ème degré qu'il résolut dans sa forme $x^3+ax=b$ lorsque a et b sont des nombres positifs.

Les racines négatives d'une équation sont considérées comme fausses mais les racines imaginaires sont déjà "inventées" grâce au génie de **Bombelli** et Viète sera aussi l'un des premiers à pressentir, suivi par **Girard** et **Descartes**, le théorème fondamental de l'algèbre que **d'Alembert** puis **Gauss** démontreront.

Il remarque également, avec **Harriot**, les relations, dites parfois de Viète, existant entre les solutions et les coefficients d'une équation algébrique :

Ces relations seront étudiées par Girard et Descartes, puis **Lagrange** et **Cauchy**, lesquels perçoivent leur rôle dans la résolution générale des équations algébriques. Mais ce sera **Galois** qui montrera au 19^{éme} siècle, au moyen de la théorie (naissante) des groupes finis, que les équations de degré supérieur à 5 ne sont généralement pas résolubles par radicaux (c'est-à-dire les solutions ne peuvent s'exprimer au moyen de combinaisons de racines carrées, cubiques, ..., nièmes des coefficients).

Evariste Galois ne fréquentera l'école qu'à partir de douze ans. Il entre alors au Collège Royal Louis-le-Grand dont il se fait expulser car il refuse de chanter à la chapelle. Après des études secondaires brillantes mais mouvementées et deux échecs à l'entrée de l'Ecole Polytechnique, il entre à l'Ecole Normale Supérieure. Malgré son génie, ses professeurs ne le prennent pas au sérieux. D'un caractère tempétueux, ses idées républicaines le conduisent en prison dont il sort malade quelques mois plus tard. Evariste Galois a vingt ans. Il s'éprendra alors d'une "infâme coquette", selon ses termes, pour laquelle il dut accepter une provocation en duel où il trouva la mort. La nuit précédant le duel, il rédige en hâte ses découvertes. Ce n'est que vers 1870 que les mathématiciens comprendront l'importance de ces découvertes.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit le corps commutatif $\mathbb{R}$, soit le corps commutatif $\mathbb{C}$.

1- Présentation des polynômes

1- Définition

On se place sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (pour nous $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un polynôme (formel) est défini par la donnée de ses coefficients $a_0, \dots, a_n$ éléments de $\mathbb{K}$. X étant une lettre muette, on note $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ ou $\sum_{k\geq 0} a_kX^k$, étant entendu que la somme ne comporte qu'un nombre fini de a_k non nuls.

a_iX^i est un monôme de degré i.

On distingue parfois le polynôme P(X) (qui, par construction, est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (*)) de la fonction polynomiale associée :

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x)$$

Celle-ci est nulle si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$.

D'ailleurs, on peut fort bien faire jouer à X d'autres rôles que des valeurs dans $\mathbb{K}$. X peut aussi être remplacé par exemple par une matrice, ou un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (voir les chapitres d'algèbre linéaire correspondants).

On a bien évidemment l'implication :

$$P(X) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0$$

Mais la réciproque est loin d'être évidente. Nous allons montrer que, lorsque $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a équivalence, ce qui permet de confondre polynôme et fonction polynomiale. La phrase P = 0 gardera cependant de préférence le sens (*).

Propriété : 1- Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Alors, si la fonction polynomiale associée à P est identiquement nulle, P a tous ses coefficients nuls.

2- Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, si les fonctions polynomiales associées sont égales (prennent les mêmes valeurs), les deux polynômes sont égaux (ont leurs coefficients égaux).

Idée de la preuve (récurrence finie) :

1- $\mathbb{K}$ contenant $\mathbb{R}$, nous supposerons que la variable x ne prend que des valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$

Alors, pour $x = 0$, on obtient $a_0 = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_1x+...+a_nx^n=0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $a_1+...+a_nx^{n-1}=0$.

On ne peut plus prendre $x = 0$, cependant, on peut prendre la limite lorsque x tend vers 0, ce qui donne $a_1= 0$. etc...

2- se prouve en appliquant 1- à P-Q.

Notation : $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, …

Attention : Ne pas confondre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}(X)$. Ce dernier ensemble est l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Son étude sera faite dans le chapitre suivant.

Remarque : Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On le note $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou s'il n'y a pas d'ambiguïté 0.

2- Degré et valuation

Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, P non nul, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Le **degré** de P est le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$. On le note deg(P).

La **valuation** de P est le plus petit entier p tel que $a_p \neq 0$. On la note val(P).

Le polynôme nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ n'a ni degré, ni valuation.

Parfois, les conventions suivantes sont utilisées : $\deg(0_{\mathbb{K}[X]})=-\infty$ et $\mathrm{val}(0_{\mathbb{K}[X]})=+\infty$.

Théorème : Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont même degré et mêmes coefficients.

2- Addition de polynômes

Définition : Soient P et Q deux polynômes : $P=\sum_{k=0}^{n_1} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n_2} b_k X^k$. Alors,

$P+Q=\sum_{k=0}^{n_3} (a_k + b_k) X^k$ où $n_3 = \mathrm{Max}(n_1,n_2)$.

Propriété : Soient P et Q deux polynômes non nuls tels que P+Q soit non nul. Alors, $\deg(P+Q) \leq \mathrm{Max}(\deg(P),\deg(Q))$ et $\mathrm{val}(P+Q) \geq \mathrm{Min}(\mathrm{val}(P),\mathrm{val}(Q))$.

Propriété : $(\mathbb{K}[X],+)$ est un groupe commutatif.

3- Multiplication de polynômes

Définition : Soient P et Q deux polynômes, $P=\sum_{k=0}^{n_1} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n_2} b_k X^k$. Alors,
$P.Q=\sum_{k=0}^{n_1+n_2} c_k X^k$ avec $c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Propriété : Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors, deg(P.Q)=deg(P)+deg(Q) et val(P.Q)=val(P)+val(Q).

Propriété : $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un anneau commutatif.

Propriété : Soient P et Q deux polynômes. $P.Q=0 \Leftrightarrow P=0 \vee Q=0$ (*Intégrité*).

4- Division euclidienne

Théorème et définition : Soient A et B deux polynômes, B non nul. Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que : A=BQ+R avec R=0 ou deg(R)<deg(B).
A est le dividende, B le diviseur, Q le quotient et R le reste.

Démonstration : Pour simplifier, nous poserons *dans cette démonstration* que le degré du polynôme nul est $-\infty$
Montrons d'abord l'unicité :
Soit A = BQ + R = BQ' + R' avec (deg R < deg B ou R=0) et (deg R' < deg B ou R'=0).
De B(Q - Q') = R' – R, on déduit deg B + deg(Q - Q') = deg(R' - R).
Or deg(R' - R) $\leq$ sup(deg R, deg R') < deg B.
De degB + deg(Q - Q') < degB, on déduit deg(Q - Q') = $-\infty$,
donc que Q - Q' = 0 puis R'-R=O.
Montrons maintenant l'existence :
Soit B un polynôme de degré p et de coefficient dominant b_p.
- Si A = 0 ou A $\neq$ 0 avec deg A < p, on a A = 0.B + A donc (Q, R) = (0, A) est solution du problème.
- Supposons l'existence du quotient et reste dans la division par B de tout polynôme de degré inférieur ou égal à n et soit A de degré n + 1, de coefficient dominant a_{n+1}.

Soit $A_1 = A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B$. On a $\deg A_1 \leq n$; donc il existe (Q_1, R_1) tel que :

$A_1 = BQ_1 + R_1$, $\deg R_1 < \deg B$ d'où $A = \left(Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}\right) B + R_1$.

$R = R_1$ et $Q = Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}$ donne une solution.

L'existence est donc ainsi établie par récurrence sur n = degA.

Pratique de la division euclidienne :
Exemple : $A=X^5+X^4-X^3+X-1$, $B=X^3+X^2+2$.

$$
\begin{array}{r|l}
2X^2+X+1 & 3X^8-3X^7+6X^6-5X^5+8X^4-4X^3+6X^2-5X+\frac{11}{2} \\
\hline
 & 6X^{10}-3X^9+6X^8-X^7+5X^6+5X^5 \\
 & \underline{-6X^{10}-3X^9+3X^8} \\
 & \quad -6X^9+9X^8-X^7 \\
 & \quad \underline{+6X^9+3X^8-3X^7} \\
 & \qquad 12X^8-4X^7+5X^6 \\
 & \qquad \underline{-12X^8-6X^7+6X^6} \\
 & \qquad\quad -10X^7+11X^6+5X^5 \\
 & \qquad\quad \underline{+10X^7+5X^6-5X^5} \\
 & \qquad\qquad 16X^6 \\
 & \qquad\qquad \underline{-16X^6-8X^5+8X^4} \\
 & \qquad\qquad\quad -8X^5+8X^4 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{+8X^5+4X^4-4X^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 12X^4-4X^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-12X^4-6X^3+6X^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -10X^3+6X^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+10X^3+5X^2-5X} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad +11X^2-5X \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-11X^2-\frac{11}{2}X+\frac{11}{2}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{21}{2}X+\frac{11}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr|l}
A & X^5+X^4-X^3+X-1 & X^3+X^2+2 \\
\cline{3-3}
BQ_1 & X^5+X^4+2X^2 & \underbrace{X^2}_{Q_1}-\underbrace{1}_{Q_2} \\
\cline{2-2}
A_1=A-BQ_1 & -X^3-2X^2+X-1 & \\
BQ_2 & -X^3-X^2-2 & \\
\cline{2-2}
A_2=A_1-BQ_2 & -X^2+X+1 &
\end{array}
$$

$A=B(Q_1+Q_2)+A_2$ et $\deg(A_2)<\deg(B)$.
Le quotient est X^2-1, et le reste est $-X^2+X+1$.

Remarque : Dans certains pays d'Amérique Latine, l'algorithme de la division euclidienne est le même que celui utilisé ci-dessus mais la présentation diffère. Vous avez ci-dessous un exemple d'une telle présentation.

Le résultat de cette division est :
$6X^{10}-3X^9+6X^8-X^7+5X^6+5X^5=$
$$(2X^2+X+1)\left(3X^8-3X^7+6X^6-5X^5+8X^4-4X^3+6X^2-5X+\frac{11}{2}\right)+\left(-\frac{21}{2}X+\frac{11}{2}\right).$$

5- Division suivant les puissances croissantes

Théorème et définition : Soient A et B deux polynômes avec val(B)=0 *(c'est-à-dire le terme constant de B est non nul)*.

Soit n un entier naturel.

Il existe un unique couple (Q_n,R_n) de polynômes tel que :

$$A=BQ_n+X^{n+1}R_n \text{ avec } Q=0 \text{ ou } \deg(Q_n)\leq n \qquad (1)$$

Ce théorème définit la **division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n.**

Démonstration :

1- Montrons l'unicité.

Si $BQ_n + X^{n+1}R_n= 0$, la condition $B(0) \neq 0$ montre que X^{n+1} doit diviser Q_n ; comme $\deg(Q_n) \leq n$, cela implique $Q_n = 0$, d'où $R_n =0$.

2- Montrons l'existence.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

Par hypothèse, $b_0 \neq 0$.

Raisonnons par récurrence sur n. Pour n = 0, il suffit de prendre :

$$Q_0=\frac{a_0}{b_0},\ R_0=\frac{A-BQ_0}{X}$$

Supposons déterminés Q_n et R_n vérifiant (1). Puisque $B(0) \neq 0$, il existe une constante $\lambda_{n+1}=\dfrac{R_n(0)}{B(0)}$ et un polynôme S tels que :

$$R_n= \lambda_{n+1}B+XS$$

La relation (1) implique alors :

$$A=BQ_n+ \lambda_{n+1}X^{n+1}B+X^{n+2}R_nS.$$

Il suffit donc de prendre $Q_{n+1} = Q_n + \lambda_{n+1} X^{n+1}$ et $R_{n+1} = R_nS$ pour obtenir (1) à l'ordre n + 1.

La disposition pratique d'un calcul de division suit pas à pas le raisonnement constructif ci-dessus.

Par exemple, voici la division de $A = 1 + 2X + X^3$ par $B= 1 +X+2X^2$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2X + X^3 & 1 + X + 2X^2 \\ \cline{2-2}
\quad X - 2X^2 + X^3 & 1 + X - 3X^2 + 2X^3 \\
\qquad -3X^2 - X^3 & \\
\qquad\qquad 2X^3 + 6X^4 & \\
\qquad\qquad\qquad 4X^4 - 4X^5 &
\end{array}$$

Le quotient à l'ordre 3 est $1 + X - 3X^2 + 2X^3$, le reste est $4(1 - X) X^4$.

On peut alors écrire : $A=B(1 + X - 3X^2 + 2X^3) + 4(1 - X) X^4$

6- Racines d'un polynôme

Définition : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et a un élément de $\mathbb{K}$. a est une racine de P signifie P(a)=0.

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et a un élément de $\mathbb{K}$. a est une racine de P si et seulement si P est divisible par (X-a).

Définition : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et a est une racine de P. L'**ordre de multiplicité** de a est le plus grand entier p tel que $(X-a)^p$ divise P.

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré n. P admet *au plus* n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

7- Dérivées successives d'un polynôme

Définition : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec a_n non nul (deg(P)=n).

On pose $P'=\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$, $P''=\sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$,…

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec a_n non nul (deg(P)=n). Soit j un entier compris entre 0 et n. Alors, $\deg(P^{(j)})=n-j$ et $P^{(j)}(0)=j\,!a_j$.

8- Formule de Taylor

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ tel que deg(P)=n, soit a un élément de $\mathbb{K}$.

Alors, $P(X+a)=\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(a)$.

Variante : $P(X)=\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

9- Critère de multiplicité d'une racine

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, P non nul, soit a un élément de $\mathbb{K}$.
On a l'équivalence entre i- et ii-

i- a est une racine de P de multiplicité k
ii- $P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(k-1)}(a)=0$ et $P^{(k)}(a)\neq 0$.

Exemple : Racines de $P=X^5+3X^4+4X^3+4X^2+3X+1$.

10- Factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème de d'Alembert : Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que deg(P)=n. Alors P admet exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité. On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Conjecturé par **Albert De Girard** en 1629, ce résultat ne sera démontré que par **Gauss** en 1799, après une tentative presque réussie par **d'Alembert**, mais aussi par **Euler** et **Lagrange**.
Ce théorème, capital pour l'Algèbre, l'Arithmétique et l'Analyse est appelé théorème fondamental de l'Algèbre, sauf en France où on lui rattache le nom de d'Alembert.

Jean le Rond d'Alembert (français, 1717-1783) Enfant naturel d'un commissaire d'artillerie, abandonné sur les marches d'une chapelle parisienne, le futur mathématicien est recueilli par un vitrier qui recevra secrètement une pension pour subvenir à l'éducation du jeune garçon qui étudie brillamment le droit, la médecine et les mathématiques.

Cofondateur, en 1751, avec Diderot, de l'Encyclopédie, appelée aussi « Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers », synthèse des connaissances philosophiques, littéraires et scientifiques de ce siècle fertile, appelé « siècle des lumières ».

Conséquence : Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que deg(P)=n, $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Soit $(x_k)_{k=1 \text{ à } n}$ les n racines de P (distinctes ou non). P peut s'écrire : $P=a_n\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$.

Conséquence : Factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = a\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\mu_i}$$

où les $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $\mu_1,\ldots,\mu_p$ et a est le coefficient du terme de plus haut degré de P.

On a : $\sum_{i=1}^{p}\mu_i = \deg(P)$.

11- Factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème : Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Si z_0 est une racine complexe de P de multiplicité α, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P de même multiplicité α.

Conséquence : Factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = a\prod_{i=1}^{p}\left(X-\alpha_i\right)^{\mu_i}\prod_{j=1}^{q}\left(X^2+b_jX+c_j\right)^{\nu_j}$$

où les α_i, $1 \le i \le p$, sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives μ_i, les b_j et c_j , $1 \le j \le q$, sont des réels tels que $b_j^2-4c_j < 0$ et a est le coefficient du terme de plus haut degré de P.

On a : $\sum_{i=1}^{p}\mu_i + 2\sum_{j=1}^{q}\nu_j = \deg(P)$.

12- Relations entre coefficients et racines

Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que deg(P)=n, $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. Soit $(x_j)_{j=1 \text{ à } n}$ les n racines de P (distinctes ou non). Alors, pour k entier compris entre 1 et n :

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k} = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

En particulier, $\sum_{i=1}^{n}x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{i=1}^{n}x_i = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

COMPLEMENTS DE COURS
EQUATIONS DU TROISIEME ET QUATRIEME DEGRE

Historique :

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIX^ième^ siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3^eme^degré.

Le premier à avoir résolu des équations du 3^eme^degré du type $x^3 + px = q$ ($p > 0$, $q > 0$) semble être Scipione Del Ferro (1465 – 1526), professeur à l'université de Bologne. Il ne publia pas sa découverte mais la transmit à son élève Antonio Maria Fior. En 1531, Tartaglia (1500 – 1557), soit à la lumière d'une indiscrétion, soit par sa propre invention, apprit également à résoudre les équations du 3^eme^ degré. Croyant à une imposture, Fior lança un défi public à Tartaglia.

A la fin du temps imparti, Tartaglia avait résolu toutes les équations de Fior, alors que celui–ci n'avait résolu qu'une seule équation de Tartaglia. La supériorité de Tartaglia provient du fait que ce dernier savait résoudre les équations du type $x^3 + px^2 = q$, chose que Fior ne savait pas faire. En 1539, Tartaglia accepta de dévoiler son secret à Cardan (1501 – 1576) qui le publia peu après, malgré la colère de Tartaglia. Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522 – 1565), parvint à résoudre les équations du 4^eme^ degré.

Formules de Cardan :

En effectuant le changement d'inconnue $x=X+\frac{a}{3}$, on est ramené à l'équation : « $x^3+px+q=0$ ».

Les trois racines de cette équation sont :

$$x_1=\frac{1}{3}(u+v)\ ;\ x_2=\frac{1}{3}(ju + j^2v)\ ;\ x_3=\frac{1}{3}(j^2u + jv)$$

avec $u = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q+3i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-4p^3-27q^2}}$ et $v = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q-3i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-4p^3-27q^2}}$ (Ars Magna, 1547)

avec la convention de noter $\sqrt[m]{a}$ l'*une* des racines m-ièmes du nombre complexe a.

Exercice : Résoudre l'équation : $x^3 + 12x - 12 = 0$.
Vous poserez x=u+v et vous vous ramènerez à une équation du second degré.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de $X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ par $X^3 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Même question pour $X^5 + X^2 - 2$ par $X^3 - X^2 - X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1- $P = X^3 + 1$ 2- $Q = X^5 - X^4 - 8X^2 + 8X$

Exercice 3. On considère le polynôme $P = 2X^3 - 6X + 4$. Calculer P' et vérifier que l'une des racines de P' est aussi racine de P. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. $X^5+2X^3-3X-2=(X^2+1)(X^3+X+1)-X^2-4X-3$

$X^5+X^2-2=(X^2+X+2)(X^3-X^2-X-2)+6X^2+4X+2$

Exercice 2. 1- $P=(X+1)(X^2-X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $P=(X-1)\left(X-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2- $Q=X(X-1)(X-2)\left(X^2+2X+4\right)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et

Q= $Q=X(X-1)(X-2)\left(X+1-i\sqrt{3}\right)\left(X+1+i\sqrt{3}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. $P'=6X^2-6$, 1 et -1 sont racines de P', on vérifie que 1 est racine de P, c'est donc une racine double donc P se factorise par $(X-1)^2$, on a $P=2(X-1)^2(X+2)$.

EXERCICES

Exercice 1.

1. Effectuer la division euclidienne de $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ par $B = X^2 + (1-i)X + (1+i)$.

2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $C = X^4 - 5X + 3$ par $D = 2X^2 - X + 1$.

3. Déterminer a et b tels que $E = X^2 - aX + 1$ divise $F = X^4 - X + b$.

Exercice 2. Soient les polynômes $A = X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$ et $B = X^3 - 2X + 1$. Effectuer la division euclidienne de A par B et déterminer α et β pour que B divise A.

Exercice 3. Soient S et T deux polynômes à coefficients réels définis par :

$$S = X^7 + \alpha X^6 + \beta X^5 - X^4 + 5X^3 - 2X^2$$
$$T = X^4 - 2X^2 + X$$

Déterminer deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $S = AT + X^5 B$.

En déduire α et β pour que T divise S.

Exercice 4.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soient a et b deux nombres complexes distincts. Prouver l'équivalence suivante : P est divisible par $(X-a)(X-b) \Leftrightarrow P(a) = P(b) = 0$
2. Montrer que le polynôme $X^{3n+2} + X^{3k+1} + X^{3p}$ est divisible par $X^2 + X + 1$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5. La formule de Taylor appliquée à l'ordre n à un polynôme de degré n, fournit un développement de ce polynôme suivant les puissances de (x - a) où a est un réel arbitraire. Donner l'expression de ce développement.
Application : Ordonner le polynôme $P = X^3 - 9X^2 + 7X + 15$ suivant les puissances de $(X-2)$.

Exercice 6. Expliciter un polynôme P_0 de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_0(1) = 3$; $P_0'(1) = 4$; $P_0''(1) = 5$; pour tout entier k supérieur ou égal à 3, $P_0^{(k)}(1) = 0$. Y a-t-il unicité ?

Déterminer alors tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 3$; $P'(1) = 4$; $P''(1) = 5$.

Exercice 7. Polynôme d'interpolation de Lagrange (Français, 1736-1813) :

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts;
- soient $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.

On cherche un polynôme L de degré $\leq$n-1 tel que $L(\alpha_i)=\beta_i$ pour $1\leq i\leq n$.

On considère le polynôme L défini par :

$$L(X)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\times\frac{X-\alpha_1}{\alpha_k-\alpha_1}\times\frac{X-\alpha_2}{\alpha_k-\alpha_2}\times\ldots\times\frac{X-\alpha_{k-1}}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}\times\frac{X-\alpha_{k+1}}{\alpha_k-\alpha_{k+1}}\times\ldots\times\frac{X-\alpha_n}{\alpha_k-\alpha_n}$$

Vérifier que ce polynôme correspond au problème posé.

L est appelé **le polynôme d'interpolation de Lagrange**.

Soit C le graphe de $x\mapsto\sin(x)$ pour x élément de $[-\pi,\pi]$. Déterminer une fonction polynôme P telle que le graphe de P passe par les points de C d'abscisse $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, P étant de degré au plus 4.

Exercice 8. Existe-t-il des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que :

$$\begin{cases}[P+2]\text{ soit divisible par }(X-1)^3\\ [P-2]\text{ soit divisible par }(X+1)^3\end{cases}$$

Si oui, les déterminer.

Exercice 9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $P_\lambda(X)=(X-2)^n-(2X-3)^n+\lambda(X^n-1)$.

1. Trouver l'ensemble des valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquels P_λ admet 1 comme racine d'ordre au moins 2.
2. Pour les valeurs de λ trouvées, quel est l'ordre de multiplicité de cette racine ?

Exercice 10. Soit $A=X^5+aX^3+5X^2+b$, où a et b sont des réels. Trouver a et b pour que A admette une racine d'ordre au moins 3 et factoriser A dans ce cas.

Exercice 11. Factoriser chacun des polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$: $P_1=X^4+1$, $P_2=X^5-1$, $P_3=X^4+X^2+1$.

Exercice 12. Soit P le polynôme $P(X)=X^4-X^3+2X^2-2X+4$.

Vérifier que $P(1+i)=0$ et en déduire une factorisation de P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Décomposer en produits de facteurs irréductibles les polynômes suivants :

a- X^8+X^4+1 sur $\mathbb{R}[X]$.

b- $2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$ sur $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle

c- $X^6-3X^5+X^4+4X^2-12X+4$ sur $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il admet deux racines réelles l'une inverse de l'autre

d- $X^5+3X^4+4X^3+4X^2+3X+1$ sur $\mathbb{R}[X]$

Exercice 14. Soit P = $(X-2)^{2n}+(X-1)^n-2$ où n est un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer le reste de la division de P par (X - 1).(X - 2), puis par $(X-1)^2$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul. On pose $P_n=(1+X)^n-(1-X)^n$.

1- Montrer que P_n est divisible par X, et déterminer, selon la parité de n, le degré de P_n.

2- Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ (vous donnerez le résultat final sous forme algébrique) et compter combien vous trouvez de zéros distincts.

3- Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16. Soit le polynôme $P=(X^2-1)^n-X^{2n}$.

1- Calculer la somme et le produit des racines de P dans $\mathbb{C}$.

2- Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17. On considère la famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par récurrence par :

$$P_n(X) = (1+nX).P_{n-1}(X) + X.(1-X).P_{n-1}'(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } P_0(X)=1$$

a- Calculer P_1, P_2, P_3.

b- Quel est le terme de plus haut degré de P_n ?

c- Calculer $P_n(1)$ et $P_n(0)$.

d- Montrer que pour tout complexe z non nul, $P_n(z)=z^n.P_n\left(\frac{1}{z}\right)$. En déduire que les racines de $P_n(X)$ sont deux à deux inverses. Donner une racine commune à tout les P_n pour n impair.

Quelques exercices corrigés

Exercice 18.

1- Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 + X + 2$ par $X^2 + 3X + 1$.

2- Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X^2 + X + 1$ par $3X^2 + 2X + 1$.

Corrigé : 1-

$$\begin{array}{l|l} X^4+3X^2+X+2 & X^2+3X+1 \\ \cline{2-2} -\left(X^4+3X^3+X^2\right) & X^2-3X+11 \\ -3X^3+2X^2+X+2 & \\ -\left(-3X^3-9X^2-3X\right) & \\ 11X^2+4X+2 & \\ -\left(11X^2+33X+11\right) & \\ -29X-9 & \end{array}$$

On a donc : $X^4+3X^2+X+2=\left(X^2+3X+1\right)\left(X^2-3X+11\right)-29X-9$

2- Pour effectuer une division selon les puissances croissantes, on écrit les polynômes dans l'ordre croissant des puissances, et on néglige tous les termes de degré plus grand que 3.

$$\begin{array}{l|l} 1+X+X^2 & 1+2X+3X^2 \\ \cline{2-2} -\left(1+2X+3X^2\right) & 1-X \\ -X-2X^2 & \\ -\left(-X-2X^2\right) & \\ 0 & \end{array}$$

On a donc : $1+X+X^2=\left(1+2X+3X^2\right)\left(1-X\right)+0X^3$.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} x+y+z & = & -1+i \\ xy+xz+yz & = & -2-i \\ xyz & = & -2i \end{cases}$.

Corrigé : Le problème revient à déterminer les racines du polynôme suivant :

$$P(X)=X^3-(-1+i)X^2+(-2-i)X+2i$$

Remarquons tout d'abord que 1 est une racine évidente, on peut donc mettre $(X-1)$ en facteur : $P(X)=(X-1)\left(X^2+(2-i)X-2i\right)$.

Il nous reste donc à déterminer les racines de $Q=X^2+(2-i)X-2i$.

On a $\Delta=(2-i)^2-4\times(-2i)=4-1-4i+8i=4+4i+i^2=(2+i)^2$.

Les racines de Q sont donc $x_1=\dfrac{-(2-i)+(2+i)}{2}=i$ et $x_2=\dfrac{-(2-i)-(2+i)}{2}=-2$.

Finalement, les solutions du système $\begin{cases} x+y+z & = & 1+i \\ xy+xz+yz & = & -2-i \\ xyz & = & -2i \end{cases}$ sont $1,\ -2,$ et i.

Exercice 20. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1- Déterminer le degré et la valuation de P.

2- Montrer que P admet deux racines évidentes dont on précisera l'ordre de multiplicité.

3- Prouver que j est une racine double de P.

4- En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé : 1- On a $(X+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} X^k = X^7 + \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k + 1$.

Donc $P = (X+1)^7 - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k$.

Il est alors clair que $\deg(P) = 6$ et $\operatorname{val}(P) = 1$.

2- Il est facile de vérifier que 0 et -1 sont deux racines de P.
Pour déterminer l'ordre de multiplicité de ces deux racines, on calcule la dérivée de P :
$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$
0 et -1 ne sont pas racine de P' donc l'ordre de multiplicité de ces racines est 1.

3- $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j - 1 = -j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$.
D'autre part, $P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6 = 7(-j^2)^6 - 7 = 7 - 7 = 0$.
On en déduit que j est une racine double de P.

4- P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, donc nécessairement pour toute racine $\alpha \in \mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité k, le conjugué $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P d'ordre de multiplicité k. Ainsi $\overline{j}$ est une racine de P double.

D'après ce qui précède, on peut mettre $X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2$ en facteur dans P.

Comme P est de degré 6, sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\alpha X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}$$

A l'aide de l'écriture suivante $P = \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k$, il est facile de voir par identification que $\alpha = 7$.

On en conclut que $P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2$ sur $\mathbb{C}[X]$,

Pour obtenir la factorisation de P sur $\mathbb{R}[X]$., il faut regrouper les racines complexes (non réelles) conjuguées :

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2 = 7X(X-1)\left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2$$
$$= 7X(X+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1\right)^2.$$

Exercice 21. Soit n un entier supérieur (ou égal) à 2 et $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.
Montrer en raisonnant par l'absurde que P n'a pas de racine multiple

Corrigé : Supposons que P a une racine multiple (au moins double). On la note α.
Comme α est au moins une racine double, c'est aussi une racine de la dérivée.
Or il est facile de voir que : $P' = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + ... + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$, c'est-à-dire que $P = P' + \frac{X^n}{n!}$.
Remplaçons X par α dans l'égalité précédente, on obtient $P(\alpha) = P'(\alpha) + \frac{\alpha^n}{n!}$.
Or par hypothèse $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$, donc cela implique que $\frac{\alpha^n}{n!} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.
Mais $P(0) = 1$ donc 0 n'est pas une racine de P, ce qui contredit notre hypothèse.
On en conclut que P n'a pas de racine multiple.

Exercice 22. 1- Trouver les racines du polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.
2- Montrer que Q divise $P = X^{59} + X^{50} + X^{41} + X^{20}$.

Corrigé : 1- Les racines de Q sont les racines quatrième de l'unité différente de 1.
En particulier, on a $Q = (X-\omega_1)(X-\omega_2)(X-\omega_3)$ avec $\omega_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}$.
2- Comme les ω_k pour $k \in \{1,2,3\}$ sont distincts deux à deux, on peut montrer que Q divise P si et seulement si $\forall k \in \{1,2,3\}$ $P(\omega_k) = 0$.
Vérifions donc que $\forall k \in \{1,2,3\}$ $P(\omega_k) = 0$.
$$P(\omega_k) = \left(e^{i\frac{k\pi}{2}}\right)^{59} + \left(e^{i\frac{k\pi}{2}}\right)^{50} + \left(e^{i\frac{k\pi}{2}}\right)^{41} + \left(e^{i\frac{k\pi}{2}}\right)^{20} = e^{ik\left(29\pi + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{ik(25\pi)} + e^{ik\left(20\pi + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{ik(10\pi)}$$
$$= e^{ik\frac{3\pi}{2}} + e^{ik\pi} + e^{ik\frac{\pi}{2}} + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0.$$
D'où le résultat.

Exercice 23.
1- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(7\alpha)$ en fonction de $\cos \alpha$.
2- Soit $P = 64X^3 - 112X^2 + 56X - 7$.
a- Trouver les racines de P de la forme $\cos^2\alpha$, où $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
b- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé : 1- Pour exprimer $\cos(7\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, on passe par les complexes :

$$\cos(7\alpha)=\mathrm{Re}\left(e^{i7\alpha}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(e^{i\alpha}\right)^7\right)=\mathrm{Re}\left(\left(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right)^7\right)$$

Pour calculer $\left(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right)^7$, on utilise la formule du binôme et on remarque que les seuls termes réels sont ceux pour lesquels la puissance de $\left(i\sin(\alpha)\right)$ est paire.
Ensuite, on remplace les sinus avec des exposants pairs par des cosinus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\left(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right)^7\right)&=\cos^7(\alpha)+\binom{7}{2}\cos^5(\alpha)\left(i\sin(\alpha)\right)^2+\binom{7}{4}\cos^3(\alpha)\left(i\sin(\alpha)\right)^4\\
&\quad+\binom{7}{6}\cos(\alpha)\left(i\sin(\alpha)\right)^6\\
&=\cos^7(\alpha)+21\cos^5(\alpha)\left(-\sin^2(\alpha)\right)+35\cos^3(\alpha)\sin^4(\alpha)\\
&\quad+7\cos(\alpha)\left(-\sin^6(\alpha)\right)\\
&=\cos^7(\alpha)-21\cos^5(\alpha)\left(1-\cos^2(\alpha)\right)+35\cos^3(\alpha)\left(1-\cos^2(\alpha)\right)^2\\
&\quad-7\cos(\alpha)\left(1-\cos^2(\alpha)\right)^3\\
&=\cos^7(\alpha)-21\cos^5(\alpha)+21\cos^7(\alpha)+35\cos^3(\alpha)\left(1-2\cos^2(\alpha)+\cos^4(\alpha)\right)\\
&\qquad-7\cos(\alpha)\left(1-3\cos^2(\alpha)+3\cos^4(\alpha)-\cos^6(\alpha)\right)\\
&=22\cos^7(\alpha)-21\cos^5(\alpha)+35\cos^3(\alpha)-70\cos^5(\alpha)+35\cos^7(\alpha)-7\cos(\alpha)\\
&\qquad+21\cos^3(\alpha)-21\cos^5(\alpha)+7\cos^7(\alpha)\\
&=64\cos^7(\alpha)-112\cos^5(\alpha)+56\cos^3(\alpha)-7\cos(\alpha)\\
&=\left(64\cos^6(\alpha)-112\cos^4(\alpha)+56\cos^2(\alpha)-7\right)\times\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

D'où : $\cos(7\alpha)=64\cos^7(\alpha)-112\cos^5(\alpha)+56\cos^3(\alpha)-7\cos(\alpha)$

2- a- $P\left(\cos^2(\alpha)\right)=64\cos^6(\alpha)-112\cos^4(\alpha)+56\cos^2(\alpha)-7$.

Comme $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(\alpha)\neq 0$.

Ainsi d'après ce qui précède, $P\left(\cos^2(\alpha)\right)=\frac{\cos(7\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Donc $P\left(\cos^2(\alpha)\right)=0\Leftrightarrow\frac{\cos(7\alpha)}{\cos(\alpha)}=0\Leftrightarrow\cos(7\alpha)=0\Leftrightarrow 7\alpha\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\frac{\pi}{14}\left[\frac{\pi}{7}\right]$.

Comme $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, les seules possibilités pour α sont $\frac{\pi}{14},\frac{3\pi}{14},\frac{5\pi}{14}$.

2-b- D'après ce qui précède, on a (au moins) trois racines distinctes de P :
$\cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right)$, $\cos^2\left(\frac{3\pi}{14}\right)$, $\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right)$
P étant un polynôme de degré 3, on en déduit que :

$$P=64\left(X-\cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right)\right)\left(X-\cos^2\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)\left(X-\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

Chapitre 8

LES FRACTIONS RATIONNELLES

0- Préliminaire

On considère la fraction F = $\dfrac{X^8+3X^7+2X^6+X^5+6X^4+6X^3-6X^2-6X-3}{X^5+3X^4+2X^3-2X^2-3X-1}$.

a- En effectuant la division (euclidienne) du numérateur par le dénominateur, montrer que : F = $X^3+3+\dfrac{X^3+3X}{(X-1)(X+1)^4}$.

b- Soit $F_1(x) = \dfrac{x^3+3x}{(x-1)(x+1)^4}$. Posons h=x+1.

Montrer que $F_1(h\text{-}1) = \dfrac{h^3-3h^2+6h-4}{h^4(h-2)}$.

c- A l'aide d'une division suivant les puissances croissantes, montrer que :

$$F = X^3+3+\frac{2}{(X+1)^4}-\frac{2}{(X+1)^3}+\frac{\frac{1}{2}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{(X+1)}+\frac{\frac{1}{4}}{(X-1)}$$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit le corps commutatif $\mathbb{R}$, soit le corps commutatif $\mathbb{C}$.

1- Définitions

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Alors, F=$\dfrac{P}{Q}$ est une **fraction rationnelle**.

Notation : $\mathbb{K}(X)$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La fraction rationnelle F est **irréductible** lorsque P et Q n'ont aucun facteur commun de degré $\geq$ 1.

Dans la suite, nous supposerons que la fraction F=$\dfrac{P}{Q}$ est irréductible.

Soit a un élément de $\mathbb{K}$ tel que Q(a)=0. On dit que a est un **pôle** de F.

Si a est une racine d'ordre α de Q, on dit que a est un **pôle d'ordre α** de F.

Effectuons la division (euclidienne) de P par Q :

$$\exists!(E,R) \in \mathbb{K}[X]^2 / P = QE + R \text{ avec } R=0 \text{ ou } \deg(R)<\deg(Q).$$

D'où : $F = \dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{R}{Q}$.

Le quotient E de la division de P par Q est la **partie entière** de F.

$\dfrac{R}{Q}$ est la **partie polaire** de F.

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons une fraction $F = \dfrac{P}{Q}$ avec deg(P)<deg(Q).

Soit a un pôle d'ordre α de F.

Il existe Q_1 élément de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $F = \dfrac{P}{(X-a)^\alpha Q_1}$ et $Q_1(a) \neq 0$.

Nous pouvons écrire : $F(x)=\dfrac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$.

Nous effectuons le changement de variables : $h = x-a$.

Puis, nous effectuons la division de $P(a+h)$ par $Q_1(a+h)$ suivant les puissances croissantes (de h) à l'ordre α-1.

En revenant à la variable x, nous obtenons une écriture du type :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{a_i}{(x-a)^{\alpha-i}} + \frac{R(x-a)}{Q_1(x)} \text{ avec } Q_1(a) \neq 0$$

Le terme $\displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{a_i}{(x-a)^{\alpha-i}}$ est la partie polaire relative au pôle a.

Le terme $\dfrac{R(x-a)}{Q_1(x)}$ a comme pôles éventuels les pôles de F sauf a.

2- Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F=\dfrac{P}{Q}$ un élément de $\mathbb{C}(X)$.

Soient $x_1, \ldots, x_r$ les pôles de F d'ordre respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

Nous avons alors la décomposition en irréductible de Q : $Q=k\displaystyle\prod_{j=1}^{r}\left(X-x_j\right)^{\alpha_j}$.

Nous pouvons obtenir l'écriture :

$$F(x)=E(x) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\frac{\beta_{j,i}}{(x-x_j)^i}$$

Cette écriture (unique) est la **décomposition en éléments simples (de première espèce) de F dans $\mathbb{C}(X)$.**

3- Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit F un élément de $\mathbb{R}(X)$.

Nous avons la décomposition en irréductible de Q : $Q=k\prod_{j=1}^{r}\left(X-x_j\right)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{p}\left(X^2+p_jX+q_j\right)^{\gamma_j}$

avec pour tout j de 1 à p, $p_j^2-4q_j<0$.

Nous pouvons obtenir une écriture de la forme :

$$F(x)=E(x)+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\frac{\beta_{j,i}}{(x-x_j)^i}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{\gamma_j}\frac{c_{i,j}x+d_{i,j}}{(x^2+p_jx+q_j)^i}$$

Avec pour tout j de 1 à p, $p_j^2-4q_j<0$.

Cette écriture (unique) est la **décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.**

E(x) est la partie entière de F.

$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\frac{\beta_{j,i}}{(x-x_j)^i}$ est constitué des éléments simples de **première espèce** (s'il en existe).

$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{\gamma_j}\frac{c_{i,j}x+d_{i,j}}{(x^2+p_jx+q_j)^i}$ est constitué des éléments simples de **deuxième espèce** (s'il en existe).

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Les fractions rationnelles suivantes sont-elles irréductibles ? Donner le cas échéant un représentant irréductible de la fraction rationnelle, indiquer ses zéros et ses pôles.

$$\text{(a) } \frac{X-1}{X^2(X+1)} \;;\; \text{(b) } \frac{X^2-1}{X^2-2X-3} \;;\; \text{(c) } \frac{X^2-4X}{2X^3-4X^2} \;;\; \text{(d) } \frac{2X^8-8X^7+6X^6-2X^2+8X-6}{X^3-2X^2-5X+6}$$

Exercice 2. Calculer les éventuelles parties entières des fractions rationnelles suivantes :

$$\text{(a) } \frac{X^5}{(X^2+1)(X-1)^2} \;;\; \text{(b) } \frac{X^2-1}{X^2-2X-3} \;;\; \text{(c) } \frac{2X+1}{X(X^2+1)^2} \;;\; \text{(d) } \frac{X^3-2X+5}{X+3}$$

Exercice 3. Indiquer, sans effectuer de calculs quelle est la forme de la décomposition en élément simple sur $\mathbb{R}(X)$ et sur $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes, on donnera les liens éventuels entre les différents coefficients.

$$\text{(a) } \frac{X^2-1}{(X^2+2)X^3} \;;\qquad \text{(b) } \frac{X^2}{(X^2+1)^2}$$

Exercice 4. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivante sur $\mathbb{C}(X)$ et sur $\mathbb{R}(X)$:

$$\text{(a) } \frac{X-3}{(X^2+4)} \;;\qquad \text{(b) } \frac{1}{(X+1)^3} \;;\qquad \text{(c) } \frac{X}{(X+1)^3}$$

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. (a) La fraction est irréductible ; zéro : 1 ; pôles : 0 (double) et -1

(b) Forme irréductible : $\dfrac{X-1}{X-3}$; zéro : 1 ; pôle : 3

(c) Forme irréductible : $\dfrac{X-4}{2X^2-4X}$; zéro : 4 ; pôles : 0 et 2

(d) Forme irréductible : $\dfrac{2(X^6-1)}{X+2}$; zéros : les racines 6-ièmes de 1 ; pôle : -2

Exercice 2. (a) $X+2$

(b) 1

(c) pas de partie entière

(d) X^2-3X+7

Exercice 3. (a) Forme de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{e}{X+i\sqrt{2}}$$

De plus la fraction est réelle, donc $d=\overline{e}$ et la fraction est impaire, en écrivant : $F(-X)=-F(X)$, on obtient $b=0, d=e$.

Forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X^3}+\frac{\alpha X+\beta}{X^2+2}$$

a, b et c sont les mêmes que précédemment, le fait que la fraction est impaire donne cette fois $b=0, \beta=0$.

(b) Forme de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F=\frac{a_1}{X-i}+\frac{a_2}{(X-i)^2}+\frac{b_1}{X+i}+\frac{b_2}{(X+i)^2}$$

De plus la fraction est réelle donc $\overline{a}_1=b_1$ et $\overline{a}_2=b_2$, par ailleurs, la fraction est paire donc on obtient de plus : $a_1=-b_1$ et $a_2=b_2$. On en déduit de plus que a_1 est un imaginaire pur et que a_2 est réel.

Forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F=\frac{\alpha_1 X+\beta_1}{X^2+1}+\frac{\alpha_2 X+\beta_2}{(X^2+1)^2}$$

Comme la fraction est paire, on obtient $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Exercice 4. (a) Tout d'abord dans $\mathbb{R}(X)$: F est un élément simple !

Dans $\mathbb{C}(X)$: $F=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i}{X-2i}+\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i}{X+2i}$.

(b) Dans $\mathbb{R}(X)$ comme dans $\mathbb{C}(X)$, F est un élément simple.

(c) On a un pôle multiple, qui est une racine réelle donc on obtient la même décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{(X+1)^3}$.

EXERCICES

Exercice 1. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F(X) = \dfrac{X^4 + X^2 + 2}{X^3 + 5X^2 + 8X + 4}$.

Exercice 2. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F(X) = \dfrac{2}{(X^2+1)(X+1)^2}$.

Exercice 3. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F(X) = \dfrac{X^2 - 4}{(X-1)^2 (X+1)^2}$.

Exercice 4. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F(X) = \dfrac{2X^4 + 1}{(X-1)^3 (X^2 + 1)}$.

Exercice 5. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F définie par :

$$F(X) = \frac{2X - 1}{X(X+1)^2 (X^2 + X + 1)^2}$$

Exercice 6. Décomposer sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F définie par :

$$\frac{X+3}{(X+1)^7 (X^2 + 2X + 2)}$$

Exercice 7.

1- Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{2X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 3X - 2}{X^4 + 2X^3 + X^2}$$

2- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 - 3k - 2}{k^4 + 2k^3 + k^2}$.

Quelques exercices corrigés

Exercice 8. Soit P le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(X)=X^6+2X^5+3X^4+\alpha X^3+3X^2+2X+1$$

1- Déterminer α pour que -1 soit racine de P.

On garde cette valeur de α pour la suite.

2- Montrer que -1 est racine double de P.

3- Montrer que i est racine multiple de P.

4- En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

5- A l'aide de ce qui précède, déterminer la décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}(X)$ de :

$$R(X)=\frac{4X}{P(X)}$$

Correction :

1- -1 racine de P $\Leftrightarrow P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^6+2(-1)^5+3(-1)^4+\alpha(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)+1 \Leftrightarrow \alpha=4$

On garde cette valeur de α pour la suite.

On a donc $P(X)=X^6+2X^5+3X^4+4X^3+3X^2+2X+1$

2- D'après ce qui précède, -1 est racine de P donc pour vérifier que -1 est racine double de P, il suffit de vérifier que -1 est racine de la dérivée de P et -1 non racine de la dérivée seconde de P.

P est dérivable et l'on a :.

Ainsi, $P'(-1)=6(-1)^5+10(-1)^4+12(-1)^3+12(-1)^2+6(-1)+2=0$.

On montre de même que $P''(-1)\neq 0$.

On en déduit que -1 est racine double de P.

3- On a d'une par : $P(i)=0$, et d'autre part, $P'(i)=0$

On en déduit donc que i est racine au moins double de P.

4- D'après ce qui précède, i est une racine au moins double de P.

P étant un polynôme à coefficients réels, on en déduit que $\bar{i}=-i$ est aussi une racine au moins double de P.

P étant de degré 6, P a exactement 6 racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leur ordre de multiplicité).

On a donc trouvé toutes les racines de P. P peut donc se mettre sous la forme :

$P(X)=A(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$ avec A le coefficient dominant.

Par identification, il est clair que l'on a $A=1$.

On en conclut que $P(X)=(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de regrouper les termes avec les racines conjuguées deux à deux.

$P(X)=(X+1)^2(X^2+1)^2$.

5- D'après la question précédente, on a $P(X)=(X+1)^2(X^2+1)^2$

Donc $R(X)=\dfrac{4X}{P(X)}=\dfrac{4X}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$.

Pour déterminer la décomposition en éléments simples de R, on a deux possibilités. La première méthode consiste à déterminer la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, puis ensuite revenir à la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. La seconde méthode consiste à d éterminer directement la décomposition de R dans $\mathbb{R}[X]$.
Ici, nous allons opter pour la seconde méthode qui dans ce cas, nous donne la solution avec moins de calculs.

La décomposition de R dans $\mathbb{R}[X]$ est du type :

$$R(X)=\frac{a_1}{(X+1)}+\frac{a_2}{(X+1)^2}+\frac{a_3X+a_4}{X^2+1}+\frac{a_5X+a_6}{(X^2+1)^2}$$

Pour déterminer la partie polaire associé au pole -1 d'ordre 2, nous allons utiliser la méthode de division selon les puissances croissantes.
Commençons par faire le changement de variable $X+1=h \Leftrightarrow X=h-1$, on obtient :

$$R(X)=\frac{4(h-1)}{(h)^2\left((h-1)^2+1\right)^2}=\frac{4(h-1)}{h^2\left(h^2-2h+2\right)^2}$$

Nous devons donc diviser $4(h-1)$ par $\left(h^2-2h+2\right)^2=4-8h+8h^2-4h^3+h^4$ selon les puissances croissantes à l'ordre 1=2-1 :

$$\begin{array}{r|l}
-4+4h & 4-8h+8h^2-4h^3+h^4 \\ \cline{2-2}
-\left(-4+8h-8h^2+4h^3-h^4\right) & -1-h \\ \cline{1-1}
-4h+8h^2-4h^3+h^4 & \\
-\left(-4h+8h^2-8h^3+4h^4-h^5\right) & \\ \cline{1-1}
4h^3-3h^4+h^5 &
\end{array}$$

On en déduit que l'on a :

$$-4+4h=\left(h^2-2h+2\right)^2(-1-h)+h^2\left(4h-3h^2+h^3\right)$$

Ce qui nous donne :

$$R(X)=\frac{\left(h^2-2h+2\right)^2(-1-h)+h^2\left(4h-3h^2+h^3\right)}{h^2\left(h^2-2h+2\right)^2}=\frac{(-1-h)}{h^2}+\frac{\left(4h-3h^2+h^3\right)}{\left(h^2-2h+2\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}+\frac{\left(4h-3h^2+h^3\right)}{\left(h^2-2h+2\right)^2}$$

Puis en remplaçant h par X+1 :

$$R(X)=-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X+1)}+\frac{\left(4(X+1)-3(X+1)^2+(X+1)^3\right)}{\left(X^2+1\right)^2}$$

De plus, nous avons :

$$4(X+1)-3(X+1)^2+(X+1)^3=X^3+X+2$$

Donc :

$$R(X)=-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X+1)}+\frac{X^3+X+2}{(X^2+1)^2}$$

Pour déterminer la partie polaire de deuxième espèce, nous allons effectuer la division euclidienne de X^3+X+2 par X^2+1 :

$$\begin{array}{l|l} X^3+X+2 & X^2+1 \\ \hline -(X^3+X) & X \\ \hline \quad\quad 2 & \end{array}$$

On a donc $X^3+X+2=(X^2+1)X+2$

Ce qui nous donne :

$$R(X)=-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X+1)}+\frac{(X^2+1)X+2}{(X^2+1)^2}=-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X+1)}+\frac{X}{(X^2+1)}+\frac{2}{(X^2+1)^2}$$

Finalement, nous avons obtenu la décomposition de R en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$:

$$R(X)=-\frac{1}{(X+1)}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{X}{(X^2+1)}+\frac{2}{(X^2+1)^2}$$

Chapitre 9

COMPLEMENTS SUR LES REELS

0- Présentation historique

Simple instituteur, **Weierstrass Karl Wilhelm Theodor,** allemand, 1815-1897, poursuit des études à Münster où **Gudermann** sera son professeur. Weierstrass enseigna les mathématiques dans différents lycées mais, encouragé par son ancien professeur, ses premiers travaux sur les intégrales elliptiques le mènent à une chaire de mathématiques à l'université de Berlin. On le considère généralement comme un des plus grands mathématiciens du 19$^{\text{ème}}$ siècle.

Consolidant avec rigueur les résultats de **Cauchy** relatifs à l'analyse numérique, ses travaux préciseront aussi le statut des nombres *irrationnels*, notion encore vague depuis la découverte de ces derniers par les Pythagoriciens (disciples de **Pythagore**). Weierstrass mettra un point final à la difficile étude des fonctions et intégrales elliptiques dont Abel fut à l'origine.

Weierstrass donne pour la première fois une construction de l'ensemble des nombres irrationnels, tout en évitant d'y introduire la notion de limite afin de séparer les nombres de l'analyse et rester dans le domaine de l'arithmétique : sa construction est basée sur le développement décimal illimité non périodique d'un nombre irrationnel (non rationnel).

Dedekind, **Meray** et **Cantor** se lanceront à sa suite sur cette difficile construction que les mathématiciens "attendaient" depuis plus de 2000 ans, suite à la découverte des irrationnels par les Pythagoriciens (disciples de **Pythagore**).

Pythagore de Samos (grec, -570 ?/-500 ?) Astronome, philosophe, musicologue, cet illustre savant nous est connu par les Pythagoriciens (ou Pythagoréens), ses disciples. Personnage mythique pour ces derniers (il serait le fils d'Apollon), il créa son école à Crotone, laquelle devint rapidement une secte aux règles de vie très sévères. Devenant alors dérangeant, persona non grata, il mourra assassiné.

Pour Pythagore, la terre est sphérique et tourne sur elle-même autour du Soleil. Cette théorie plongea le monde dans l'erreur pendant 2000 ans jusqu'à l'entrée en scène de Galilée.

Avec Weierstrass, on entre dans un univers de rigueur jusqu'ici ignoré mettant fin à des conclusions hardies de convergence, de continuité ou de dérivabilité comme le firent imprudemment par exemple **Fourier** et **Cauchy**. On lui doit la première définition précise ("par les ε " comme disent les étudiants) de la notion de limite d'une suite (convergence) et d'une fonction ainsi que la définition formelle de la continuité d'une fonction.

1- Le corps des réels

Théorème : $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.

Théorème : $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

Théorème : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif.

2- $\mathbb{R}$ et la relation d'ordre $\leq$

Définition : $x\leq y \Leftrightarrow y-x\in\mathbb{R}^+$.

Théorème : $\mathbb{R}$ est un corps **totalement ordonné**.

Archimède
(vers 282-217 av. J.C.)

Théorème : $\mathbb{R}$ est **archimédien** : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$ $\exists n\in\mathbb{N}$ /nx>y.

Théorème : $\mathbb{R}$ est **valué** c'est-à-dire l'ensemble des réels est muni de l'application valeur absolue

Proposition : Pour tous réels x et y,

- $|xy|=|x|.|y|$
- $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$
- $\forall\alpha>0,\ \forall x_0\in\mathbb{R},\ |x_0|<\alpha\Leftrightarrow-\alpha<x_0<\alpha$
- $\forall\alpha>0,\ \forall x_0\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-x_0|<\alpha\Leftrightarrow x_0-\alpha<x<x_0+\alpha$

Ces deux dernières propriétés sont également vraies si on remplace partout le signe < par le signe $\leq$.

3- Borne supérieure et borne inférieure

Définition : Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$.
M est un **majorant** de A signifie : $\forall a \in A,\ a \leq M$.
S'il existe un majorant de A, on dit que A est **majorée**.
m est un **minorant** de A signifie : $\forall a \in A,\ m \leq a$.
S'il existe un minorant de A, on dit que A est **minorée**.
A est **bornée** si A est majorée et minorée.

Définition : Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$.
A admet un **plus grand élément** M_0 signifie :

- M_0 est élément de A
- M_0 est un majorant de A.

M_0 (s'il existe) est le maximum de A et on le note MaxA.

Définition : Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$.
A admet un **plus petit élément** m_0 signifie :

- m_0 est élément de A
- m_0 est un minorant de A.

m_0 (s'il existe) est le minimum de A et on le note MinA.

Définition : Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$.
S est **la borne supérieure** de A signifie que S est le plus petit des majorants de A. On le note Sup A.
I est **la borne inférieure** de A signifie que I est le plus grand des minorants de A. On le note Inf A.

Exemple : Soit A =]0,1[. Tous les réels négatifs ou nuls minorent A. Le plus grand de ces minorants est 0. On note Inf A = 0. Tous les réels supérieurs ou égaux à 1 majorent A. Le plus petit de ces majorants est 1. On note Sup A = 1. On notera qu'il ne s'agit ni de minimum ni de maximum, puisque ni Inf A ni Sup A n`appartiennent à A.

On peut écrire également :

$$\text{S=SupA} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq S \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > S - \varepsilon \end{cases}$$

La première ligne signifie que S majore A, et la deuxième signifie que tout nombre inférieur à S (donc de la forme S - ε avec ε > 0) ne majore pas A. Donc S est le plus petit majorant de A. C'est la borne supérieure.

De même :

$$\text{I=InfA} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq I \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < I + \varepsilon \end{cases}$$

Théorème : Toute partie **non vide majorée** admet une borne supérieure.
Toute partie **non vide minorée** admet une borne inférieure.

Définition : Droite achevée

On définit $\overline{\mathbb{R}}$ en ajoutant à $\mathbb{R}$ deux symboles, $-\infty$ et $+\infty$.

Sur le nouvel ensemble ainsi défini, on prolonge la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ -\infty < x < +\infty$$

On peut alors désigner le nouvel ensemble sous la forme d'intervalle $[-\infty,+\infty]$.

L'intérêt de la droite achevée réside dans le fait que nombre de résultats dans $\mathbb{R}$ est lié au fait d'avoir une partie A bornée au non. Ainsi, si A est majorée, on peut définir S = Sup A. Si A est non majoré, on posera Sup A = $+\infty$. $+\infty$ n'est autre que la borne supérieure de A, mais dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Par ailleurs, on obtient, dans la droite achevée, des résultats plus concis.

Voici une liste de résultats dans $\mathbb{R}$, dont certains seront prouvés ultérieurement :

- Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.
- Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.
- De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. De toute suite non bornée, on peut extraire une suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ces résultats s'énoncent, dans la droite achevée :

- Toute partie admet une borne supérieure.
- Toute partie admet une borne inférieure.
- Toute suite croissante converge vers sa borne supérieure.
- Toute suite décroissante converge vers sa borne inférieure.
- De toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque : La fonction partie entière E

Proposition : Soit x un réel. Il existe un unique entier p, appelé partie entière de x tel que :

$$p \leq x < p+1.$$

Démonstration :

Soit $x > 0$. Considérons $A = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq x\}$.

Cet ensemble est une partie non vide (elle contient 0) majorée (par x lui-même). Elle admet donc une borne supérieure α. Montrons que α est entier et élément de A. En effet, α-1 n'est pas un majorant de A donc il existe n élément de A tel que $\alpha-1 < n \leq \alpha$. Les entiers supérieurs à n sont alors supérieurs à α et ne peuvent être dans A. n est donc le plus grand élément de A et est donc égal à α. α est donc non seulement la borne supérieure mais le maximum de la partie A. α n'est autre que l'entier p que nous cherchons. En effet, p est dans A donc $p \leq x$, mais p+1 n'est pas dans A donc $x < p+1$. Ce qui prouve l'existence. Admettons l'unicité qui sera démontrée juste après.

Notons p = E(x).

Pour $x<0$, posons $p= -E(-x)-1$ si x est non entier, et x si x est entier. Dans le premier cas, on a :

$$E(-x) < -x < E(-x) + 1$$
$$-E(-x) - 1 < x < -E(-x)$$

Ainsi, $E(-3,5) =-4$.
On remarquera que cette définition utilisée en Mathématiques ne correspond pas toujours à l'idée première de « partie entière ». Sur les calculatrices, vous trouverez « deux fonctions parties entières » : une correspondant à celle que nous sommes en train de définir, une autre qui donne comme partie entière de $x < 0$, la valeur $-E(-x)$.

Montrons maintenant l'unicité.
Si $q < p$, avec p et q entiers, alors $q+1 \leq p \leq x$, et si $q > p$, alors $q \geq p+1 > x$, ce qui montre que aucun nombre inférieur ou supérieur à p ne peut vérifier la définition de la partie entière de x. Seul p convient.

Application : Ecriture décimale d'un réel
Soit n un entier positif. Tout réel peut être encadré de manière unique sous la forme :

$$M + \underbrace{\frac{d_1}{10} + ... + \frac{d_n}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par défaut}} \leq x < M + \underbrace{\frac{d_1}{10} + ... + \frac{d_n + 1}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par excès}}$$

où M est un entier et les d_i des chiffres entre 0 et 9. Il suffit en effet de considérer l'encadrement :

$$E(10^n x) \leq x < E(10^n x) + 1$$

A propos de la notion d'intervalle :
Un intervalle s'écrit |a,b| (*) où | remplace ici [ou]. a peut être fini ou valoir $-\infty$, b peut être fini ou valoir $+\infty$. L'intervalle est alors l'ensemble des réels compris entre a et b, éventuellement au sens large.

Proposition : I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x<z<y \Rightarrow z \in I$$

Une partie vérifiant cette propriété est dite convexe.
Une autre formulation est :

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x<y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

Démonstration :
Il est évident qu'un intervalle vérifie la propriété de convexité.
Montrons la réciproque. Soit I convexe. Montrons qu'il est de la forme (*). Si I est minoré, posons $a = \operatorname{Inf} I$ sinon $a = -\infty$. Si I est majoré, posons b = Sup I, sinon $b = +\infty$. On a donc I inclus dans [a, b].
Soit z tel que $a < z < b$. Dans tous les cas, il existe x et y éléments de I tels que :

$$a \leq x<z<y \leq b$$

Montrons le pour x :

Si $a = -\infty$, cela signifie que I n'est pas minoré, et donc que z ne minore pas I, et donc qu'il existe x élément de I tel que $x < z$.

Si a est fini, a est le plus grand des minorants, donc z ne minore pas I, et donc il existe x éléments de I tel que $a \leq x < z$.

La propriété de convexité prouve que z est élément de I. Ainsi,]a, b[est inclus dans I. Le fait que a et b appartienne ou non à I fermera éventuellement l'une des bornes de l'intervalle ou les deux.

4- Rationnel et Irrationnel

Définition : Un nombre **rationnel** est un nombre pouvant s'écrire comme quotient de deux entiers.

Théorème : Un nombre réel est un rationnel si et seulement si son développement décimal illimité est périodique.

Théorème : Soit]a, b[un intervalle non vide. Alors]a, b[rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Nous devons montrer que]a, b[contient un rationnel et un irrationnel.
Soient x et y deux éléments de]a, b[.
Si l'un d'eux est rationnel et l'autre irrationnel, il n'y a rien à montrer.
S'ils sont tous deux rationnels, il suffit de montrer que :

i) Entre deux rationnels, il existe un irrationnel.

S'ils sont tous deux irrationnels, il suffit de montrer que :

ii) Entre deux irrationnels, il existe un rationnel.

i) Si x et y sont deux rationnels tels que x < y, alors posons :

$$z=x+\frac{(y-x)\sqrt{2}}{2}$$

z est un irrationnel compris entre x et y.

ii) Si x et y sont deux irrationnels tels que x < y, il existe q entier tel que :

$$0<\frac{1}{q}<y-x$$

(prendre q supérieur à $\frac{1}{y-x}$, par exemple la partie entière de ce nombre augmenté de 1).
Considérons maintenant p = E(qx). On a :

$$p\leq qx<p+1\leq qx+1<qx+q(y-x)=qy$$
$$\Rightarrow x<\frac{p+1}{q}<y$$

$\frac{p+1}{q}$ est un rationnel compris entre x et y.

Théorème : Tout réel peut s'écrire comme limite d'une suite de rationnels.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tous réel x et y, on a :

$$\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \text{ et } \min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

Exercice 2. Soient a, b, c, x, y et z six réels strictement positifs.

1- Montrer que : $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}\leq\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$.

2- Montrer que l'on a égalité si et seulement si : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Exercice 3. Déterminer les couples de réels (x,y) vérifiant $|y-\sin(x)|+|y^n+x^n|=0$ pour tout entier n.

Exercice 4. Montrer les inégalités suivantes :

1- $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*+},(a+b)<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

2- $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*+},(a+b)<(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3$.

Exercice 5. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout entier n non nul et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

(Indication : considérer les premiers termes ...).

Exercice 6. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$$

Exercice 7. Pour chacun des ensembles suivants dire s'il est majoré, minoré, borné. Donner s'ils existent l'élément maximal, la borne supérieure, l'élément minimal, la borne inférieure.

$$E=\left\{\frac{1}{1+x^2};x\in]0,1[\right\}\ ;F=\left\{\frac{1}{1-x^2};x\in[0,1[\right\}\ ;\ G=\left\{\sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right);n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles non vides. Montrer que :

1- $\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$;

2- $\inf(A\cup B)=\min(\inf(A),\inf(B))$.

Exercice 9. Déterminer l’ensemble des réels qui sont strictement supérieurs à deux fois leur inverse.

Exercice 10. Soit a un réel strictement positif. Résoudre l’inéquation : $\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}<a$.

EXERCICES

Exercice 1. Soit $x = 7,\overline{314}$. Déterminer l'écriture fractionnaire de x.

Exercice 2. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné dans $\mathbb{R}$. Donner s'ils existent l'élément maximal, la borne sup, l'élément minimal, la borne inf (on ne demande pas de justification).

$E_1=\{x\in\mathbb{Z}/-2<x\leq 2\}$; $E_2=\{x\in\mathbb{R}/-2<x\leq 2\}$; $E_3=\left\{\frac{1}{1+x^2}/\ x\in]0,1[\right\}$

$E_4=\left\{\frac{1}{1+x^2}/\ x\in[0,1[\right\}$; $E_5=\{x\in\mathbb{Q}/x^2\leq 17\}$; $E_6=\{x\in\mathbb{R}/x^2\leq 17\}$

Exercice 3. Soit E la partie de $\mathbb{R}$ définie par : $E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}/\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

1- Justifier l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure de E. Puis calculer les en justifiant avec soin vos réponses.

2- Cet ensemble admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 4. Soit $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}/\ (n,m)\in\mathbb{N}^{*2}\right\}$. Après avoir montrer l'existence de Sup(A) et Inf(A), déterminer ces bornes.

Exercice 5.

a- Soient E et F deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On suppose que $E\subset F$. Montrer que $\mathrm{Sup}(E)\leq\mathrm{Sup}(F)$ et $\mathrm{Inf}(E)\geq\mathrm{Inf}(F)$. Vous établirez au préalable que ces bornes existent.

b- Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. Calculer en fonction de Inf(A, Inf(B), Sup(A), Sup(B) : $\mathrm{Sup}(A\cup B)$, $\mathrm{Inf}(A\cup B)$, $\mathrm{Sup}(A+B)$. Vous établirez au préalable que ces bornes existent.

c- On suppose que $A\cap B\neq\emptyset$. Comparer les nombres suivants :

$\mathrm{Inf}(A\cap B)$, $\mathrm{Sup}(A\cap B)$, $\mathrm{Min}(\mathrm{Sup}A,\mathrm{Sup}B)$, $\mathrm{Max}(\mathrm{Inf}A,\mathrm{Inf}B)$

Les inégalités peuvent-elles être strictes ?

Exercice 6. Pour tout entier n naturel, on définit l'ensemble de réels :

$$E_n=\left\{k+\frac{n}{k},k\text{ entier naturel non nul}\right\}$$

a- Montrer que E_n admet une borne inférieure et que :

$$\mathrm{Inf}(E_n)=\underset{1\leq k\leq n}{\mathrm{Inf}}\left\{k+\frac{n}{k}\right\}$$

b- Montrer que pour tout entier n strictement positif, $\mathrm{Inf}(E_n)\geq\sqrt{4n}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 7. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que A et A^c soient des parties ouvertes de $\mathbb{R}$ (A ouvert$\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists \varepsilon > 0,]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset A$).

a- Démontrer que A n'est pas majoré.

b- Supposons A^c non vide et soit x_0 un élément de A^c. Soit $B = \{t \in A / x_0 \leq t\}$. Démontrer que B admet une borne inférieure m tel que $m > x_0$.

c- Démontrer que $m \notin A^c$ et $m \notin A$. Conclure.

Quelques exercices corrigés

Exercice 8. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall$ (a ; b)$\in$A$\times$B : a $\leq$ b.

a- Justifier l'existence de Sup (A) et de Inf (B).

b- Montrer que l'on a Sup (A) $\leq$ Inf (B) (On pourra raisonner par l'absurde)

Corrigé : a- A est une partie non vide.
De plus, l'ensemble des majorants de A contient B et donc c'est une partie non vide, ce qui signifie que A est majorée.
A étant une partie non vide et majorée, elle admet une borne supérieure.
On fait le même raisonnement pour montrer que B admet une borne inférieure.

b- On va raisonner par l'absurde.

Supposons que sup(A)>inf(B).
Entre deux réels, on peut toujours trouver un autre réel donc : $\exists\varepsilon > 0$, inf(B)<inf(B)+ε<sup(A)
Par caractérisation de la borne inférieure, on sait que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists b \in B$, inf(B)<b<inf(B)+ε.
Donc on en déduit que : $\exists b \in B$, b<sup(A).
Entre deux réels, on peut toujours trouver un autre réel donc :

$$\exists\varepsilon' > 0\ b < \sup(A) - \varepsilon' < \sup(A)$$

Par caractérisation de la borne supérieure, on sait que :

$$\forall\varepsilon' > 0\ \exists a \in A,\ \sup(A) - \varepsilon' < a < \sup(A)$$

Donc on en déduit que : $\exists a \in A,\ b < a$.
Or ceci est absurde car par hypothèse, on a : $\forall(a,b) \in A \times B,\ a \leq b$.
On en conclut que : $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 9. Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\sup\limits_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A$.

Corrigé : A étant bornée, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Par définition, on a d'une part : $\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in A,\ \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \sup(A)$.

Et d'autre part, $\forall\varepsilon > 0\ \exists y \in A,\ \inf(A) \leq y \leq \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.

La deuxième inégalité s'écrit aussi : $-\inf(A) - \frac{\varepsilon}{2} \leq -y \leq -\inf(A)$.

En particulier, on obtient en combinant ces deux résultats que :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists(x,y) \in A^2, \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à remplacer x-y par $|x-y|$.
Il faut distinguer deux cas :

Cas 1- $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \geq 0$

Tous les termes de l'inégalité étant positifs, on peut les remplacer par leur valeur absolue.
Cela nous donne donc : $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \leq |x-y| \leq \sup(A) - \inf(A)$.

Cas 2- $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < 0$

Ce cas n'est pas important.
En effet, prenons ε' comme dans le cas précédent, on a alors :

$$\exists(x,y)\in A^2, 0\leq \sup(A)-\inf(A)-\varepsilon'\leq x-y=|x-y|\leq \sup(A)-\inf(A)$$
En particulier, $\exists(x,y)\in A^2, \sup(A)-\inf(A)-\varepsilon\leq |x-y|\leq \sup(A)-\inf(A)$.
D'où le résultat cherché.
En fait, lorsque l'on cherche à démontrer des inégalités de ce type, le problème se pose uniquement pour ε proche de 0.
On a donc démontré que :
$$\forall\varepsilon>0\ \exists(x,y)\in A^2, \sup(A)-\inf(A)-\varepsilon\leq |x-y|\leq \sup(A)-\inf(A)$$
Cela signifie bien par caractérisation de la borne supérieure que :
$$\sup_{(x,y)\in A^2}|x-y|=\sup A-\inf A$$

Exercice 10. Soient X et Y deux ensembles non vides, et f une application de $X\times Y$ dans $\mathbb{R}$ majorée. Montrer que :
$$\operatorname{Sup}_{(x,y)\in X\times Y} f(x;y)=\operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)$$

Corrigé : a- Ces bornes supérieures existent.

b- Posons F la fonction de X dans $\mathbb{R}$ définie par : $x\mapsto F(x)=\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)$.

Alors $\operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)=\operatorname{Sup}_{x\in X} F(x)$.
Soit $(x_0;y_0)$ un élément de $X\times Y$.
On a : $f(x_0;y_0)\leq F(x_0)\leq \operatorname{Sup}_{x\in X} F(x)\leq \operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)$

Donc, $\operatorname{Sup}_{(x,y)\in X\times Y} f(x;y)\leq \operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)$
Montrons l'inégalité inverse.
On a : $\forall(x;y)\in X\times Y,\quad \operatorname{Sup}_{(x,y)\in X\times Y} f(x;y)\geq f(x;y)$
$$\geq F(x)$$
$$\geq \operatorname{Sup}_{x\in X} F(x)$$
$$\geq \operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)$$
On en déduit l'égalité :
$$\operatorname{Sup}_{(x,y)\in X\times Y} f(x;y)=\operatorname{Sup}_{x\in X}\left(\operatorname{Sup}_{y\in Y} f(x;y)\right)$$

Exercice 11. 1- Déterminer E (n) pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Déterminer E (x) pour $x\in[\,n\,;\,n+1\,[$ avec $n\in\mathbb{N}$.
Prouver que pour tout réel x et tout entier relatif n on a : E (x + n) = E (x) + n.
Faire la représentation graphique de cette fonction sur [- 3 ; 3].
Prouver que pour tout x, on a : $x-1<E(x)\leq x$.
En déduire la limite de $\dfrac{E(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Calculer la limite de $x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers 0.

2- Étudier la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :
$f(x) = \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{a}{x}E\left(\frac{x}{b}\right)$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Corrigé : 1- $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \le n < n+1$ donc $E(n) = n$.

Soit $x \in [n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $n \le x < n+1$, donc $E(x) = n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a : $E(x) \le x < E(x)+1$ donc $E(x)+n \le x+n < E(x)+n+1$.

On en déduit que : $E(x+n) = E(x)+n$.

Prouver que pour tout x, on a : $x - 1 < E(x) \le x$.

Par définition, on a $E(x) \le x < E(x)+1$ donc $E(x) \le x$ et $x-1 < E(x)$, et ainsi on a bien : $x-1 < E(x) \le x$.

D'après ce qui précède, on a pour $x > 0$, $1-\frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le 1$ et pour $x < 0$, $1-\frac{1}{x} > \frac{E(x)}{x} \ge 1$.

On en déduit, par le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{E(x)}{x} = 1$.

Posons $u = \frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{E(u)}{u} = 1$.

Posons $u = 10^n x$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{E(10^n x)}{10^n x} = \lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{E(u)}{u} = 1$.

2- Posons $u = \frac{b}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{b}{a}\times\frac{E(u)}{u} = \frac{b}{a}\times\lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{E(u)}{u} = \frac{b}{a}$.

Posons $u = \frac{x}{b}$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{a}{b}\times\frac{E(u)}{u} = \frac{a}{b}\times\lim\limits_{u\to\infty}\frac{E(u)}{u} = \frac{a}{b}$.

Annexe
Repères chronologiques, références

- environ -30000 ans : Technique de l'entaille.

- V^e siècle av. J.C. : Pythagore, irrationalité de $\sqrt{2}$.

- III^e siècle av. J.C. : Euclide fonde la méthode axiomatique, Archimède donne :

$$3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{10}{70}$$

- I^{er} siècle : Les chinois connaissent les nombres négatifs.

- III^e siècle : Diophante calcule sur des fractions, en dépit d'Euclide.

- IV^e siècle : Le zéro est « inventé » en Inde.

- 1484 : N. Chuquet introduit les nombres négatifs en Europe.

- 1545-1560 : Introduction des nombres imaginaires par Cardan et Bombelli.

- 1637 : Descartes, Géométrie analytique : un pont se crée entre algèbre et géométrie.

- 1760 : Lambert démontre que π est irrationnel.

- 1800 : Gauss introduit le plan complexe.

- 1843 : Hamilton « invente » les quaternions.

- 1858 : Cayley, calcul matriciel.

- 1830-1872 : Cauchy, Dedekind, définition précise des nombres réels.

- 1882 : Von Lindemann démontre la transcendance de π.

- Fin XIX^e-début XX^e : Cantor, Peano, Zermelo, etc...: théorie des ensembles, définition ensembliste de $\mathbb{N}$, nombres transfinis.

- 1920-1930 : Heisenberg, Dirac: naissance de la mécanique quantique. Les nombres non-commutatifs envahissent la Physique.

- Fin du XX^e siècle : La géométrie non-commutative jette un nouveau pont entre l'algèbre et la géométrie.

Chapitre 10

FONCTION D'UNE VARIABLE REELE

0 – PRESENTATION HISTORIQUE

La notion de limite fait son apparition dans un ouvrage du mathématicien anglais **B. Robins** intitulé *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and Prime and Ultimate Ratios* (1735). **Robins** essaie de préciser et de clarifier l'expression un peu obscure de **Newton** (1642-1727) « premières et dernières raisons », en parlant de *limites* vers quoi tendent, sans jamais les atteindre, des rapports de quantités variables ; il a dû soutenir une controverse contre son compatriote **J. Jurin**, newtonien orthodoxe et sourcilleux, pour qui les premières et dernières raisons étaient effectivement atteintes (à l'instant de naissance ou d'évanouissement).

I. Newton

C. Maclaurin, dans son *Treatise of Fluxions* (1742) reprend l'interprétation des «premières et dernières raisons» de **Newton** en termes de limites ; cependant il fonde le calcul infinitésimal sur la notion de fluxion (vitesse instantanée) et non sur celle de limite. Au contraire, **d'Alembert**, dans l'article « Différentiel » de *L'Encyclopédie* , vol. IV, 1754, présente la notion de limite comme la « vraie métaphysique du calcul différentiel » : il y définit le rapport différentiel dy/dx comme la limite du rapport des accroissements finis de y et de x lorsque ces accroissements tendent vers 0, et il insiste sur le fait que l'on ne doit pas séparer les « différentielles » dy et dx. Comme pour ses prédécesseurs **Robins** et **Maclaurin**, le langage de **D'Alembert** est entièrement géométrique, et la notion de limite n'est pas très clairement définie : on dit simplement que le rapport considéré peut devenir aussi proche que l'on veut de sa limite, ou encore qu'une « grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près qu'une quantité donnée, si petite qu'on puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable » (on remarque que, pour **d'Alembert**, la limite est approchée d'un seul côté). Cependant, **d'Alembert** prend soin d'établir l'unicité de la limite.

La mise en œuvre de la notion de limite au XVIIIe siècle se heurtait à un certain nombre d'obstacles : le langage géométrique ne fournissait pas un domaine numérique homogène où développer la théorie, et la notion générale de fonction n'était pas encore assimilée. Il était donc difficile de concevoir clairement comment une grandeur ou un rapport variable tendaient vers leurs limites. Le concept de limite s'est progressivement clarifié au XIXème siècle : dès 1800, **C. F. Gauss** avait une conception extrêmement claire de la limite d'une suite de nombres réels $(a_n)_n$, puisqu'il la définit (dans un travail inédit *Notions fonda-*

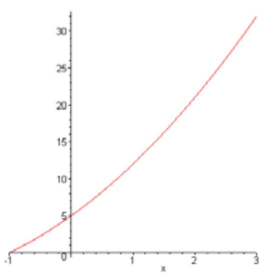
mentales sur la théorie des suites) comme la valeur commune à lim sup a_n et lim inf a_n lorsque ces deux limites extrêmes, qui sont définies de manière précise, coïncident. **A. L. Cauchy** a imposé la notion de limite à la base du calcul infinitésimal ; la définition qu'il en donne est encore un peu vague : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres » (résumé des «leçons» données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1823); mais il introduit une notation lim pour la limite, et il montre sur des exemples numériques comment se comportent les limites.

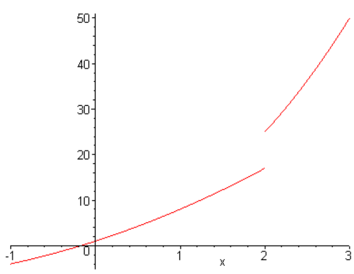
La définition très précise de limite que l'on donne encore dans les cours remonte à **Weierstrass** (1815-1897), promoteur du « style des epsilons ». Pour que la théorie soit entièrement claire, il ne manque alors qu'une théorie satisfaisante des nombres réels, qui permettrait d'établir l'existence d'une borne supérieure pour une partie non vide majorée et de démontrer le critère de **Cauchy**, admis jusqu'alors comme une évidence; diverses théories des nombres réels ont été élaborées vers 1860-1870 (**Dedekind**, **Weierstrass**, **Cantor**).

Cauchy (1789-1857) publia en 1821 son Cours d'analyse qui eut une très grande audience et constitua le premier exposé rigoureux sur les fonctions numériques. Rénovant l'analyse fonctionnelle, il formalise, en particulier, les notions :

- De limite : si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.
- de fonction : lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend le nom de variable indépendante; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.
- de continuité sur un intervalle : (h désignant une quantité infiniment petite) : lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x + h) - f(x) est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit.

Intuitivement et graphiquement, on décrit la courbe représentative de f sans lever le crayon : pas de "trous". Sur le schéma de gauche, on a un arc de courbe "continu", à droite, il y a discontinuité au point x = 2.





- de dérivabilité (d'une fonction continue) : si, lorsque h devient infiniment petit le rapport aux différences

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

admet une limite finie, on le note $f'(x)$, c'est une fonction de x, appelée fonction dérivée.

Ces définitions permettent à Cauchy d'être le premier à établir rigoureusement la formule de **Taylor** en précisant les conditions de convergence vers la fonction développée. Toutefois, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas encore construit. Un nombre réel, à cette époque, est un nombre non imaginaire : entier, fractionnaire ou irrationnel. Les nombres π et e sont irrationnels depuis **Euler** et **Lambert** mais pas encore transcendants. Il faudra attendre **Lindemann** et **Liouville**. Le flou entourant les nombres "réels" conduit Cauchy à des conclusions pouvant apparaître comme peu rigoureuses, voire fausses, comme, par exemple, son résultat sur la somme d'une série de fonction.

Cauchy utilisait implicitement que, hormis en quelques points singuliers, toute fonction continue admet une dérivée. **Riemann**, puis **Bolzano** et **Weierstrass** donneront un exemple de fonction continue en tout point d'un intervalle et n'étant pourtant dérivable en aucun point.

Cauchy énonce en l'illustrant mais sans le démontrer le théorème des valeurs intermédiaires :

Si une fonction f est continue entre les limites a et b et que l'on désigne par k une quantité intermédiaire entre f(a) et f(b), on pourra toujours satisfaire l'équation f(x) = k pour au moins une valeur de x comprise entre a et b.

1- Vocabulaire

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) ou parfois à valeurs dans $\mathbb{C}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs complexes).

Si f et g sont deux fonctions et λ un scalaire, $f+g$ est la fonction : $x \mapsto f(x)+g(x)$. λf est la fonction : $x \mapsto \lambda f(x)$. Ces deux opérations confèrent à l'ensemble des fonctions définies sur le même ensemble une structure d'espace vectoriel (voir le chapitre Espaces Vectoriels). La fonction fg est la fonction : $x \mapsto f(x)g(x)$. La fonction $f \circ g$ est la fonction : $x \mapsto f(g(x))$. La fonction $|f|$ est la fonction : $x \mapsto |f(x)|$.

Une fonction f à valeurs réelles est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$.

Une fonction f à valeurs réelles est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$.

Une fonction f à valeurs réelles est bornée si elle est majorée et minorée. On peut écrire aussi :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ |f(x)| \leq M$$

Cette dernière définition s'applique aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

Une fonction f à valeurs réelles admet un maximum si : $\exists x_0 \in D_f,\ \forall x \in D_f,\ f(x) \leq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in D_f}{\mathrm{Max}}\ f(x)$, ou plus succinctement, $f(x_0) = \underset{x}{\mathrm{Max}}\, f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un minimum si : $\exists x_0 \in D_f,\ \forall x \in D_f,\ f(x) \geq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in D_f}{\mathrm{Min}}\ f(x)$, ou plus succinctement, $f(x_0) = \underset{x}{\mathrm{Min}}\, f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un extremum si elle admet un maximum ou un minimum.

Le maximum, minimum ou extremum est dit local en remplaçant précédemment $\forall x \in D_f$ par $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \left]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right[\bigcap D_f$.

Autrement dit, la propriété n'est vérifiée que sur un intervalle autour de x_0 et non sur l'ensemble de définition de f.

Une fonction à valeurs réelles peut être bornée sans admettre de maximum ou de minimum, mais seulement une borne supérieure ou inférieure (penser à $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ qui admet 1 comme maximum et 0 comme borne inférieure mais non comme minimum). Ces bornes sont notées respectivement $\underset{x \in D_f}{\mathrm{Sup}}\, f(x)$ ou plus simplement $\mathrm{Sup}\, f$, et $\underset{x \in D_f}{\mathrm{Inf}}\, f(x)$ ou plus simplement $\mathrm{Inf}\, f$.

Une fonction f est paire si :

1- D_f est symétrique par rapport à 0
2- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.

L'ensemble des fonctions paires est stable par les deux opérations d'addition des fonctions et de multiplication des scalaires ; il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions. (voir le chapitre Espaces Vectoriels).

Une fonction f est impaire si :

1- D_f est symétrique par rapport à 0
2- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Il s'agit également d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions. (voir le chapitre Espaces Vectoriels).

Une fonction est périodique de période T si : $\forall x \in D_f,\ f(x + T) = f(x)$.

Une fonction est lipschitzienne de rapport k ou k-lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in D_f^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\ |x - y|$$

(**Lipschitz**, mathématicien allemand, 1832-1903)

On dit que la propriété P est vraie « au voisinage » de ω lorsque :

- Pour $\omega \in \mathbb{R}$: il existe $\alpha > 0$ tel que P est vraie sur $]\omega-\alpha,\omega[\ \cup \ ]\omega,\omega+\alpha[$
- Pour $\omega = +\infty$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $]\alpha;+\infty[$
- Pour $\omega = -\infty$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $]-\infty,\alpha[$.

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles ; x_0 est un réel tel que $x_0 \in D_f$, ou x_0 est une borne de D_f.

2- Limites

Définition : le réel x_0 est adhérent à D_f (ou x_0 appartient à l'adhérence de D_f) signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\bigcap D_f \neq \varnothing$$

Exemple : L'adhérence de]-1,10] est [-1,10].

La question de limite de f en un réel x_0 ne se pose que si x_0 est un point adhérent à D_f.

Les définitions « en français » des limites sont les suivantes :

Soient x_0 et l deux réels.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ signifie que l'on peut rendre f(x) aussi voisin que l'on veut de l à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de x_0.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ signifie que l'on peut rendre f(x) aussi voisin que l'on veut de l à la seule condition de prendre x suffisamment grand.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment grand.

Définitions analogues avec $-\infty$ ...

Ces définitions deviennent avec le langage mathématique :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left(\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow f(x) > A\right)$$

...

Exemples : Démontrer à l'aide de la définition « avec les ε » : $\lim\limits_{x \to 1}(2x+4) = 6$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+1) = 5$.

Remarque

L'expression $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (x_0 fini ou infini, l réel) se traduit aussi par :

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)-l)=0 \text{ ou } f(x) = l+\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemples :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ f(x) = x & \text{pour } x \in]1, +\infty[\end{cases}$. Alors, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = 1 & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ g(1) = 2 & \\ g(x) = x & \text{pour } x \in]1, +\infty[\end{cases}$. Alors, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ n'existe pas mais $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} g(x) = 1$.

Théorème : La limite, si elle existe, est unique.

Démonstration : Par l'absurde dans le cas où x_0, l et l' sont finis :

Soit f une fonction admettant l et l' comme limite en x_0, avec $l \neq l'$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}|l - l'|$. Il existe η_1 et η_2 réels strictement positifs tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[, \ |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$\forall x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[, \ |f(x)-l'| < \varepsilon$$

Pour $x \in]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\cap]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[$, on a :

$$|l-l'| \leq |l-f(x)|+|f(x)-l'|<2\varepsilon$$

On a donc bien une contradiction. Cqfd.

3- Opérations sur les limites

Somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction f+g admet une limite dans chacun des cas décrits dans le tableau ci-dessous.

Lim g \ Lim f	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $f \times g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous.

($\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de la limite finie.)

Lim f / Lim g	$l\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\in\mathbb{R}^*$	$l.l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque : Si f et g ont une limite dont l'une est nulle et l'autre infinie : FI

Quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie), la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-dessous.

Lim f / Lim g	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\in\mathbb{R}^*$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI

Remarques : 1- Si l'= 0, on peut conclure lorsque g garde un signe constant voisinage du « point » où l'on cherche la limite :

$$\text{si } g(x)>0\text{, alors } \frac{1}{g(x)} \text{ tend vers } +\infty\text{ ; si } g(x)<0\text{, alors } \frac{1}{g(x)} \text{ tend vers } -\infty$$

2- Règle de comparaison puissance, logarithme et exponentielle :

$$\text{pour tout } \alpha>0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$$

Formes indéterminées

Les situations marquées FI dans les tableaux sont appelées (de façon significative) : *formes indéterminées*. Usuellement, on dit qu'elles sont au nombre de 4 : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $+\infty-\infty$.

Attention, les « formes » 1^∞, $+\infty^0$ et 0^0 sont aussi des formes indéterminées.

4- Énoncés usuels sur les limites

x_0 désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

a- Comparaison

Hypothèse 1 inégalités au voisinage de x_0	Hypothèse 2 comportement lorsque x tend vers x_0	Conclusion
$u(x) \leq f(x)$	u tend vers $+\infty$	f tend vers $+\infty$
$f(x) \leq u(x)$	u tend vers $-\infty$	f tend vers $-\infty$
$\|f(x)-l\| \leq u(x)$	u tend vers 0	f tend vers l
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	u et v tendent vers la même limite l	f tend vers l (théorème des gendarmes)
$f(x) \leq g(x)$	f et g admettent des limites en x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Notons que, dans la conclusion du dernier résultat, on n'obtient qu'une inégalité large entre les limites, même si $f(x)<g(x)$.

b- Limite d'une fonction composée

Théorème : Soient x_0, l, l' des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$ et les applications f et g :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

où E est un intervalle contenant x_0, x_0 éventuellement exclu

F est un intervalle contenant l, l éventuellement exclu.

Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ et si $\lim\limits_{l} g = l'$, alors $\lim\limits_{x_0} g \circ f = l'$.

c- Limite à droite, limite à gauche

Définitions : Soient une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f et un réel x_0.

1.Si la restriction de f à $D_f \cap]x_0, +\infty[$ admet une limite (finie ou non), cette limite est appelée limite de f à droite en x_0. On la note $\lim\limits_{x_0^+} f$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

2. Si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, x_0[$ admet une limite (finie ou non), cette limite est appelée limite de f à gauche en x_0. On la note $\lim\limits_{x_0^-} f$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Il est clair que si f admet l comme limite en x_0, f admet l comme limite à gauche et à droite en x_0.

Théorème de la limite monotone :

Soit f une fonction croissante sur un intervalle]a; b[.

- Si f est majorée, alors f admet une limite à gauche finie en b.
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

5- Continuité

Soit une fonction f définie en x_0 et admettant une limite l en x_0 :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=l$$

cela signifie que, quel que soit le réel ε strictement positif, on peut trouver un intervalle contenant 0 sur lequel :

$$|f(x_0+h)-l| \leq \varepsilon$$

en particulier pour h = 0 :

$$|f(x_0)-l| \leq \varepsilon$$

Supposons $|f(x_0)-l| \neq 0$. Posons alors $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)-l|}{2}$, $|f(x_0)-l| \leq \dfrac{|f(x_0)-l|}{2}$, ce qui est impossible.

Donc, $f(x_0) = l$. On obtient ainsi :

Théorème :

Si une fonction f est définie en x_0 et admet une limite en x_0, cette limite est nécessairement $f(x_0)$.

Définition : Si la limite de f lorsque x tend vers x_0 réel est égale à $f(x_0)$, on dit que f est continue en x_0.

Remarque 1 : Lorsque f est définie en x_0, il est équivalent de dire que la limite de f existe en x_0 et que f est continue en x_0.

Remarque 2 : La notion de continuité bien qu'intuitive est une notion essentielle en Mathématiques qu'il faut manier avec attention. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$f(x)=\dfrac{1}{q}$ si $x=\dfrac{p}{q}$ non nul irréductible, $q>0$

$f(x)=1$ si $x=0$

$f(x)=0$ si x est irrationnel

est discontinue sur $\mathbb{Q}$, continue sur $\mathbb{Q}^c$…

Exemple : Reprenons l'exemple vu au paragraphe 2 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=1 & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ f(x)=x & \text{pour } x \in]1,+\infty[\end{cases}$.

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=1 & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ g(1)=2 & \\ g(x)=x & \text{pour } x \in]1,+\infty[\end{cases}$.

La fonction g n'est pas continue en 1 car elle n'a pas de limite en ce réel.

Le problème de continuité ne se pose pas à priori sur f en 1 car f n'est pas définie en ce réel.

Mais, $\lim_{x\to 1} f(x)=1$. Nous pouvons alors envisager de prolonger f par continuité en 1 en posant : $\begin{cases} f(x)=1 & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=1 & \\ f(x)=x & \text{pour } x \in]1,+\infty[\end{cases}$. La « nouvelle » fonction f est alors définie et continue en 1.

Théorème : Il y a équivalence entre :

1- f tend vers l lorsque x tend vers x_0

2- Pour toute suite $(a_n)_n$ tendant vers x_0, $(f(a_n))_n$ tend vers l.

Dans le cas des fonctions continues, cette équivalence s'exprime de le façon suivante :

Théorème : Il y a équivalence entre :

1- f est continue en x_0

2- Pour toute suite $(a_n)_n$ tendant vers x_0, $(f(a_n))_n$ tend vers $f(x_0)$.

Définitions : Une fonction f **continue à droite** en x_0 est une fonction définie en x_0 et telle que sa limite à droite en x_0 est égale à $f(x_0)$.

Une fonction f **continue à gauche** en x_0 est une fonction définie en x_0 et telle que sa limite à gauche en x_0 est égale à $f(x_0)$.

Propriétés immédiates : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de $D_f \cap D_g$ tel que f et g soient continues en x_0.

Alors, f+g, fg, kf (où k est une constante réelle) sont continues en x_0.

Si de plus $g(x_0)$ est non nul, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$. On a :

$$\lim_{x_0} f = f(x_0) \text{ et } \lim_{f(x_0)} g = g(f(x_0))$$

D'après le théorème sur la composition de fonction ayant des limites, on déduit :

$$\lim_{x_0} g \circ f = g(f(x_0))$$

donc $g \circ f$ est continue en x_0. D'où :

Propriété : Si f est une fonction continue en x_0 et si g est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de D_f tel que f soit continue en x_0. Alors, f est bornée sur un voisinage de x_0.

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de D_f tel que f soit continue en x_0 et $f(x_0)>0$. Alors, f est strictement positive sur un voisinage de x_0.

6- Continuité sur un ensemble, sur un intervalle

Définition : f est **continue sur un ensemble D** lorsque f est continue en tout point de D.

Théorème : L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration : La propriété à prouver est équivalente aux suivantes :

i) $\forall y \in f(I), \forall z \in f(I), [y,z] \subset f(I)$

Ceci découle de la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$, vue dans le chapitres sur les Réels.

ii) $\forall a \in I, \forall b \in I, [f(a),f(b)] \subset f(I)$

Ceci est obtenu à partir de i) en posant $y = f(a)$ et $z = f(b)$.

iii) $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) \leq z \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b], z = f(c)$

On a juste traduit dans ii la phrase : $[f(a), f(b)] \subset f(I)$

iv) $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) \leq 0 \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b], f(c) = 0$

Découle immédiatement de iii avec $z = 0$. Inversement, iii s'en déduit en raisonnant sur $g = f - z$.

v) $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a)<0<f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[, f(c)=0$

Ce dernier énoncé est connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. C'est donc ce dernier qu'il s'agit de démontrer.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant a et b telle que $f(a)f(b)<0$. Alors il existe c élément de $]a,b[$ ou $]b,a[$ tel que $f(c) = 0$.

Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard. Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX$^{\text{eme}}$. En 1817, Bolzano (1781-1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique. Notons que la définition de Cauchy de la continuité a été publiée en 1821.

Démonstration :
Soit $A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$.
A contient a, donc est non vide, et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure c, $c \leq b$.
Montrons que c convient :

- Si $f(c) < 0$, alors f est strictement négative dans un voisinage $]c-\eta, c+\eta[$ de c, donc $c+\dfrac{\eta}{2}$ appartient à A, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A.

- Si $f(c) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage $]c-\eta, c+\eta[$ de c. Cependant, c étant la borne supérieure de A, il existe un élément x_0 de A dans $]c-\eta, c+\eta[$, donc tel que $f(x_0) \leq 0$, ce qui est contradictoire avec $f(x_0)>0$.

Ainsi, on a bien $f(c) = 0$

Théorème : L'image par une fonction continue d'un *intervalle fermé borné* est un *intervalle fermé borné*.

Corollaire : Soit f une fonction continue sur *intervalle fermé borné* [a, b]. Alors f atteint ses bornes :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R} / f([a,b])=[m, M] \text{ et } \exists x_0 \in [a, b], \exists x_1 \in [a, b] / m=f(x_0), M=f(x_1)$$

Définition : Soient a et b deux réels distincts tels que $a<b$.
On pose $I=[a, b]$. I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f est continue par morceaux sur I si f est continue sur I sauf en un nombre fini de points de I, points en lesquels f admet une limite à droite et une limite à

gauche finies.
Cela signifie qu'il existe un nombre fini de valeurs de I, $x_1=a<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ telles que :

- $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- f admet des limites finies à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}

Remarques : 1- La suite de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ est appelée une subdivision de I
2- Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I

7- Continuité et dérivabilité

Définitions : Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle contenant x_0.

On dit que f est dérivable au point x_0 si et seulement s'il existe un intervalle I contenant 0 tel que :

$$\forall h \in I,\ f(x_0+h)=a+bh+h\varepsilon(h),$$

où a et b sont des réels et ε une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Le réel b (dont on admet l'unicité) est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0.

On dit aussi que $a + bh + h\varepsilon(h)$ est un **développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0** de la fonction: $h \mapsto f(x_0 + h)$.

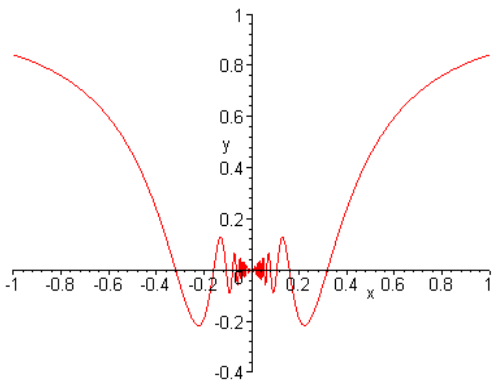
Faisons h = 0 dans l'égalité précédente, nous avons : $f(x_0) = a$,
d'après les théorèmes sur les limites :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=a+\lim_{h\to 0}(bh)+\lim_{h\to 0} h\varepsilon(h)=a$$

donc $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$ ce qui signifie que f est continue en x_0. Énonçons ce résultat :

Théorème :
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Remarque : La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point, par exemple la fonction valeur absolue en 0.
Il existe des fonctions continues en x_0 n'admettant aucune dérivée à droite et à gauche de x_0, par exemple $x \mapsto x.\mathrm{Sin}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x_0=0$.



Graphe de $x \mapsto x.\mathrm{Sin}\left(\frac{1}{x}\right)$.

8- Bijection

Propriétés générales sur les bijections :

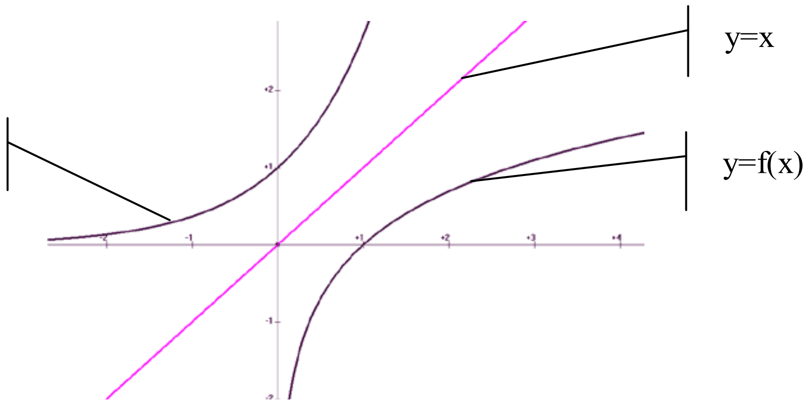
1- Soit f une bijection de A sur B. Alors f^{-1} est une bijection de B sur A.

2- Soient f une bijection de A sur B et g une bijection de B sur C. Alors $g \circ f$ est une bijection de A sur C et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Représentation graphique d'une bijection et de sa réciproque

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f soit bijective de D_f sur son image. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x (première bissectrice).

Exemple :



9- Continuité et Bijection

1- Composition de fonctions dérivables

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Étudions si $g \circ f$ est dérivable en x_0.

Puisque f est dérivable en x_0, il existe un intervalle I contenant 0 tel que :

$$\forall h \in I,\ f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h) \qquad (1)$$

α étant une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$.

Puisque g est dérivable en $f(x_0)$, il existe un intervalle J contenant 0 tel que :

$$\forall k \in J,\ g[f(x_0) + k] = g[f(x_0)] + kg'[f(x_0)] + k\varepsilon_2(k) \qquad (2)$$

β étant une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(k) = 0$.

D'après (1), on peut poser $f(x_0+h) = f(x_0)+k$ avec $k = hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)$. L'égalité (2) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} g[f(x_0+h)] &= g[f(x_0)] + [hf'(x_0) + h\alpha(h)]\, g'[f(x_0)] + h\varepsilon_3(h) \\ &= g[f(x_0)] + hf'(x_0) \times g'[f(x_0)] + h\varepsilon(h) \\ &= g \circ f(x_0) + h[g' \circ f(x_0) \times f'(x_0)] + h\varepsilon(h)\ (3) \end{aligned}$$

où ε_3 et ε sont des fonctions de h de limite 0 quand h tend vers 0.

Le développement limité (3) nous montre que $g \circ f$ est dérivable en x_0, le nombre dérivé étant $g'\circ f(x_0)\times f'(x_0)$.

Si x_0 décrit un intervalle, on peut conclure :

Théorème :

Si f est dérivable sur un intervalle et si g est dérivable sur l'image par f de cet intervalle, alors $g\circ f$ est dérivable sur le même intervalle que f et l'on a :

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\times f'$$

Remarque : La démonstration du théorème précédent a été faite en utilisant les « développements limités d'ordre 1 ». Nous aurions pu le démontrer en utilisant la définition d'un nombre dérivé via la limite d'un taux de variations.

2- Continuité et bijection

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *continue* et *strictement monotone* sur un *intervalle* I. Alors :

a- f est une bijection de I sur f(I)

b- f^{-1} est continue, strictement monotone « de même sens de variation que f »

c- si f est dérivable en x_0 élément de I et $f'(x_0)$ non nul, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *dérivable* sur un *intervalle* I, de dérivée strictement positive (ou strictement négative) sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors, f est une bijection de I sur f(I).

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bijective de I sur f(I), dérivable sur I telle que f ' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et :

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soient f une application de]a,b[dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de]a,b[. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f admette 0 pour limite en x_0 est que |f| admette 0 pour limite en x_0.

Exercice 2. 1- En utilisant la définition de la continuité sous forme d'une assertion quantifiée, montrer que la fonction identité est continue sur $\mathbb{R}$.

2- En déduire que pour tout entier n la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3- Conclure que les fonctions polynomiales sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Etudier la limite éventuelle des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ en $x_0=1$

b. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)^2}{\sin(2x)}$ en $x_0=0$

c. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$ en $x_0=5$

d. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2-x}$ en $x_0=0$

e. $x \mapsto \sqrt{x^2-1}-x$ en $+\infty$

f. $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

g. $x \mapsto \sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}$ en $+\infty$

h. $x \mapsto \sin(x)\ln(|x|)$ en $x_0=0$

Exercice 4. Etudier la fonction : $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}\right)$.

Exercice 5. Etudier la fonction : $x \mapsto \dfrac{1+\sin(x)}{2\sin(x)-1}$.

Exercice 6. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x)=x^2$ si $x \le 0$ et $f(x)=x\ln(x)$ si x>0.

Exercice 7. Application du théorème des valeurs intermédiaires
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair.

1- Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que : $P(a)\times P(b)<0$.

2- En déduire que P a au moins une racine réelle.

Exercice 8. Soit f une application réelle et k un réel positif. On dit que f est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$ si :

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \ \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ |f(x_1)-f(x_2)| \le k\,|x_1-x_2|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel positif k tel que f est lipschitzienne de rapport k.

1- Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$

2- Montrer que toute application lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soient f et g les fonctions définies par : $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.
Donner le domaine de définition et le sens de variation de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

EXERCICES

Exercice 1. Etudier la limite éventuelle de chacune des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :

1- $f(x)=\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $(x_0=2)$

2- $g(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$ $(x_0=9)$

3- $h(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2(\pi x)}$ $(x_0=0)$

4- $t(x)=\dfrac{\sin(x^3)}{\sin^2(x)}$ $(x_0=0)$

5- $s(x)=\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ $\left(x_0=\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 2. Démontrer les résultats suivants à l'aide de la définition :

a- $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$

b- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$

c- $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+1)=9$

d- $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=3$

Exercice 3. a- Etudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \mapsto x-E(x)$$

b- Pour quelles valeurs du réel a la fonction :

$$g(x) = [x - E(x)][x - E(x) - a]$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Quel est alors son graphe ?

Exercice 4. Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points indiqués :

1- $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ en 0

2- $f_2(x)=\begin{cases}\sin(x) & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est continue sur son domaine de définition, puis étudier si elle est prolongeable par continuité sur ℝ.

1- $f_1(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$

2- $f_2(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{|x| - 1}$

3- $f_3(x) = \dfrac{\sin(2x)}{|3x|}$

4- $f_4(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 6. Soit f une fonction de ℝ dans ℝ.

1. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en + ∞. (On pourra considérer l'ensemble f(ℝ)).
2. Que se passe-t-il si f est croissante mais non majorée ?

Exercice 7. Soit f une fonction définie sur ℝ. Soit g une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

On suppose qu'il existe un réel x_0 et un réel M tels que pour tout réel x : $x > x_0 \Rightarrow |f(x)| < M$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) g(x) = 0$.

Exercice 8. Soit f une fonction de [0;1] dans ℝ, dérivable et telle que f(0) et f(1) soient égaux. On considère la fonction g suivante :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ f(2x-1) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

1- Montrer que g est continue sur [0,1].
2- A quelle condition g est-elle dérivable sur [0,1] ?

Exercice 9. Soient f, g et h les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x - 1} \qquad g(x) = \frac{x}{x^2 - |x|} \qquad h(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}$$

1- Montrer que f est continue en 0. Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 1 ?
2- Peut-on prolonger g par continuité en 0 ?
3- a- h est-elle continue en 0 ?
b- Calculer : $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.
c- Définir la fonction k qui prolonge h par continuité sur ℝ.

Exercice 10. Montrer à l'aide de la définition que si une fonction f définie sur E est continue en x_0, alors |f| aussi. Etudier la réciproque.

Exercice 11. Montrer que l'équation "$x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$" admet au moins une solution réelle.

Exercice 12. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1- Montrer qu'il existe un réel $a < 0$ tel que $f(a) < 0$ et un réel $b > 0$ tel que $f(b) > 0$.

2- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution.

3- En déduire que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$. Montrer que:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^+ / \ f(x_0) = x_0$$

Exercice 14. Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$ et f, g deux fonctions définies et continues sur [a,b]. On suppose que pour tout réel x de [a,b], $f(x) > g(x)$. Démontrer que :

$$\exists \lambda > 0 \ \forall x \in [a;b], \ f(x) \geq g(x) + \lambda$$

Exercice 15. On pose $a = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ et soit f la fonction réelle définie sur $]-a,a[$ par $f(x) = \tan\left(x^3\right)$.

a- Montrer que f admet une fonction réciproque g dont vous déterminerez l'ensemble de définition.

b- Etudier la dérivabilité de g. Exprimer g'(u) en fonction de u et de g(u).

c- Déterminer les graphes de f et de g dans un repère orthonormé.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1- Etudier les variations de f . f est-elle injective ? surjective ?

2- Montrer que la restriction de f à [-1,1] est une bijection. Déterminer f^{-1}.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.

1- Etudier les variations de f , puis montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. (On ne cherchera pas à calculer explicitement f^{-1}). Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

2- En quels points de J la fonction f^{-1} est-elle dérivable ?

3- Déterminer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$, $f^{-1}(2)$, puis $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$, $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

4- Tracer les graphes de f et f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1 par une fonction g continue sur $[0;+\infty[$.

3- g est-elle dérivable en 0 ? La courbe de g admet-elle une droite asymptote en $+\infty$?

Exercice 19. On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

On note C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormée.

1- Montrer que f est de classe dérivable, de dérivée continue sur $]-1;+\infty[$ et expliciter sa dérivée.

2- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La courbe admet-elle des tangentes horizontales ?

3- Etudier les variations de la fonction sur $]-1;+\infty[$. En déduire le signe de la fonction f.

4- Etudier l'existence d'asymptotes à la courbe et tracer la courbe C_f.

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur I=$]1;+\infty[$ par : $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Démontrer que f est une bijection de I dans I, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 21. Soit $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ définie par $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1- f est-elle injective, surjective ?

2- Montrer que la restriction de f à $[-1,1]$ est une bijection. Déterminer l'expression de la fonction réciproque.

Quelques exercices corrigés

Exercice 22. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel x_0 et un réel M tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, x > x_0 \;\Rightarrow |\, f(x)\,| < M$$

Soit g une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.

Corrigé : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon \in\mathbb{R},\ x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$.

Soit alors ε>0. Posons $\alpha = \max\left(A_{\frac{\varepsilon}{M}}, x_0\right)$.

Alors on a : $x \geq \alpha \Rightarrow |f(x)g(x)| \leq |f(x)||g(x)| < M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

On vient donc de montrer que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha \in\mathbb{R}, x \geq \alpha \Rightarrow |f(x)g(x)| < \varepsilon$, ce qui signifie justement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.

Exercice 23. Etudier la limite éventuelle de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$ au point x_0=9.

Corrigé : Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

On remarque que $x^2-81=(x-9)(x+9)=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)$ pour $x\geq 0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 9} g(x) = \lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)}\right) = \lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{-1}{(\sqrt{x}+3)(x+9)}\right) = -\dfrac{1}{108}$.

Exercice 24. 1- Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en + ∞. (On pourra considérer l'ensemble f($\mathbb{R}$)).

2- Que se passe-t-il si f est croissante mais non majorée ?

Corrigé : 1- f($\mathbb{R}$) est un ensemble non vide et majorée donc f($\mathbb{R}$) admet une borne sup que nous noterons α.

Par caractérisation de la borne supérieure, on a : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists y_\varepsilon \in$, f($\mathbb{R}$) $y_\varepsilon \leq \alpha \leq y_\varepsilon + \varepsilon$.

Ce qui peut s'écrire : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in\mathbb{R},\ f(x_\varepsilon) \leq \alpha \leq f(x_\varepsilon) + \varepsilon$.

Comme de plus, f est croissante, on a ; $\forall x \geq x_\varepsilon\ f(x_\varepsilon) \leq f(x)$, et comme $f(x) \in$ f($\mathbb{R}$), $f(x) \leq \alpha$.

On en déduit que $x \geq x_\varepsilon \Rightarrow f(x) \leq \alpha \leq f(x) + \varepsilon$, soit $x \geq x_\varepsilon \Rightarrow |\alpha - f(x)| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que $\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in\mathbb{R},\ x \geq x_\varepsilon \Rightarrow |\alpha - f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$.

2- f non majorée signifie que : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ f\left(x_0\right) \geq A$.

Comme f est croissante, $x \geq x_0 \Rightarrow f\left(x_0\right) \leq f\left(x\right)$.

On en déduit donc que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x \geq x_0 \Rightarrow f\left(x\right) \geq A$.

Or cela signifie exactement que $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$.

Exercice 25. Soit ϕ la fonction définie par : $\phi\,(x) = \dfrac{\ln\left(|x|^4\right)}{x^4 - 1}$.

1- Déterminer le domaine de définition de cette fonction.

2- Etudier la limite éventuelle de ϕ aux points (-1), 0 et 1.

3- Peut-on prolonger ϕ par continuité à $\mathbb{R}^*$? à $\mathbb{R}$?

Corrigé : 1- On a $D_\phi = \mathbb{R}\{-1, 0, 1\}$.

2- Remarquons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to -1} \phi\left(x\right) = \lim\limits_{x \to -1} \phi\left(x\right)$ car la fonction est paire.

$$\lim_{x \to 1} \phi\left(x\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(x^4\right)}{x^4 - 1} = \lim_{X \to 1} \frac{\ln\left(X\right)}{X - 1} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln\left(1 + u\right)}{u}.$$

On rappelle que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + u\right)}{u} = 1$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \phi\left(x\right) = 1$.

D'autre part, on a : $\lim\limits_{x \to 0} \phi\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(x^4\right)}{x^4 - 1} = \lim\limits_{X \to 0^+} \left(-\ln\left(X\right)\right) = +\infty$.

3- On peut prolonger ϕ par continuité sur $\mathbb{R}^*$ en posant $\phi\left(1\right) = \phi\left(-1\right) = 1$

Par contre, on ne peut pas prolonger ϕ à $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 26. Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points indiqués :

1- $f(x) = \begin{cases} \sin\ x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \exp\dfrac{-1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ au point $x_0 = 0$

2- $g(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ aux points $x_0=0$ et $x_0=\dfrac{1}{3}$

3- $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x rationnel} \\ x & \text{si x irrationnel} \end{cases}$ aux points $x_0=0$ et $x_0=1$.

Corrigé : 1- On a $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sin\left(x\right) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to \infty} \exp\left(-X\right) = 0$.

On en déduit que f est continue en 0.

2- On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to\pm\infty}\frac{E(X)}{X}=1=g(0)$ donc g continue en 0.

On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} xE\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to 3^-}\frac{E(X)}{X}=\frac{2}{3}\neq 1=g\left(\frac{1}{3}\right)$ donc g non continue en $\frac{1}{3}$.

3- Soit $y\in\mathbb{R}$, on a $|h(0)-h(y)|=\begin{cases}0 \text{ si } y \text{ rationnel}\\ |y| \quad \text{sinon}\end{cases}$.

En particulier, $\forall\varepsilon>0,\ |y|\leq\varepsilon\Rightarrow|h(0)-h(y)|\leq\varepsilon$.

Donc h est continue en 0.

Par contre, h n'est pas continue en 1. Pour prouver cela, nous allons écrire la définition de cette propriété et nous allons la nier :

h continue en 1 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall y\in D_h,\ |1-y|<\delta\Rightarrow|h(1)-h(y)|<\varepsilon$

Donc h non continue en 1 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists y\in D_h,\ \left(|1-y|<\delta\right)\wedge\left(|h(1)-h(y)|\geq\varepsilon\right)$

Soit $y\in\mathbb{R}$, on a $|h(1)-h(y)|=\begin{vmatrix}0 \text{ si } y \text{ rationnel}\\ |y| \quad \text{sinon}\end{vmatrix}$.

Soit alors $\varepsilon=\frac{1}{2}$ et $\delta>0$.

On peut trouver un élément y irrationnel tel que $1<y<1+\delta$.

On a donc bien d'une part $|1-y|<\delta$ et d'autre part, $|h(1)-h(y)|=|y|>1\geq\varepsilon$.

On en déduit donc que h n'est pas continue en 1.

Exercice 27. Soit f une fonction continue de [0, 1] dans [0, 1].
Montrer que l'équation f(x) = x possède au moins une solution.
On pourra considérer la fonction g définie par g(x) = x – f(x).

Corrigé : Posons g(x)=f(x)-x.
g est continue sur [0, 1] car composée de fonctions continues sur [0, 1].
Supposons que $\neg\left(\exists x\in[0,1]\ g(x)=0\right)$ c'est-à-dire $\forall x\in[0,1]\ g(x)\neq 0$.
Comme g est une fonction continue, cela implique qu'elle est de signe constant.
On peut donc supposer que $\forall x\in[0,1]\ g(x)<0$ par exemple.
Remarquons que si g(x)>0 alors on s'intéresse à la fonction (-g).
Ainsi, $\forall x\in[0,1],\ x<f(x)$.
Or pour x=1, cela nous donne 1<f(1) ce qui est absurde car par hypothèse, f est à valeur dans [0, 1].
On en conclut que $\exists x\in[0,1],\ f(x)=x$.

Exercice 28. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique.

1- On suppose que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

2- On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Corrigé : 1- Notons T la période de f, et prenons a un réel.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a+nT)=f(a)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $f(a)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(a+nT)=\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=l$.

Finalement, $\forall a \in \mathbb{R}$, f(a)=l donc f est une fonction constante.

2- Notons T la période de f (T>0).

f est continue sur [0, T] donc en particulier, f est bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Soit alors m son minimum sur [0, T] et M son maximum. Soit enfin a un réel.

Il existe un entier n tel que $(a+nT)\in[0,T]$.

En effet, $\forall a \in \mathbb{R},\ E\left(\frac{a}{T}\right)\le \frac{a}{T}< E\left(\frac{a}{T}\right)+1$.

Posons alors $n=-E\left(\frac{a}{T}\right)$ (entier), on a donc :

$$-n \le \frac{a}{T} < -n+1 \Leftrightarrow -nT \le a < -nT+T \Leftrightarrow 0 \le a+nT < T$$

Maintenant, comme $(a+nT)\in[0,T]$, on a $m \le f(a+nT) \le M$.

Or $f(a+nT)=f(a)$ donc $m \le f(a) \le M$.

On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29. On considère une application f continue de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même et admettant 0 pour limite en $+\infty$.

Montrer que pour tout $a \ge 0$, il existe $b \ge a$ en lequel f atteint son maximum sur $[a,+\infty[$.

Corrigé : Soit $a \ge 0$.

f étant à valeur dans $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x)\ge 0$.

Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et ceci s'écrit :

$\forall \varepsilon>0,\ \exists A\ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (x\ge A)\Rightarrow (f(x)\le \varepsilon)$

f est continue sur [0, a] qui est un intervalle fermé bornée, donc f est bornée et atteint ses bornes.

Donc il existe $\tilde{a}\in[0,a]$ tel que $\forall x\in[0,a]\ f(x)\le f(\tilde{a})$.

Posons $\varepsilon = f(a)$, d'après ce qui précède, $\exists A\ge 0, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (x \ge A)\Rightarrow (f(x)\le f(a))$.

Si $A \le a$, alors il suffit de prendre b=a.

Sinon on a A>a, mais f est continue sur [a, A] qui est un intervalle fermé borné donc f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $b\in[a,A]$ en lequel f atteint son maximum sur [a, A].

De plus, puisque $\forall x \ge A,\ f(x)\le f(a)$, on a aussi $\forall x \ge A\ f(x)(\le f(a))\le f(b)$.

On en déduit que f(b) est le maximum de f sur $[a,+\infty[$.

Exercice 30. On considère la fonction f définie par f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

1- Quel est l'ensemble de définition de f ?
2- Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

3- Etudier les variations de f.

4- Montrer que la restriction de f à l'intervalle [2 ;+∞[réalise une bijection de [2 ;+∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

5- Sans calculer f^{-1}, étudier le sens de variation et la dérivabilité de f^{-1}.

6- Tracer l'allure de la représentation graphique de la restriction de f et de f^{-1} dans un même repère.

7- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Corrigé : 1- On a $f(x) = \exp\left(\sqrt{x^2-3x+2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \exp\left(-\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3)\right)$.

La fonction f est définie si et seulement si $P(x) = x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

On peut vérifier que : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

On en conclut que $D_f =]-\infty;1] \cup [2;\infty[$.

2- On a vu que f se met sous la forme : $f(x) = \exp\left(-\sqrt{P}\ln(3)\right)$.

Donc f est dérivable si et seulement si $\sqrt{P}$ est dérivable, c'est-à-dire si et seulement si P ne s'annule pas.

On en déduit donc que f est dérivable sur $D_{f'} =]-\infty;1[\cup]2;\infty[$.

3- f est dérivable sur $D_{f'}$ et on a :

$$\forall x \in D_{f'},\ f'(x) = \frac{-(2x-3)\ln(3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}}\exp\left(-\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3)\right)$$

On voit donc clairement que le signe de f' est le signe de $-(2x-3)$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$2x-3$	-	-	+	+	
$f'(x)$	+			-	
f	$\nearrow$			1 $\searrow$ 0	

4 f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$ et continue, donc f réalise une bijection de $[2;+\infty[$ dans $J = f([2;+\infty[)$.

Il reste à déterminer J :

Tout d'abord, on a $f(2) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3)\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \exp\left(-X\ln(3)\right) = 0$.

On en déduit donc que $J =]0\ ;1]$

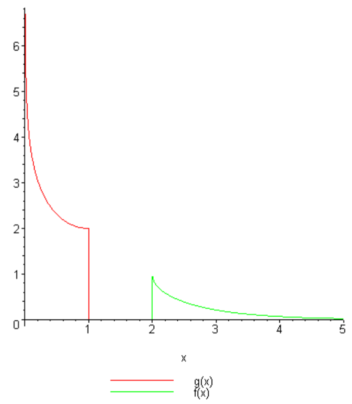
5- Si $f'\left(f^{-1}(x)\right)$ ne s'annule pas, nous avons : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

D'après ce qui précède, si $x \in J$, alors $f^{-1}(x) \in [2;+\infty[$, et donc $f'\left(f^{-1}(x)\right)$ ne s'annule pas.

On en déduit donc que sur J, le signe de $\left(f^{-1}\right)'$ est le même que celui de f'. (cf. résultat de cours).
On a donc le tableau de variations suivant :

x	0 1
$\left(f^{-1}\right)'(x)$	-
f^{-1}	$+\infty$ ↘ 2

6- L'allure de la représentation graphique de la restriction de f et de f^{-1} dans un même repère est :



7- On pose $y = f(x)$ avec $x \in J$ (et donc $y \in]0,1]$) et on cherche à exprimer x en fonction de y.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \exp\left(-\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3)\right) \Leftrightarrow \ln(y) = -\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3)$$

On ne sait pas résoudre cette équation directement, on doit élever au carré :

$$\ln(y) = -\sqrt{x^2-3x+2}\ln(3) \Rightarrow \left(\ln(y)\right)^2 = \left(x^2-3x+2\right)\left(\ln(3)\right)^2$$

$$\left(\ln(y)\right)^2 = \left(x^2-3x+2\right)\left(\ln(3)\right)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = \left(\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2-\left(\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right)^2 = 0$$

Pour simplifier les calculs, on pose : $\alpha = \left(\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right)^2$, on doit donc résoudre :

$$x^2-3x+2-\alpha = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré, le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = 9-4(2-\alpha) = 1+4\alpha$$

On a donc deux solutions : $x_1 = \frac{3-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

En remplaçant alors α par $\left(\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right)^2$, on obtient :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1 + 4\left(\frac{\ln(y)}{\ln(3)}\right)^2}}{2} = \frac{3\ln(3) - \sqrt{(\ln(3))^2 + 4(\ln(y))^2}}{2\ln(3)} \text{ ou } x_2 = \frac{3\ln(3) + \sqrt{(\ln(3))^2 + 4(\ln(y))^2}}{2\ln(3)}$$

On sait que l'on a une unique solution et pour la déterminer, nous allons tout simplement le vérifier en prenant des valeurs particulières pour x et y :

Prenons $y = 1$, alors on doit avoir $x = f^{-1}(y) = 2$.

On a $x_1 = \dfrac{3\ln(3) - \sqrt{(\ln(3))^2}}{2\ln(3)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3\ln(3) + \sqrt{(\ln(3))^2}}{2\ln(3)} = 2$.

On en conclut que $f^{-1}(y) = \dfrac{3\ln(3) + \sqrt{(\ln(3))^2 + 4(\ln(y))^2}}{2\ln(3)}$.

Exercice 31. 1- La fonction partie entière E possède-t-elle la propriété de la valeur intermédiaire ?

2- Trouver une fonction discontinue sur [0 ; 1] qui possède la propriété de la valeur intermédiaire.

Corrigé : 1- Non, en effet prenons par exemple $y = 1,5$.

On a bien $E(1) \le y \le E(2)$ et pourtant, il n'existe pas $c \in \mathbb{R}$ tel que $y = E(c)$ puisque y n'est pas un entier.

2- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$.

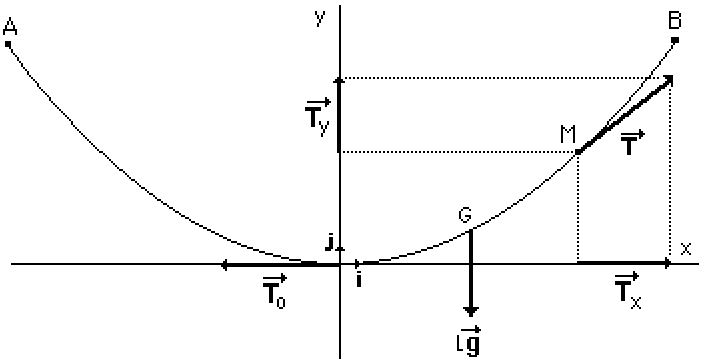
Chapitre 11

FONCTIONS ELEMENTAIRES

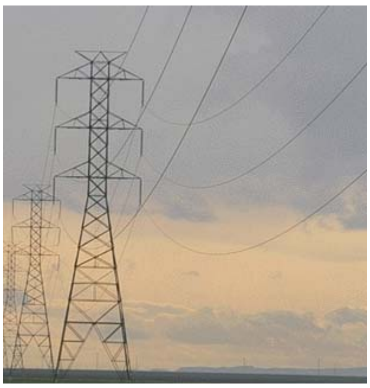
0- Exemple de la chaînette

Galilée fut sans doute le premier à s'intéresser à la *chaînette* qu'il prit pour un arc de parabole. **Jean Bernoulli**, **Huygens** et **Leibniz** trouvèrent (indépendamment) en réponse au défi lancé par **Jakob Bernoulli**, sa véritable nature en 1691 : engendrée par un cosinus hyperbolique.

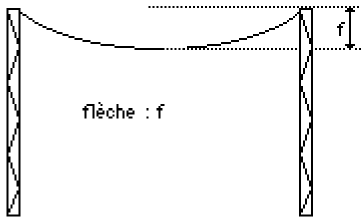
Considérons un câble homogène, flexible, attaché en A et B. Dans sa position d'équilibre, le câble pend dans un plan vertical. Créons dans ce plan un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O désigne le point le plus bas du câble et notons g le champ de pesanteur à son endroit. Soit M(x,y) un point du câble.

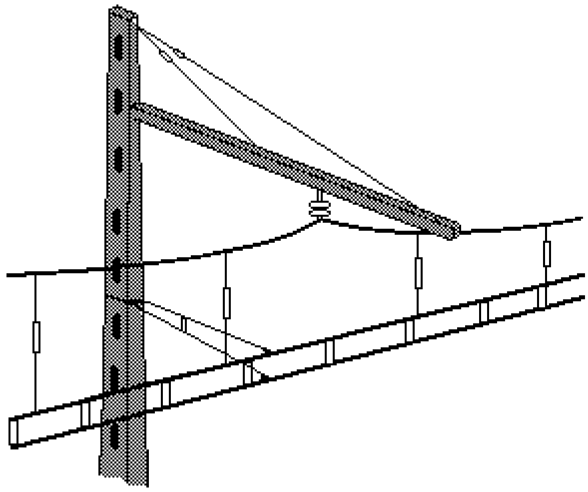


x et y sont alors liés par la relation : $y=k\dfrac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}=k.\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{k}\right)$ où ch désigne le Cosinus Hyperbolique.



La chaînette est d'une importance capitale car elle permet de calculer les flèches (c'est à dire la distance de l'arc à la corde) à donner aux câbles suspendus afin que les tensions aux points d'accroche ne soient pas excessives. En effet, dès que l'on cherche à tendre par trop un câble entre deux pylônes, les tensions deviennent considérables.





Dans le cas des lignes de chemins de fer électrifiées, on pallie à la flèche rédhibitoire par un câble porteur principal de la caténaire (câble conduisant le courant alimentant la locomotrice, du latin catena = chaîne) : le câble supérieur subit une flèche acceptée, ce qui diminue les tensions entre les pylônes.

La caténaire reste ainsi bien linéaire grâce aux accroches auxiliaires multiples à un câble auxiliaire. D'ailleurs, l'ancien nom de la chaînette fut la caténaire, nom qui lui est resté en anglais (catenary).

Notons enfin que la chaînette est la roulette du foyer d'une parabole : lieu de son foyer lorsqu'elle roule sans glisser, sur une droite.

1- Logarithmes et exponentielles

Définition : La fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ est la fonction **logarithme népérien** (logarithme de base e). On la note ln.

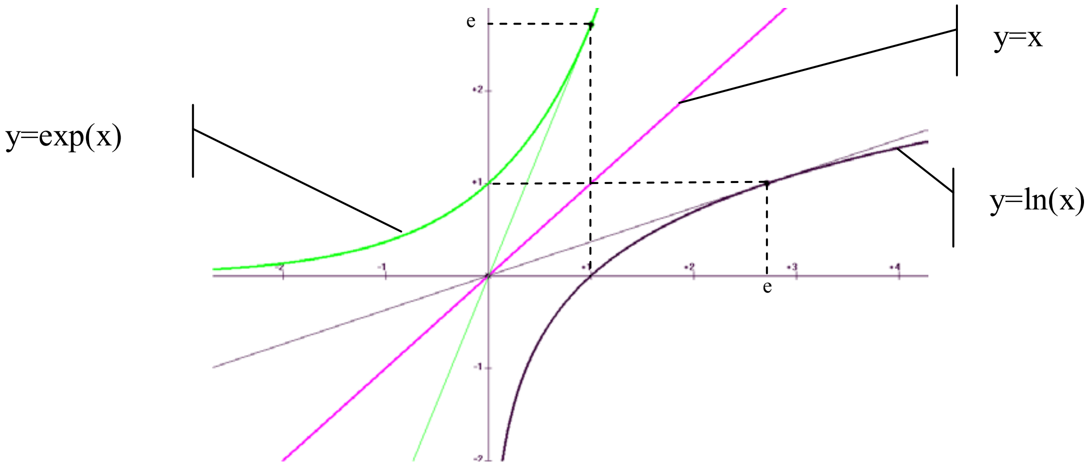
$x \mapsto \ln(x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ et s'annulant en $x = 1$.

Sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant strictement positive, ln est donc strictement croissante. La dérivée de $x \mapsto \ln(ax)$ valant : $\frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$, ln(ax) est égal à ln(x) + Cte. La valeur de Cte est obtenue en prenant x=1, ce qui donne la relation célèbre :

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

Cette relation, transformant produit en somme, a permis, depuis le XVIIème et jusqu'à l'introduction des calculatrices à bas prix vers 1980 à accélérer notablement les possibilités de calcul des mathématiciens. Ainsi Laplace s'émerveille-t-il *« des logarithmes, admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut dire la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs »*.

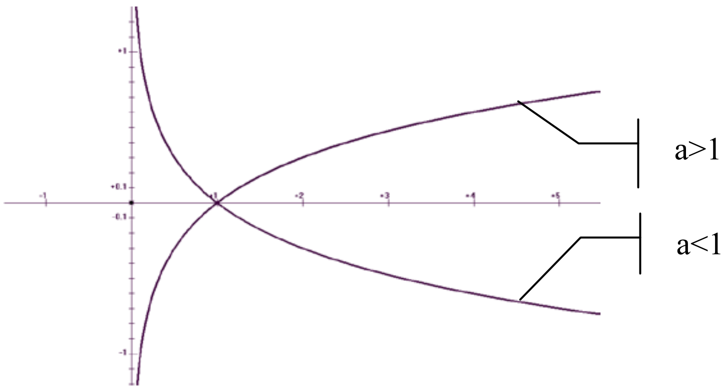
Propriété : ln est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle**, notée exp, bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.



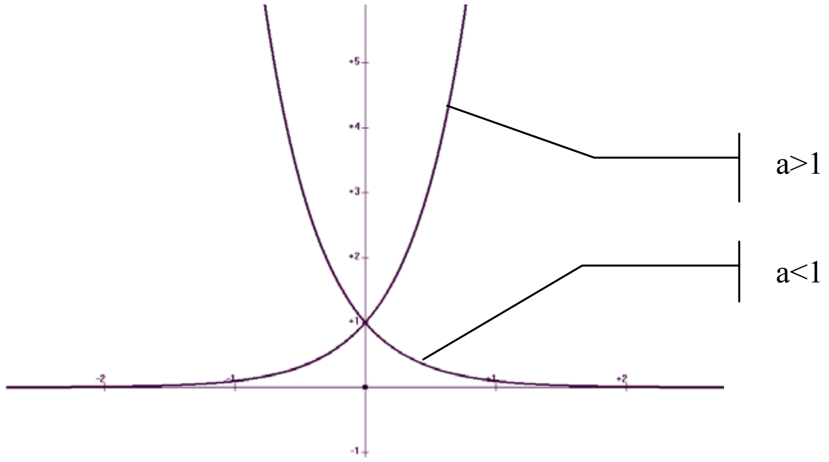
Définition : On définit le **logarithme en base a** (a réel strictement positif distinct de 1) par : $\log_a x = \dfrac{\ln\ x}{\ln a}$.

Il s'agit d'une bijection de de $\mathbb{R}^{*+}$dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle de base a**, notée $\exp_a$, bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

Comme la restriction de $\exp_a$ à $\mathbb{Z}$ coïncide avec la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $n \mapsto a^n$, on note $\exp_a(x)=a^x$.



Fonctions logarithme en base a

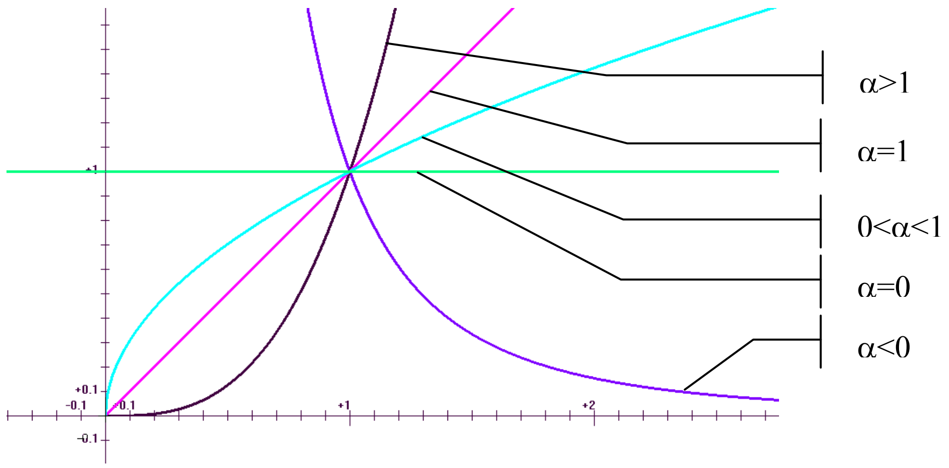


Fonctions exponentielle de base a

2- Puissances

Définition : $\forall a \in \mathbb{R}^{*+},\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = e^{b.\ln a}$

Remarque : Ne pas confondre la fonction puissance : $x \mapsto x^a$ et la fonction exponentielle (de base a) : $x \mapsto a^x$.



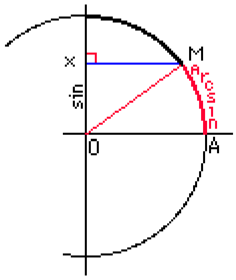
Fonction puissance $x \mapsto x^{\alpha}$

Croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{\ln x} = +\infty$.

3- Fonction arcsinus

Définition : La fonction sinus est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur [-1,1]. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** de [-1,1] sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Remarque : Pourquoi arc et non angle ? tout simplement parce que sur le cercle trigonométrique (centré à l'origine et de rayon 1), arcsin(x) représente la mesure de l'arc AM défini par l'angle $\widehat{AOM}$ de mesure x.



Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin\theta$
arcsin(x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

Propriétés : 1- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\forall y \in [-1,1]$, $y=\sin x \Leftrightarrow x=\arcsin y$

2- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x)=x$

3- $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin x)=x$

4- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

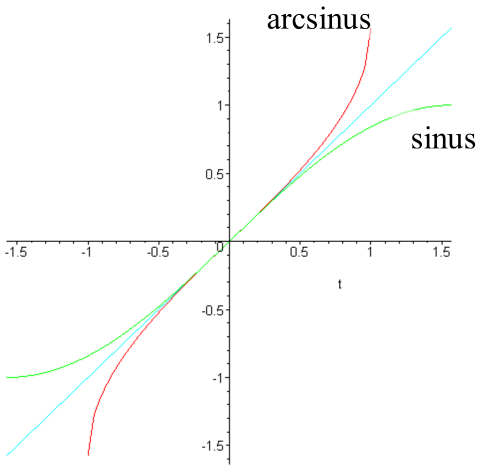
Exercice : Déterminer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, arcsin(sin x) pour x élément de $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$.

Propriété : arcsin est strictement croissante, impaire, continue sur [-1,1].

Théorème : arcsin est dérivable sur]-1,1[et $\forall x \in]-1,1[$, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque : arcsin n'est pas dérivable en -1 et 1. Aux points d'abscisse -1 et 1, le graphe de arcsin admet des tangentes verticales.

Représentation graphique de la fonction arcsinus



4- Fonction arccosinus

Définition : La fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\theta$
arccos(x)	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ

Propriétés : 1- $\forall x \in [0,\pi]$, $\forall y \in [-1,1]$, $y=\cos x \Leftrightarrow x= \arccos y$

2- $\forall x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos x)=x$

3- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos x)=x$

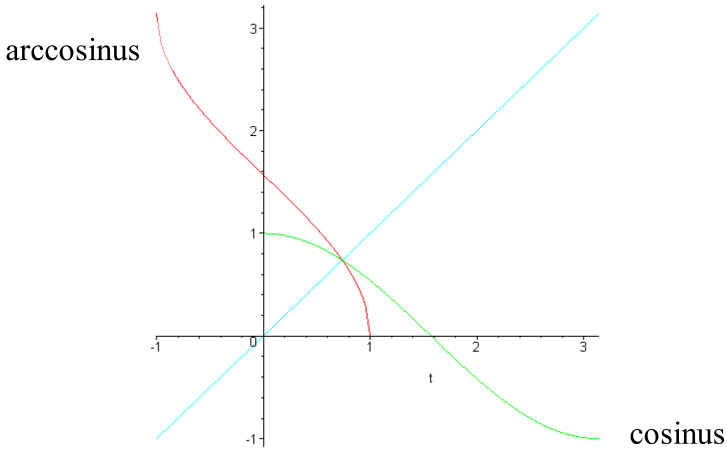
4- $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

Propriété : arccos est strictement décroissante, continue sur $[-1,1]$.

Théorème : arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque : arccos n'est pas dérivable en -1 et 1. Aux points d'abscisse -1 et 1, le graphe de arccos admet des tangentes verticales.

Représentation graphique de la fonction arccosinus



5- Fonction arctangente

Définition : La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Voici un tableau de valeurs :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\tan\theta$
arctan(x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

Propriétés : 1- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $y=\tan x \Leftrightarrow x= \arctan y$

2- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x)=x$

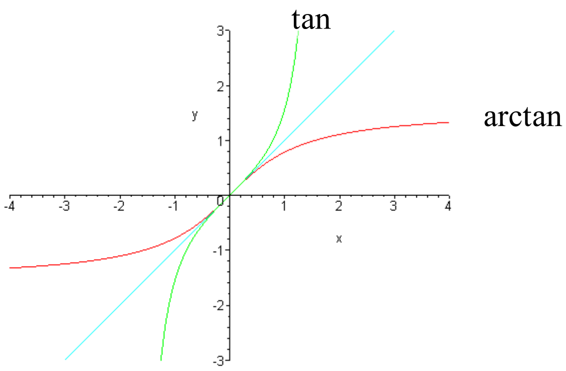
3- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x)=x$

Propriété : arctan est strictement croissante, impaire, continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème : arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\arctan x)'= \frac{1}{1+x^2}$.

Propriété : Pour tout réel x non nul, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$

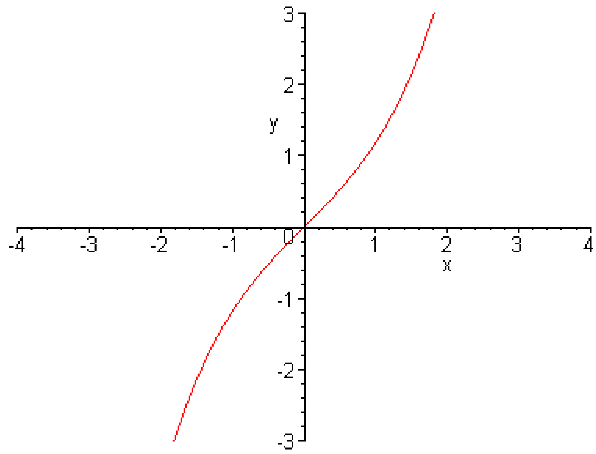
Représentation graphique de la fonction arctangente



6- Fonction sinus hyperbolique

Définition : Pour tout réel x, sh x $=\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Représentation graphique de la fonction sinus hyperbolique

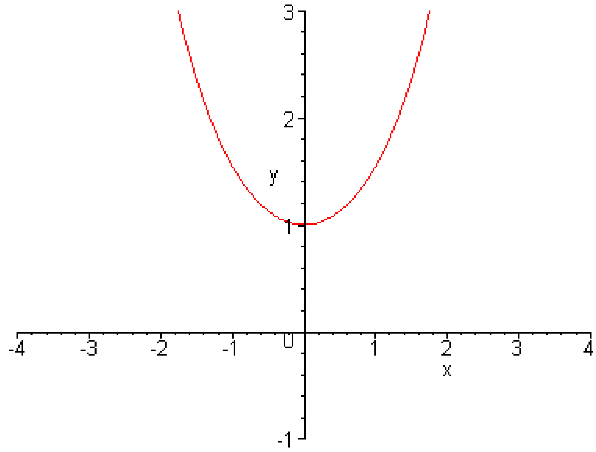


Propriété : sh est strictement croissante, impaire, continue sur ℝ et dérivable sur ℝ. Pour tout x réel, sh'(x) = ch(x).

7- Fonction cosinus hyperbolique

Définition : Pour tout réel x, ch x $=\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Représentation graphique de la fonction cosinus hyperbolique



Cela dit, ouvrons notre Petit Larousse : « La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes. »

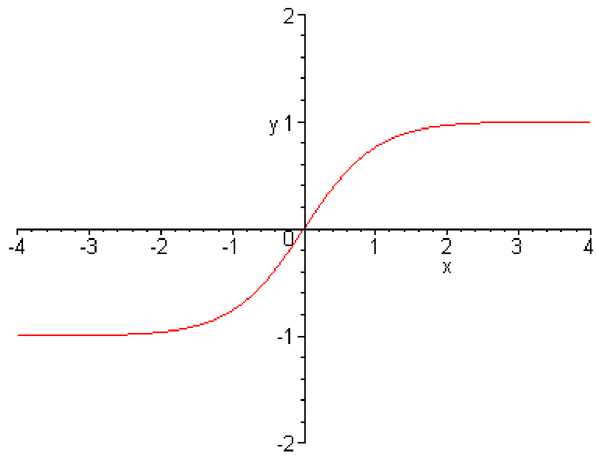
Propriété : ch est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel, ch'(x) = sh(x).

Propriété fondamentale : Pour tout réel x, $ch^2x - sh^2x = 1$.

8- Fonction tangente hyperbolique

Définition : Pour tout réel x, $\text{th } x = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$.

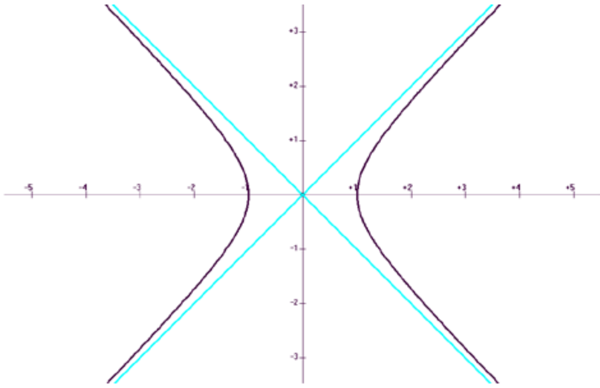
Représentation graphique de la fonction tangente hyperbolique



Propriété : th est strictement croissante, impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$.

9- Paramétrage de l'hyperbole



10- Trigonométrie hyperbolique

Formules d'addition :

ch(a+b) = ch a ch b + sh a sh b

ch(a-b) = ch a ch b - sh a sh b

sh(a+b) = sh a ch b + ch a sh b

sh(a-b) = sh a ch b - ch a sh b

$$\text{th}(a+b) = \frac{\text{th a} + \text{th b}}{1 + \text{th a th b}}$$

$$\text{th}(a-b) = \frac{\text{th a} - \text{th b}}{1 - \text{th a th b}}$$

Formules de duplication :

ch 2a=ch² a + sh² a=2ch^2 a - 1=1 + 2 sh² a

sh 2a =2 sh a ch a

$$\text{th 2a}= \frac{2\,\text{th a}}{1 + \text{th}^2\text{a}}$$

11- Fonction argsh

Définition : La fonction sh est une bijection de ℝ sur ℝ. Sa bijection réciproque est la fonction **argsh** de ℝ sur ℝ.

Propriétés : 1- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, y=sh x $\Leftrightarrow$ x= argsh y

2- $\forall x \in \mathbb{R}$, argsh (sh x)=x

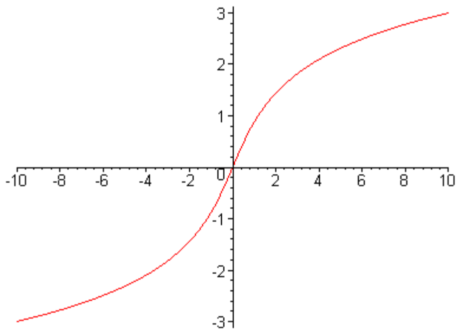
3- $\forall x \in \mathbb{R}$, sh (argsh x)=x

Propriété : argsh est strictement croissante, impaire, continue sur ℝ.

Théorème : argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, (argsh x)'= $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Expression logarithmique : Pour tout réel x, argsh x = $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Représentation graphique de la fonction argsh



12- Fonction argch

Définition : La fonction ch est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1,+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction **argch** de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.

Propriétés : 1- $\forall x \in \mathbb{R}^+$**,** $\forall y \in [1,+\infty[$, y=ch x $\Leftrightarrow$ x= argch y

2- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, argch (ch x)=x

3- $\forall x \in [1,+\infty[$, ch (argch x)=x

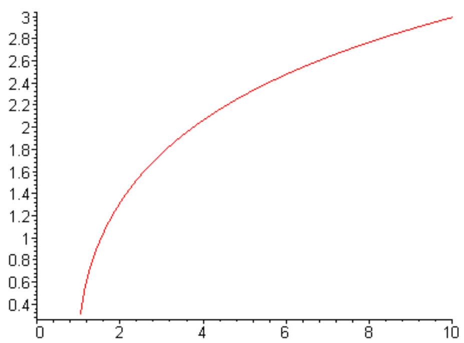
Propriété : argch est strictement croissante, continue sur $[1,+\infty[$.

Théorème : argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, (argch x)'= $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Remarque : argch n'est pas dérivable en 1. Au point d'abscisse 1, le graphe de argch admet une tangente verticale.

Expression logarithmique : Pour tout élément de $[1,+\infty[$, argch x = $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Représentation graphique de la fonction argch



13- Fonction argth

Définition : La fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur]-1,1[. Sa bijection réciproque est la fonction **argth** de]-1,1[sur $\mathbb{R}$.

Propriétés : 1- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-1,1[$, y=th x $\Leftrightarrow$ x= argth y

2- $\forall x \in \mathbb{R}$, argth (th x)=x

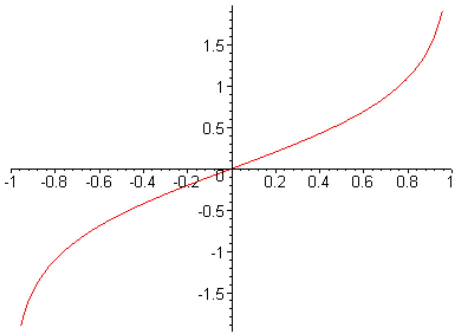
3- $\forall x \in]-1,1[$, th (argth x)=x

Propriété : argth est strictement croissante, impaire, continue sur]-1,1[.

Théorème : argth est dérivable sur]-1,1[et $\forall x \in]-1,1[$, (argth x)'= $\dfrac{1}{1-x^2}$.

Expression logarithmique : Pour tout élément de]-1,1[, argth x = $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Représentation graphique de la fonction argth



EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

1- $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$.

2- $\ln(x+2) + \ln(x-4) = 2\ln(x+1)$.

3- $\ln(x^2 - 1) = \ln(2x-1) - \ln(2)$.

(Déterminer sur quel ensemble est définie l'équation avant tout calcul.)

Exercice 2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.
Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et possède 2 intervalles de monotonie. Définir la bijection réciproque de f sur chacun d'entre eux.

Exercice 3. Etudier la fonction définie par : $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$.

Exercice 4. Etudier la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5. Donner une expression simplifiée des expressions suivantes :

$$\sin(2\arcsin(x)) \;\; ; \;\; \cos(2\arccos(x)) \;\; ; \;\; \cos(\arctan(x))$$

Exercice 6. Etablir les relations suivantes : $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$;
$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

Exercice 7. Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x on a : $\left(\frac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right)^n = \frac{1+\mathrm{th}(nx)}{1-\mathrm{th}(nx)}$.

Exercice 8. Etudier la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 9. On appelle fonction cotangente hyperbolique le quotient de la fonction cosinus hyperbolique par la fonction sinus hyperbolique. Étudier cette fonction.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

1- Etudier la fonction f.

2- Donner une expression simplifiée de f.

EXERCICES

Exercice 1.

1- Calculer sin (arcsin(-0,2)), $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-11\pi}{4}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)\right)$.

2- Donner une expression simplifiée des expressions suivantes : sin(2arcsin(x)) ; cos(2arccos(x)) ; cos(arctan(x)).

3- Etudier la fonction $f : x \mapsto$ arccos(cos(x)) (domaine de définition, continuité, parité, périodicité, dérivabilité, dérivée, variations, représentation graphique).

Exercice 2. On rappelle les définitions suivantes :

$$x = \arcsin(t) \Leftrightarrow \left(t = \sin x \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$x = \arccos(t) \Leftrightarrow (t = \cos(x) \wedge (0 \leq x \leq \pi))$$

$$x = \arctan(t) \Leftrightarrow \left(t = \tan x \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Démontrer les relations suivantes en précisant leur domaine de validité :

$\sin(\arcsin(t))=t$; $\cos(\arcsin(t))=\sqrt{1-t^2}$; $\tan(\arcsin(t))=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\sin(\arccos(t))=\sqrt{1-t^2}$; $\cos(\arccos(t))=t$; $\tan(\arccos(t))=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$

$\sin(\arctan(t))=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos(\arctan(t))=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\tan(\arctan(t)) = t$

$t = \sin(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (x = \arcsin t + 2k\pi) \vee (x = \pi - \arcsin t + 2k\pi)$

$t = \cos(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (x = \arccos t + 2k\pi) \vee (x = - \arccos t + 2k\pi)$

$t = \tan(x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (x = \arctan t + k\pi)$

Exercice 3. Construire le graphe de la fonction définie par : f(x)=arccos(cos 2x).

Exercice 4.

1- Calculer $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

2- Donner une expression plus simple des fonctions suivantes :

a- $\cos(\arctan x)$ b- $\sin(\arctan x)$ c- $\tan(\arccos x)$

Simplifier $\arcsin(\sin(2x))$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 5. a- Déterminer l'ensemble de définition et construire le graphe de la fonction :

$$f : x \mapsto 2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Indication : vous pourrez poser t = arctan(x).

b- Résoudre l'équation : $f(x) = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 6. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant leurs domaines de définition :

a. $\arccos\left(\sqrt{x}\right)$ b. $x^2\arctan\left(x^2\right)$ c. $\arctan\left(\sin 2x\right)$

d. $\ln\left(\arctan\left(x^2\right)\right)$ e. $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ f. $\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 7. Résoudre l'équation : $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 8. On considère la courbe (C) d'équation :

$$y=f(x)=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1- Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.

2- Calculer f '(x). Comparer f '(x) avec la dérivée de la fonction x ⎵ arctan(x). En déduire une expression plus simple de la restriction de f à chaque intervalle où f ' est continue.

3- Tracer (C).

Exercice 9. Pour cet exercice, vous pourrez utiliser le résultat suivant qui sera démontré dans le chapitre « Calcul différentiel ».

Soient a, b deux réels tels que a soit strictement inférieur à b, f une fonction réelle définie et continue sur [a,b] telle que f soit dérivable en tout point de]a,b[sauf peut-être en x_0 élément de [a,b].

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ et vaut l, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et vaut l.

Remarque : La réciproque de la propriété est fausse.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(3x-4x^3\right)$.

1- Déterminer le domaine de définition de f et les variations de f sans utiliser la dérivabilité de f.

2- Etudier la dérivabilité de f.

3- a- Déduire de f '(x) l'expression de f(x) en fonction de arcsin(x).

b- On pose $t = \arcsin(x)$. Sans utiliser la dérivée de f, retrouver le résultat de la question 3-a-.

Indication : On pourra montrer que : $\sin(3t)=3\sin t - 4\sin^3 t$.

Exercice 10. On rappelle les définitions suivantes :

$$x = \operatorname{argsh}(t) \Leftrightarrow t = \operatorname{sh}(x)$$
$$x = \operatorname{argch}(t) \Leftrightarrow t = \operatorname{ch}(x))\wedge(x \geq 0)$$
$$x = \operatorname{argth}(t) \Leftrightarrow t = \operatorname{th}(x)$$

Démontrer les relations suivantes en précisant leur domaine de validité :

argsh(t)=$\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$; argch(t)=$\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$; argth(t)=$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

sh(argsh(t))=t ; ch(argsh(t))=$\sqrt{1+t^2}$; th(argsh(t))=$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

sh(argch(t))=$\sqrt{t^2-1}$; ch(argch(t))=t ; th(argch(t))=$\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$

sh(argth(t))=$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; ch(argth(t))=$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; th(argth(t))=t

Exercice 11. Simplifier les expressions suivantes :

$$y=\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}}\right) \quad \text{et} \quad z=\operatorname{argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$

Exercice 12. a- Montrer que pour tout réel x non nul, th(x)=$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)}-\frac{1}{\operatorname{th}(x)}$.

b- En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$ pour n entier naturel.

Exercice 13. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition :

a- $\operatorname{argth}(-4x)$ b- $\operatorname{argch}\sqrt{x}$ c- $\sqrt{\operatorname{argch} x}$ d.- $x\operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right)$ e- $\operatorname{argth}(x+1)$

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes :

a- $\operatorname{ch} x = 2$ b- $5\operatorname{ch} x - 4\operatorname{sh} x = 3$ c.- $\operatorname{argth} x = \operatorname{argth}\frac{1}{x}$

d- $\operatorname{argth} x = \operatorname{argch}\frac{1}{x}$ e- $\operatorname{argch} x = \operatorname{argsh}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Exercice 15.

1. Donner une autre expression en fonction de x des fonctions suivantes :
   $f(x)=\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$ $g(x)=\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$ $h(x)=\operatorname{sh}(4\operatorname{argsh} x)$
2. Simplifier les expressions suivantes:
   $i(x)=\operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}\right)$ $j(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}\right)$ $k(x)=\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1}}\right)$

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

On note f^{-1} la bijection réciproque.

2- a- Etudier sans calculs la continuité, le sens de variation et la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b- Représenter f et f^{-1} dans un même repère orthonormé.

3- Pour $y \in J$, calculer $f^{-1}(y)$.

4- Pour y convenablement choisi, calculer de deux manières différentes $\left(f^{-1}\right)'(y)$.

Quelques exercices corrigés

Exercice 17. 1- Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2- Simplifier l'expression $\phi(x) = \arctan(\tan x)$ avec $x \in \left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$.

3- Simplifier $f(x) = \arcsin(\sin(3x))$ et $g(x) = \arccos(\cos(3x))$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Tracer les courbes représentatives de ces deux fonctions.

4- Exprimer en fonction de x après avoir donné le domaine de définition de la fonction considérée :

a- tan (arcsinx)

b- cos (arctan x).

5- Faire l'étude complète de la fonction suivante : g (x) = arcsin (cos x)

Corrigé : 1- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$,

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

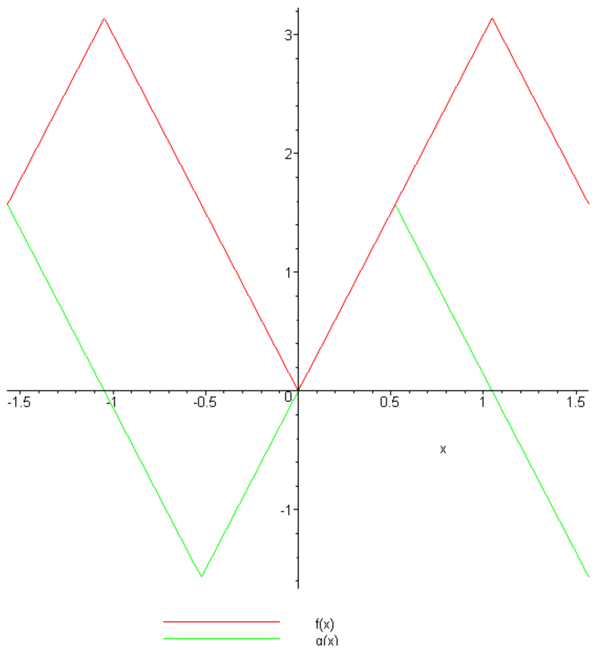
2- On a $\phi(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \equiv \alpha[\pi]$.

On en déduit que : $\phi(x) = \left|\begin{array}{l} x + 2\pi \text{ si } x \in \left]-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right[\\ x + \pi \text{ si } x \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[\\ x \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x - \pi \text{ si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\\ x - 2\pi \text{ si } x \in \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\end{array}\right.$.

3- On a $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 3x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, d'où :

$$f(x)=\begin{cases}-\pi-3x \text{ si } 3x\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right] \\ 3x \text{ si } 3x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi-3x \text{ si } 3x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}=\begin{cases}-\pi-3x \text{ si } x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right] \\ 3x \text{ si } x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right] \\ \pi-3x \text{ si } x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}3x+2\pi \text{ si } 3x\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right] \\ -3x \text{ si } 3x\in[-\pi,0] \\ 3x \text{ si } 3x\in[0,\pi] \\ -3x+2\pi \text{ si } 3x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}=\begin{cases}3x+2\pi \text{ si } x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right] \\ -3x \text{ si } x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right] \\ 3x \text{ si } x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \\ -3x+2\pi \text{ si } x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$



4- a- Le domaine de définition est $]-1,1[$.

On a $\tan(\arcsin(x))=\dfrac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))}=\dfrac{x}{\cos(\arcsin(x))}$.

Pour déterminer $\cos(\arcsin(x))$ en fonction de x, on utilise la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$:

$$\cos^2(\arcsin(x))=1-\sin^2(\arcsin(x))=1-x^2 \Rightarrow \cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$$

D'où : $\tan(\arcsin(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4-b- Le domaine de définition est $]-\infty,\infty[$.

On rappelle que : $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}$, d'où :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme $\cos(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que : $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5- Soit $g(x) = \arcsin(\cos(x))$.

On a clairement $D_g = \mathbb{R}$.

g est $2\pi-$périodique, et elle est aussi paire.

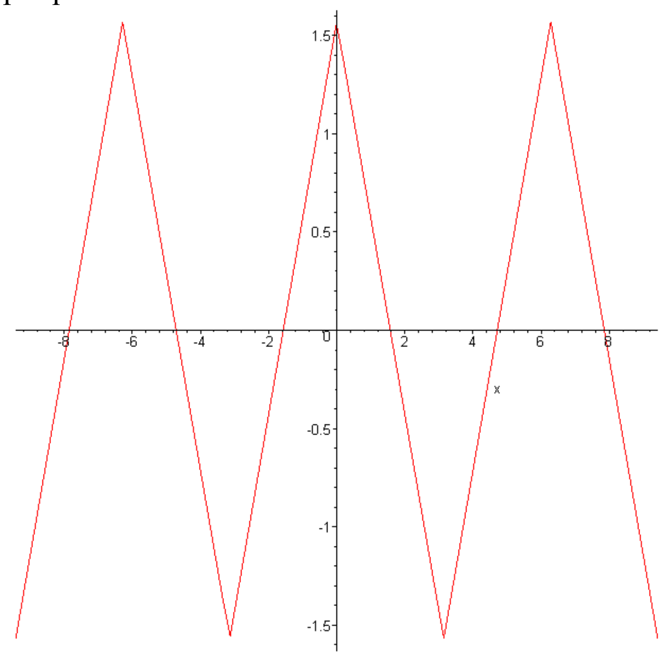
On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

g est dérivable sur $]0, \pi[$ et on a $\forall x \in]0, \pi[,\ g'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \dfrac{-\sin(x)}{|\sin(x)|}$.

La fonction sinus étant positive sur $]0, \pi[$, on en déduit que la fonction g est décroissante sur $[0, \pi]$. Par parité, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\pi$ $\quad -\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$ $\quad \pi$
g'(x)	+		-
g(x)	↗		↘

La représentation graphique de la fonction est la suivante :



Exercice 18. Résoudre les équations suivantes :

$$\arcsin(2x) - \arcsin\left(\sqrt{3}x\right) = \arcsin(x)$$

$$\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$$

Corrigé : a- $\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)=\arcsin(x) \Rightarrow \sin\left(\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)\right)=x$.

Or, $\sin\left(\arcsin(2x)-\arcsin(\sqrt{3}x)\right)$

$= \sin(\arcsin(2x))\cos\left(\arcsin(\sqrt{3}x)\right)-\cos(\arcsin(2x))\sin\left(\arcsin(\sqrt{3}x)\right)$

$= 2x\sqrt{1-3x^2}-x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}$.

On doit donc résoudre :

$$x= 2x\sqrt{1-3x^2}-x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}$$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3(1-4x^2)}$

Pour résoudre : $1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3(1-4x^2)}$, on introduit la fonction :

$f(x)=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3(1-4x^2)}-1$

et on l'étudie pour déterminer les solutions de $f(x)=0$.

On a $D_f=\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ et on a : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, $f'(x)=\frac{-6x}{\sqrt{1-3x^2}}+\frac{4\sqrt{3}x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Donc, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\sqrt{1-3x^2}}=\frac{4\sqrt{3}x}{\sqrt{1-4x^2}} \Rightarrow \frac{36x^2}{1-3x^2}=\frac{48x^2}{1-4x^2}$.

Et $\frac{3x^2}{1-3x^2}=\frac{4x^2}{1-4x^2} \Leftrightarrow 3x^2(1-4x^2)=4x^2(1-3x^2) \Leftrightarrow 3x^2=4x^2 \Leftrightarrow x=0$.

Réciproquement, on a bien $f'(0)=0$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
f '(x)	-		+
f(x)	0 ↘	-1	↗ 0

A partir du tableau de variations, on en conclut que : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

On peut aussi déterminer les racines de l'équation : $1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3(1-4x^2)}$ sans passer par une étude de fonctions :

$1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3(1-4x^2)} \Rightarrow 1=4(1-3x^2)+3(1-4x^2)-4\sqrt{3(1-4x^2)(1-3x^2)}$

$\Rightarrow 24x^2-6=-4\sqrt{3(1-4x^2)(1-3x^2)} \Rightarrow 12x^2-3=-2\sqrt{3(1-4x^2)(1-3x^2)}$

$\Rightarrow (12x^2-3)^2=12(1-4x^2)(1-3x^2) \Rightarrow 144x^4-72x^2+9=144x^4-84x^2+12$

$\Rightarrow 12x^2=3$

Or, $12x^2=3 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{4}$.
Par contre, dans ce cas, on doit vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation : $1=2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3\left(1-4x^2\right)}$.
Réciproquement, on vérifie que les valeurs trouvées par l'une des deux méthodes sont solutions.
Finalement, les solutions de $\arcsin(2x)\text{-}\arcsin\left(\sqrt{3}x\right)\text{=}\arcsin(x)$ sont $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

b- arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc on cherche les solutions dans $\mathbb{R}$.
On calcule $\tan\left(\arctan(x\text{+}1)\text{+}\arctan(x\text{-}1)\right)$ en utilisant la relation :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan\left(\arctan(x\text{+}1)\text{+}\arctan(x\text{-}1)\right)=\frac{-2x}{-2+x^2}.$$

Ainsi, $\arctan(x\text{+}1)\text{+}\arctan(x\text{-}1)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{-2x}{-2+x^2}=1$

Attention, ce n'est pas une équivalence ! (car $\tan u=\tan v \Leftrightarrow u\equiv v[\pi]$, et $u=v \Rightarrow u\equiv v[\pi]$)

$$\frac{-2x}{-2+x^2}=1 \Leftrightarrow -2x=-2+x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0$$

On trouve les racines du polynôme $x^2+2x-2=0$: $x_1=-1+\sqrt{3}$ et $x_2=-1-\sqrt{3}$.
Il faut ensuite vérifier que les racines conviennent puisque nous n'avons pas raisonné par équivalence.
On a $\arctan(x_1\text{+}1)\text{+}\arctan(x_1\text{-}1)=\frac{\pi}{4}$ et $\arctan(x_2\text{+}1)\text{+}\arctan(x_2\text{-}1)=-\frac{3\pi}{4}$.
On en déduit que la solution de l'équation de départ est uniquement $x_1=-1+\sqrt{3}$.

Exercice 19. 1- Linéariser f(x) = (ch x)^5 et g(x) = (sh x)^5. En déduire une primitive de chacune de ces fonctions.

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} \text{ch}x + \text{ch}y = 5 \\ \text{sh}x + \text{sh}y = 3 \end{cases}$.

3- Calculer les sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{ch}(kx)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \text{sh}(kx)$.

Corrigé :

1- $$f(x)=\left(\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}\left(e^{5x}+5e^{3x}+10e^x+10e^{-x}+5e^{-3x}+e^{-5x}\right)=\frac{1}{2^5}\left(e^{5x}+e^{-5x}+5\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)+10\left(e^x+e^{-x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2^5}\left(2\text{ch}(5x)+10\text{ch}(3x)+20\text{ch}(x)\right)=\frac{1}{16}\text{ch}(5x)+\frac{5}{16}\text{ch}(3x)+\frac{5}{8}\text{ch}(x)$$

Une primitive de f est donc : $F(x)=\frac{1}{80}\text{sh}(5x)+\frac{5}{48}\text{sh}(3x)+\frac{5}{8}\text{sh}(x)$.

$$g(x)=\left(\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^{5}}\left(e^{5x}+5e^{3x}+10e^{x}-10e^{-x}-5e^{-3x}-e^{-5x}\right)=\frac{1}{2^{5}}\left(e^{5x}-e^{-5x}+5\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)+10\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2^{5}}\left(2\operatorname{sh}(5x)+10\operatorname{sh}(3x)+20\operatorname{sh}(x)\right)=\frac{1}{16}\operatorname{sh}(5x)+\frac{5}{16}\operatorname{sh}(3x)+\frac{5}{8}\operatorname{sh}(x)$$

Une primitive de g est donc : $G(x)=\frac{1}{80}\operatorname{ch}(5x)+\frac{5}{48}\operatorname{ch}(3x)+\frac{5}{8}\operatorname{ch}(x)$.

2- En ajoutant et en faisant la différence des deux équations, on vérifie que le système est équivalent au système suivant : $\begin{cases} e^{x}+e^{y}=8 \\ e^{-x}+e^{-y}=2 \end{cases}$.

On a : $e^{-x}+e^{-y}=2 \Leftrightarrow \left(e^{x}+e^{y}\right)=2e^{x}e^{y} \Leftrightarrow e^{x}e^{y}=\frac{8}{2}=4$.

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} e^{x}+e^{y}=8 \\ e^{x}e^{y}=4 \end{cases}$.

Effectuons le changement de variables suivant : $u=e^{x}$ et $v=e^{y}$.

Le système s'écrit : $\begin{cases} u+v=8 \\ uv=4 \end{cases}$.

Les solutions de ce système sont les racines du polynôme : $X^{2}-8X+4$.

On a $\Delta=8^{2}-4^{2}=48$, et les racines sont donc :

$x_{1}=\frac{8+4\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$ et $x_{1}=\frac{8-4\sqrt{3}}{2}=4-2\sqrt{3}$

On en conclut que les solutions du système $\begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y)=5 \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y)=3 \end{cases}$ sont $\ln\left(4+2\sqrt{3}\right)$ et $\ln\left(4-2\sqrt{3}\right)$.

3- On remarque que $S_{n}+T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ch}(kx)+\operatorname{sh}(kx)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{kx}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{x}\right)^{k}=e^{x}\times\frac{1-e^{nx}}{1-e^{x}}$

D'autre part, $S_{n}-T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ch}(kx)-\operatorname{sh}(kx)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-kx}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-x}\right)^{k}=e^{-x}\times\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$.

Pour conclure, il suffit de voir que :

$S_{n}=\frac{1}{2}\left(\left(S_{n}+T_{n}\right)+\left(S_{n}-T_{n}\right)\right)$ et $T_{n}=\frac{1}{2}\left(\left(S_{n}+T_{n}\right)-\left(S_{n}-T_{n}\right)\right)$

On obtient alors :

$$S_{n}=\frac{1}{2}\left(e^{x}\times\frac{1-e^{nx}}{1-e^{x}}+e^{-x}\times\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}+\frac{1-e^{-nx}}{e^{x}-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{(n+1)x}-1+e^{-nx}}{1-e^{x}}\right)$$

Et de même :

$$T_{n}=\frac{1}{2}\left(e^{x}\times\frac{1-e^{nx}}{1-e^{x}}-e^{-x}\times\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}-\frac{1-e^{-nx}}{e^{x}-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{(n+1)x}+1-e^{-nx}}{1-e^{x}}\right)$$

Exercice 20. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, 2arctan (th x) = arctan (sh (2x)).

Corrigé : Posons $f(x)=2\arctan(\text{th}(x))$ et $g(x)=\arctan(\text{sh}(2x))$.

f et g sont deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a d'une part :

$$f'(x)=2\frac{\text{th}'(x)}{1+\text{th}^2(x)}=2\times\frac{1}{\text{ch}^2(x)}\times\frac{1}{1+\text{th}^2(x)}=2\times\frac{1}{\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)}=\frac{2}{\text{ch}(2x)}.$$

D'autre part, $g'(x)=2\frac{\text{sh}'(2x)}{1+\text{sh}^2(2x)}=2\times\frac{\text{ch}(2x)}{1+\text{sh}^2(2x)}=2\times\frac{\text{ch}(2x)}{\text{ch}^2(2x)}=\frac{2}{\text{ch}(2x)}$.

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=g'(x)$ donc f et g sont deux primitives de la même fonction.

On en déduit que $f(x)=g(x)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Or, $f(0)=0=g(0)$ donc $c=0$ et ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)$.

Chapitre 12

COMPARAISON DE FONCTIONS

Dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire, x_0 désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1- Fonctions négligeables

Définitions : 1- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage du réel x_0, sauf peut-être en x_0.
f est **négligeable** devant g au voisinage du réel x_0 signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta>0,\ \forall x \in D_f \cap D_g,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

2- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.
f est **négligeable** devant g au voisinage de $+\infty$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A>0,\ \forall x \in D_f \cap D_g,\ x>A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

3- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.
f est **négligeable** devant g au voisinage de $-\infty$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A>0,\ \forall x \in D_f \cap D_g,\ x<-A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Soit x_0 un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0, les définitions précédentes deviennent : $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Notation de Landau : $f \underset{x_0}{=} o(g)$.

Landau Edmund (1877-1938) est un mathématicien allemand qui enseigna à Göttingen et fut en cette célèbre université l'un des premiers universitaires et savants à devoir abandonner ses recherches car victimes des nazis (national-socialisme d'Hitler, 1933).

Ses travaux portent en théorie des nombres (dont la fameuse fonction ζ de Riemann) et sur les fonctions de variables complexes.

Remarque : Les physiciens utilisent la notation $f \underset{x_0}{\ll} g$.

Propriété : Soient f_1, f_2, g trois fonctions définies au voisinage de x_0, λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\text{Si } f_1 \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } f_2 \underset{x_0}{=} o(g), \text{ alors } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$$

Propriété : Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

$$f\text{-}g \underset{x_0}{=} o(f) \text{ si et seulement si } f\text{-}g \underset{x_0}{=} o(g)$$

Propriété : Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de x_0.

$$\text{Si } f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{=} o(h), \text{ alors } f \underset{x_0}{=} o(h)$$

Remarque : $f \underset{x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x_0} f = 0$

Propriété : Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de x_0.
Si $f \underset{x_0}{=} o(h)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $f+g \underset{x_0}{=} o(h)$.

Propriété : Soient f et h deux fonctions définies au voisinage de a telles que $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Si g est une fonction bornée au voisinage de a, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

En particulier, pour tout réel k, on a $k\, f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Propriété : Si $\alpha<\beta$, alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{0^+}{=} o(x^\alpha)$.

2- Fonctions équivalentes

Définition : Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0. f et g sont **équivalentes** signifie que $f\text{-}g \underset{x_0}{=} o(f)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0, la définition précédente devient :

f et g sont **équivalentes** signifie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation : $f \underset{x_0}{\sim} g$

Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 réel telle que $f'(x_0)$ soit **non nul.**
Alors, $f(x)-f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)$.

Quelques équivalents classiques :
Au voisinage de 0 :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

$1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$e^x \underset{0}{\sim} 1$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{0}{\sim} a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$

Au voisinage de $+\infty$:

$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$

Remarque : Attention aux fonctions équivalentes à 0.

Propriété : Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\underset{x_0}{\text{Lim}}\, g = l$ élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $\underset{x_0}{\text{Lim}}\, f = l$.

Propriété : Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf éventuellement en x_0, et l un réel non nul.

$$f \underset{x_0}{\sim} l \Leftrightarrow \underset{x_0}{\text{Lim}}\, f = l$$

Propriété : Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de x_0.
Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$.

Propriété : Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0, g ne s'annulant pas au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\frac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{g}$.

Propriété : Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies au voisinage de x_0, g_2 ne s'annulant pas au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.
Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Propriété : Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0, g strictement positive au voisinage de x_0.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors f strictement positive au voisinage de x_0.

Propriété : Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de x_0.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{=} o(g)$, alors $f+h \underset{x_0}{\sim} g$.
On retient parfois ce théorème sous la forme suivante : $f+o(f) \underset{x_0}{\sim} f$.

Propriété : Soient f_1, f_2, g trois fonctions définies au voisinage de x_0, c_1 et c_2 deux réels tels que $f_1 \underset{x_0}{\sim} c_1 g$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} c_2 g$.

Si $c_1+c_2 \neq 0$, alors $f_1+f_2 \underset{x_0}{\sim} (c_1+c_2)g$.

Si $c_1+c_2=0$, alors $f_1+f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$.

3- Compléments

1- Changement de variable : (Compatibilité avec la composition à droite)

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0, φ une fonction définie au voisinage de t_0 telles que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $\underset{t \to t_0}{\mathrm{Lim}}\, \varphi(t)=x_0$. Alors $f \circ \varphi(t) \underset{t \to t_0}{\sim} g \circ \varphi(t)$.

2- Compatibilité avec les logarithmes :

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $\underset{x_0}{\mathrm{Lim}}\, g=l$ réel positif distinct de 1 ou égal à $+\infty$, alors $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$.

3- Compatibilité avec les exponentielles :

a- Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et $\underset{x_0}{\mathrm{Lim}}\,(f-g)=0$, alors $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$.

b- Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et g bornée au voisinage de x_0, alors $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$.

4- Compatibilité avec les puissances :

Soient f, g deux fonctions définies et strictement positives au voisinage de x_0.

- Pour tout α de $\mathbb{R}^*$, $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$
- Pour tout α de $\mathbb{R}^{*+}$, $f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow f^\alpha \underset{x_0}{=} o(g^\alpha)$
- Pour tout α de $\mathbb{R}^{*-}$, $f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow g^\alpha \underset{x_0}{=} o(f^\alpha)$

5- Croissance comparée

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ (\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$$

$$\forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ |\ln(x)|^\beta \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

$$\forall m > 0,\ \forall \gamma > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(e^{mx^\gamma}\right)$$

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Démontrer les règles suivantes (qu'il faut connaître) :

a- Si au voisinage de a (réel ou infini) on a $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \neq 1$, alors au voisinage de a, on a : $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

b- Si au voisinage de a (réel ou infini) on a $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors au voisinage de a, on a : $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

c- Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, alors au voisinage de a on a $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} f(x) - 1$.

Exercice 2. Démontrer les équivalences suivantes :

a- Au voisinage de 0, on a : $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ (à l'aide de $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$).

b- Au voisinage de $+\infty$, on a : $\mathrm{ch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$. Adapter pour $-\infty$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$ (α et β sont des réels non nuls).

b- $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{\ln(|\sin(x)|)}$.

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 (\ln(x))^3 e^{-\sqrt{x}}$.

EXERCICES

Exercice 1. Pour chacun de ces couples de fonctions, déterminer si l'une des deux est négligeable devant l'autre au voisinage de a, ou si les fonctions sont équivalentes (ou si l'on n'est dans aucun de ces cas).

1. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\ln(x)$ et $a=+\infty$
2. $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\ln(x)$ et $x=+\infty$
3. $f(x)=x^4+5x+1$, $g(x)=e^x(\ln(x))^2$ et $a=+\infty$
4. $f(x)=2+\sin(x)$, $g(x)=2+\cos(x)$ et $a=+\infty$
5. $f(x)=2\sin(x)$, $g(x)=x(1+e^x)$ et $a=0$
6. $f(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $a=0$
7. $f(x)=e^{-x^2}$, $g(x)=e^{-2x}$ et $a=+\infty$
8. $f(x)=e^x-1$, $g(x)=x(\ln(x))^3$ et $a=0$

Exercice 2. Soient a et b deux fonctions définies et strictement positives dans un voisinage du réel u. On suppose que a et b sont équivalentes au voisinage de u.

a- Que pouvez-vous dire à propos de l'équivalence de ln(a) et ln(b) au voisinage de u ?

b- Que pouvez-vous dire à propos de l'équivalence de exp(a) et exp(b) au voisinage de u ?

Exercice 3.

1. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 3x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   A-t-on $f \underset{+\infty}{\sim} g$? A-t-on $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?
2. Même question pour $f(x) = \dfrac{1}{2x+5x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4.

1- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(\cos x) \qquad f_2(x) = \tan(2\tan x) \qquad f_3(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} - 1 \qquad f_4(x) = \sqrt{\frac{3x-3x^2}{2x+x^2}}$$

2- En déduire la limite éventuelle quand x tend vers 0 de la fonction suivante :

$$F(x) = \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1} \times \frac{\tan(2\tan x)}{\tan x} \times \sqrt{\frac{3x-3x^2}{2x+x^2}}$$

Exercice 5. Pour chaque expression, donner un équivalent simple.

1. x^5-2x^2+x en $+\infty$ et en 0

2. $\dfrac{x^3+2x-\sqrt{x}}{4x^3+x^2+7}$ en $+\infty$ et en 0^+
3. $3\sqrt{x+1}+4\cos(x)$ en $+\infty$ et en 0
4. $5e^{2x}+\ln(x)-x$ en $+\infty$ et en 0^+
5. $\sin(x)+2x+\sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$ et en 0
6. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ en $+\infty$ et en 0^+
7. $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ en $+\infty$
8. $\arccos(x)-\dfrac{\pi}{2}$ en 0
9. $\cos(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $\dfrac{\pi}{6}$
10. $\ln(2x^3-3x^2+1)$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 6. Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x(2-x)\tan(x)} \text{ en } x_0=0 \ ; \ x \mapsto \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \text{ en } x_0=0$$

$$x \mapsto (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) \text{ en } x_0=\frac{1}{2} \ ; \ x \mapsto \tan(x)\tan(2x) \text{ en } x_0=\frac{\pi}{2}$$

$$x \mapsto \frac{a^x-b^x}{x} \text{ en } x_0=0 \text{ et avec } a>0 \text{ , } b>0$$

Exercice 7. Déterminer pour a réel non nul : $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$.

Exercice 8. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\tan\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right)^{\tan 3x}$.

Exercice 9. Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$x \mapsto \frac{\sin(x).\ln(1+x^2)}{x.\tan(x)} \text{ en } 0 \ ; \ x \mapsto \frac{\ln[\cos(ax)]}{\ln[\cos(bx)]} \text{ en 0 avec b non nul}$$

$$(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2 x}} \text{ en } 0 \ ; \ x \mapsto (\cos(x))^{\frac{1}{\tan(2x)}} \text{ en } 0$$

$$(\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}} \text{ en } \frac{\pi}{2} \ ; \ x \mapsto |\sin(x)|^{\tan(x)} \text{ en } 0$$

$$|\tan(x)|^{\cos(x)} \text{ en } \frac{\pi}{2} \ ; \ x \mapsto \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} \text{ en } 0$$

$$(\sin(x)+\cos(x))^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0$$

Exercice 10. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x.\ln(x)}$.

Exercice 11. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}e^{x} + x^{9} - 2x\ln(x)}{x^{3} + \left(\sqrt{x^{3}+x^{2}} - \sqrt{x^{3}}\right)\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 12.

1- On pose $f(x) = \left(\dfrac{x}{\mathrm{sh}\, x}\right)^{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. On note l cette limite.

On prolonge f par continuité en posant f(0)=l.

2- Montrer de deux manières différentes que f est dérivable en 0.

3- Montrer que $\mathrm{sh}\, x \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{1}{2}e^{x}$. En déduire que $\ln\left(\dfrac{x}{\mathrm{sh}\, x}\right) \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} -x$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 13. Soit λ un réel fixé. On considère la fonction $f_{\lambda}(x) = x^{\lambda}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - 1\right)$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1- Déterminer des équivalents simples de $f_{\lambda}(x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
2- Pour quelles valeurs de λ la fonction f est-elle prolongeable par continuité (à droite) en 0 ?
3- Pour quelles valeurs de λ la fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 14. Soit f définie par f (x) = ln(ch x).

1- Préciser le domaine de définition de f et dresser son tableau de variations.
2- Donner un équivalent simple de f en 0.
3- Montrer qu'en $+\infty$, on a $f(x) \sim x^{k}$ où k est un réel à déterminer.
4- Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x^{k}\right) = -\ln(2)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
5- Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 15. Soit λ un réel. On définit la fonction f_{λ} par $f_{\lambda}(x) = \dfrac{x^{\lambda}}{(x^{2}+1)\arctan(x)}$.

1- Donner des équivalents simples de fa au voisinage de 0+ et de $+\infty$.

2- Pour quelles valeurs de λ la fonction f_{λ} est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

3- Montrer que pour $\lambda \geq 2$, ce prolongement est dérivable à droite en 0.

Quelques exercices corrigés

Exercice 16. 1- Prouver que : $x + \sqrt{x^2 - 1} \sim 2x$ au voisinage de $+\infty$.

2- En déduire un équivalent de argch x et argsh x au voisinage de $(+\infty)$.

Corrigé : 1- Posons $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $g(x) = 2x$.

Il suffit de montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2x} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{4x^2}} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4x^2}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1$.

2- On a $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$,donc d'après ce qui précède :

$\operatorname{argch}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

De la même manière que dans la question précédente, on vérifie que $\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2x$, et on en déduit que : $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x)$, d'où $\operatorname{argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 17. Soit λ un réel fixé. On définit la fonction f_λ par : $f_\lambda(x) = \dfrac{x^\lambda}{(x^2 + 1)\arctan(x)}$

pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$.

1- Donner des équivalents simples de $f_\lambda(x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$

2- Pour quelles valeurs de λ f est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

3- Montrer que pour $\lambda \geq 2$, ce prolongement est dérivable à droite en 0 .

Corrigé : 1- On a $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\arctan(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, et d'autre part, $\left(x^2 + 1\right) \underset{0}{\sim} 1$ et $\left(x^2 + 1\right) \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

On en déduit donc que : $f_\lambda(x) \underset{0}{\sim} x^{\lambda - 1}$ et $f_\lambda(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi} x^{\lambda - 2}$.

2- f est prolongeable par continuité à droite en 0 si et seulement si $\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1$.

Dans ce cas, on pose $f_\lambda(0) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } \lambda > 1 \\ 1 \text{ si } \lambda = 1 \end{array} \right.$.

3- Soit $\lambda \geq 2$, on a donc $f_\lambda(0) = 0$.

Ainsi $\dfrac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x - 0} = \dfrac{f_\lambda(x)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{\lambda - 1}}{x} = x^{\lambda - 2}$, et puisque $\lambda \geq 2$, $x \mapsto x^{\lambda - 2}$ a une limite à droite finie en 0.

Donc le prolongement est dérivable à droite en 0.

Exercice 18. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$g_1(x) = \dfrac{\operatorname{argth}(x^3)}{x}$ $\qquad g_2(x) = x\,(\ln|x|)^3$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{1}{x^5}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$g_4(x) = x^2 \operatorname{argsh}(x)$ $\qquad g_5(x) = x^3 \ln|x|$ $\qquad g_6(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$

Classer toutes ces fonctions au voisinage de 0, en adoptant la notation suivante :
$g_i \prec g_j$ si et seulement si $g_i = o\,(g_j)$ au voisinage de 0

Corrigé : Commençons tout d'abord par essayer de trouver des équivalents.

On sait que $\operatorname{argth}(x) \underset{0}{\sim} x$. On en déduit que $g_1(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{x} = x^2$.

De même, on a $\operatorname{argsh}(x) \underset{0}{\sim} x$, donc $g_4(x) \underset{0}{\sim} x^2 x = x^3$.

On a : $\dfrac{g_1}{g_2} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{\left(\ln(|x|)\right)^3}$, donc $g_1 \prec g_2$.

De plus, $\dfrac{g_5}{g_1} \underset{0}{\sim} x \ln(|x|)$, donc $g_5 \prec g_1$.

D'autre part, $\dfrac{g_4}{g_5} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\ln(|x|)}$, donc $g_4 \prec g_5$.

Maintenant, $\dfrac{g_6}{g_4} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{|x|}}$, donc $g_6 \prec g_4$.

Enfin, $\dfrac{g_3}{g_6} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{|x|}}$, et on a $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{|x|} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$, donc $g_3 \prec g_6$.

La relation $\prec$ étant évidemment transitive, on en conclut que $g_3 \prec g_6 \prec g_4 \prec g_5 \prec g_1 \prec g_2$.

Chapitre 13

CALCUL DIFFERENTIEL

0- Présentation historique

Provenant de son auvergne natale, **Michel Rolle** (français, **1652-1719)** commence sa carrière à Paris comme simple copiste. Il s'opposa au calcul différentiel dont **Varignon** était, à Paris, l'ardent défenseur. Dans son "Traité d'algèbre" (1690) sur la résolution des équations, **Rolle** aborde un sujet fondamental : le problème de la séparation des racines. Il s'agit d'isoler les solutions d'une équation, c'est à dire de déterminer des voisinages disjoints contenant une et une seule solution. On applique alors divers algorithmes reposant sur la continuité, la monotonie, la convexité, etc.

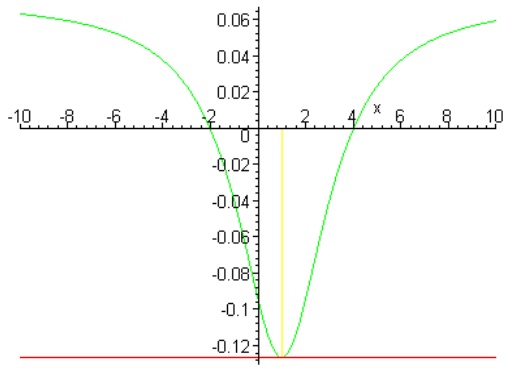
Formulation de Rolle (1691) : soit f(x) = 0 une équation algébrique entière (polynôme). Il ne peut exister plus d'une racine (réelle) entre deux racines consécutives de sa dérivée (i.e. la dérivée de f).

La notion de fonction dérivée existe clairement depuis **Leibniz**. Elle n'est cependant pas encore définie en tant que *limite* du taux d'accroissement, ce sera le fait de **d'Alembert**. Dire que f ' s'annule, c'est dire que *la tangente* à la courbe en un point situé entre a et b, est parallèle à l'axe des abscisses.

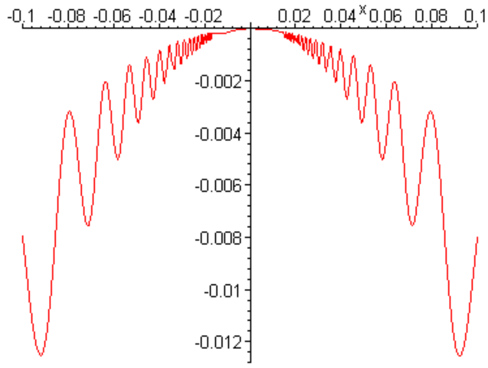
1- Théorème de Rolle

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[telle que f(a)=f(b). Alors, il existe un élément c de]a,b[tel que f '(c)=0.

Exemple : Avec $f : x \mapsto \arctan((x-1)^2+5) - \dfrac{3}{2}$, a=-2 et b=4



Remarque à propos de la démonstration du théorème de Rolle :
Il est faux de croire que, si c est un maximum, alors f est croissante à gauche de c, puis décroissante après. f(c) est certes la valeur maximale, mais f peut ne pas être monotone, ni à gauche, ni à droite. Prendre par exemple la fonction f définie par : $f(x)=-\frac{x^2}{2}-x^2\sin^2\frac{1}{x}$.



2- Théorème des accroissements finis

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[. Alors, il existe un élément c de]a,b[tel que f(b) – f(a)=f '(c)(b-a).

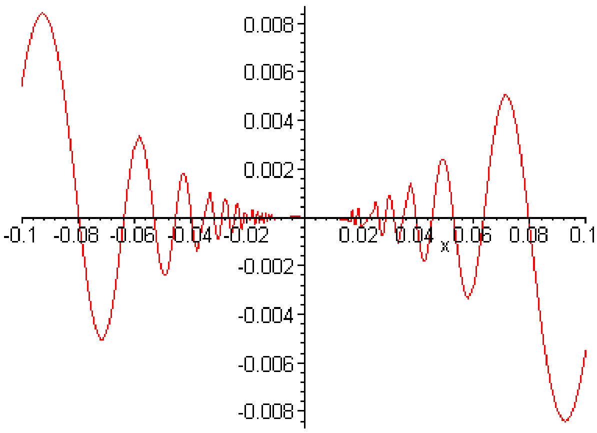
Applications :

1- Soient a, b deux réels tels que a soit strictement inférieur à b, f une fonction réelle définie et continue sur [a,b] telle que f soit dérivable en tout point de]a,b[sauf peut-être en x_0 élément de [a,b].

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ et vaut l, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et vaut l.

2- En étudiant la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$, on montre que la réciproque de la propriété en 1- est fausse.

En particulier, si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ n'existe pas, on ne peut conclure sur l'existence de $f'(x_0)$.



Graphe de la fonction f

Théorème : Inégalités des accroissements finis

Soit une fonction f dérivable sur [a, b].

1- Si $m \leq f' \leq M$ sur [a, b], alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

2- Si $|f'| \leq M$ sur [a, b], alors $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$.

Preuve : Méthode 1 :

Supposons qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f' \leq M$ sur [a,b].
Considérons les fonctions définies sur [a, b] :

$$g : x \mapsto f(x)-mx \text{ et } h : x \mapsto f(x)-Mx.$$

Pour tout x de [a, b], nous avons :

$$g'(x)=f'(x)-m \geq 0 \text{ et } h'(x)=f'(x)-M \leq 0$$

donc g est croissante et h décroissante sur [a, b] d'où :

$$g(a) \leq g(b) \text{ et } h(a) \geq h(b)$$

c'est-à-dire :

$$f(a)-ma \leq f(b)-mb \text{ et } f(a)-Ma \geq f(b)-Mb$$

ce qu'on peut écrire :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

En particulier si $|f'| \leq M$ sur [a, b], on a : $-M(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$
c'est-à-dire : $|f(b)-f(a)| \leq M(b - a)$.

Méthode 2 : Cas particulier du théorème des accroissements finis.

2- Sens de variation d'une fonction à valeurs réelles

Théorème : Soit f une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[. On a les équivalences suivantes :

f croissante sur [a, b] $\Leftrightarrow \forall t \in]a,b[, f'(t) \geq 0$

f décroissante sur [a, b] $\Leftrightarrow \forall t \in]a,b[, f'(t) \leq 0$

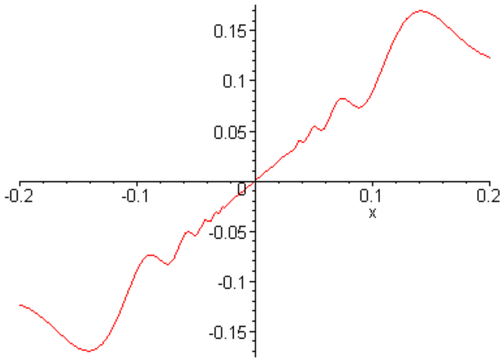
f constante sur [a, b] $\Leftrightarrow \forall t \in]a,b[, f'(t) = 0$.

Démonstration : Le sens $\Rightarrow$ découle d'un passage à la limite sur des taux d'accroissements de signe constant. Il peut être montré dès la classe de Première.

La réciproque est admise en lycée. Elle utilise en effet le théorème des accroissements finis. Si f ' est de signe constant (ou nul), il en est de même de tout taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ puisque ce dernier est égal à f '(c) avec c entre x et y.

Remarque : Il est faux de croire que $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f est strictement croissante sur un intervalle contenant x_0. Il suffit de la stricte positivité sur tout un intervalle, mais la positivité en un point unique ne suffit pas.

Considérer par exemple $f(x) = x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ en 0. On a f '(0) = 1, mais f ' n'est de signe constant dans aucun voisinage de 0.



Si f est dérivable et si $f' > 0$, f est strictement croissante. La réciproque est fausse. Il se peut que f soit strictement croissante et dérivable, et que f s'annule. II suffit de prendre $f(x) = x^3$.
L'équivalence est la suivante :
Notons Z l'ensemble des x où f ' s'annule.
f strictement croissante $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$ et Z ne contient aucun intervalle]a, b[avec $a < b$

En effet, dire que f est croissante sans l'être strictement, c'est dire qu'il existe $x < y$ tel que $f(x)=f(y)$, ou encore que f est constante sur un intervalle, ou encore que f s'annule sur un intervalle, ou enfin que Z contient un intervalle ouvert.

Corollaire : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sauf en un nombre fini de points de I. Si f ' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement monotone.

Théorème des accroissements finis généralisés
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur [a,b], dérivables sur]a,b[, g' ne s'annulant pas sur]a,b[.
Alors, il existe c élément de]a,b[tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Guillaume de l'Hospital

Règle de l'Hospital (Français 1661-1704)

Soit I intervalle, a un élément de I et ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soient f et g deux fonctions continues sur I et dérivables sur I\{a} avec $g'(x) \neq 0$ pour tout x élément de I\{a}. Alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$$

Variante : Soit I intervalle, a un élément de I et l un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Lors du calcul d'une limite d'un quotient $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ avec une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, avec f et g deux fonctions continues sur I et dérivables sur I\{a} avec g'(x) $\neq$ 0 pour tout x élément de I\{a}. Si $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

Cette règle apparaît pour la première fois en 1696 dans le traité Analyse des infiniment petits de Guillaume de L'Hospital, qui est le premier livre sur le calcul différentiel. Elle serait en fait due à Jean Bernoulli, qui l'aurait découverte deux ans plus tôt.

3- Fonctions de classe C^n

Définition : Soit I un intervalle. Une fonction de classe C^0 sur I est une fonction continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^0 sur I est noté C^0(I).

Une fonction de classe C^1 sur I est une fonction dérivable de dérivée continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I est noté C^1(I).

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Une fonction de classe C^n sur I est une fonction dérivable n fois et de dérivée $n^{\text{ième}}$ continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I est noté C^n(I).

Une fonction de classe C^∞ sur I est une fonction indéfiniment dérivable sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I est noté C^∞(I).

Exemple : La fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ (voir paragraphe 2) est un exemple de fonction de classe C^0, dérivable de dérivée non continue.

Démonstration : On a $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or puisque $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$, on a $-x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$ $(\text{car } x\geq 0)$ et donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

On en déduit que f est dérivable en 0 et on a $f'(0)=0$

D'autre part, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x\mapsto 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a vu que $\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et on sait que $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

On en déduit donc que $x\mapsto 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 et ainsi que f' n'est pas continue en 0.

Propriété : Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞) et soient α et β deux réels. Alors $\alpha f+\beta g$ est une fonction de classe C^n (resp. C^∞).

Formule de Leibniz : Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe C^n (resp. C^∞). Alors fg est une fonction de classe C^n (resp. C^∞).

De plus, $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur n.

- Fondation : C'est évidemment vérifié pour $n = 0$ et pour $n = 1$, pour lequel on reconnaît: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Hérédité : Si la formule est vraie au rang n et que les fonctions sont n+l fois dérivables, on voit que $(fg)^{(n)}$ est dérivable et de dérivée :

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left(f^{(p+1)} g^{(n-p)} + f^{(p)} g^{(n-p+1)} \right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p+1)} g^{(n-p)} + \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p+1)} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \left(C_n^{p-1} + C_n^p \right) f^{(p)} g^{(n-p+1)} \quad \text{en changeant d'indice } p+1 \to p \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p f^{(p)} g^{(n-p+1)}
\end{aligned}
$$

(On a utilisé le fait que $C_n^p = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$).

La démonstration, ainsi que la nature de la formule, est donc comparable à celle du développement du binôme de Newton. Ce n'est pas un hasard : la formule de Leibniz permet d'en déduire la formule du binôme de Newton Il suffit de prendre $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$ et d'appliquer la formule de Leibniz en $x = 0$.

4- Formule de Taylor-Lagrange

TAYLOR Brook, anglais, 1685-1731

Eclectique, il s'adonna à la musique, à la peinture et à la philosophie. Il fut, à Cambridge, l'élève de **John Machin**. En dehors de certains travaux en géométrie axés sur la perspective, on lui doit principalement la publication (1715-1717) de son traité sur le développement en série des fonctions : *Methodus incrementorum directa et inversa*. Il fut membre de la Royal Society de Londres (l'équivalent de notre Académie des sciences) dès 1712.

La formule de Taylor, dite aussi de Taylor-Lagrange, est en fait l'aboutissement de travaux déjà entamés par **Gregory**, **Newton**, **Leibniz** et **Jacques Bernoulli**.

Théorème : Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soient f une fonction de classe C^n sur [a,b] telle que $f^{(n+1)}$ existe sur]a,b[. Alors, il existe c élément de]a,b[tel que :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n

Remarque : Pour n=0, on retrouve la formule des accroissements finis.

Autre formulation avec les mêmes hypothèses :

- avec a=x, b=x+h, h>0 : $f(x+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$
- avec b=a+x, x>0 : Il existe θ élément de]0,1[tel que :

$$f(a+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)$$

- avec a=0, b=x, x>0 : Il existe θ élément de]0,1[tel que :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

Formule de Mac-Laurin

5- Formule de Taylor-Young

Théorème de Taylor-Young :

Soit I un intervalle, a un élément de I et n un entier naturel non nul.
Si f est une fonction n − 1 dérivable sur I et n fois dérivable en a, alors on a, au voisinage de a :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o\left((x-a)^n\right)$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre n

6- Position d'une courbe par rapport à sa tangente au voisinage d'un point.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable.

On rappelle que si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Montrer que l'implication réciproque est fausse en donnant des contre-exemples de fonctions continues en un point mais non dérivable en ce point.

Exercice 2 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on indiquera le domaine de dérivabilité de la fonction) :

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1}), \qquad f(x) = \ln(\sqrt{6x-1}(4x+5)^3), \qquad f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right),$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}, \qquad f(x) = x(x+\sqrt{1+x^2}), \qquad f(x) = x2^x$$

Exercice 3 : Montrer que si la fonction f est dérivable au point x_0 alors :

$$\Delta(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

admet une limite quand h tend vers 0.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 : Considérons la fonction polynomiale P définie par : $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 3$.
Ecrire $P(x)$ à l'aide de puissances de $(x-2)$.

Exercice 5 : 1- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tous les réels distincts x et y de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

2- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{x}{x^2+1} \leq \arctan(x) \leq x$.

Exercice 6. Pour x réel, on pose $g(x)=x^4-24x^2+x+1$. A l'aide de la formule de Taylor appliquée à la fonction polynôme g en 2, étudier la forme locale de la courbe représentant g au voisinage du point d'abscisse 2.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 : $x \mapsto |x|$ est un contre-exemple.

Exercice 2 :

1. f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, si $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2(x+1)}$.
2. f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{6};+\infty\right[$, si $x \in \left]\dfrac{1}{6};+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{84x+3}{(6x-1)(4x+5)}$.
3. f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, si $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4x}{3(x^4-1)}$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x\ln(2))2^x$.

Exercice 3 : $\lim\limits_{h\to 0} \Delta(h) = f'(x_0)$, la réciproque est fausse, $x \mapsto |x|$ avec $x_0 = 0$ est un contre-exemple.

Exercice 4 : On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour P entre x et 2. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -11 - 15(x-2) - 2(x-2)^2 + (x-2)^3$.

Exercice 5 : Application directe de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 6 : On utilise l'inégalité des accroissements finis pour $f : x \mapsto \sqrt{x}$ entre 10000 et 10001 :
f est continue sur [10000 ; 10001] et dérivable sur]10000 ; 10001[, de plus :

$$\forall x \in]10000\ ;\ 100001[, |f'(x)| \leq \frac{1}{200}$$

donc $|\sqrt{10001} - 100| \leq \dfrac{1}{200}$.

EXERCICES

Exercice 1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes. Sont-elles de classe C^1 ?

$$f\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{cases} \qquad g\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x-1|^3 \end{cases} \qquad h_\alpha\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases} \quad \alpha \in \{1,2,3\}$$

Exercice 2. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto (x-1)^3 e^x$.

Exercice 3. Soient $a\in\mathbb{R}$, $x_0 > 0$ et $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } 0<x<x_0 \\ x^2+12 & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et x_0 pour que f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Soit f une fonction non constante, n fois dérivable sur $[a;b]$. Montrer que si f possède n+1 zéros distincts dans $[a;b]$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 5. Soit f une fonction définie et continue sur le segment [0,1] et telle que f(0)=f(1)=0. On suppose, en outre, que la fonction f est dérivable sur [0, 1[et que f '(0)=0. On considère la fonction g de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{pour } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{pour } x=0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$. Interpréter ce résultat graphiquement.

Exercice 6. Evaluer un majorant de l'erreur commise en prenant 100 pour valeur approchée de la racine carrée de 10 001.

Exercice 7. Montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$: $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$.

En déduire que la somme $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

1- Montrer que si $x \in]0;1[$, alors on a : $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2- Montrer que si $x > 0$, alors on a : $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

3- Montrer que si x est un réel tel que $x > 0$, alors on a :

$$1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{16} < (1+x)^{\frac{3}{2}} < 1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}$$

Pour quelles valeurs de x, $1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}$ est-il une valeur approchée de $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ à 10^{-3} près ?

Exercice 9. a- Soient I un intervalle ouvert, et f une application de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I.
On suppose que f admet k zéros distincts sur I $(k \geq 2)$.
Démontrer que f' admet au moins $k - 1$ zéros distincts.
Est-ce que f ' peut admettre strictement plus de $k - 1$ zéros ?
Si f est deux fois dérivable sur I, que peut-on dire du nombre de zéros de f'' ?

b- *Application :* Soient n entier ≥ 2, et a et b deux nombres réels.
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n - ax + b$ admet :
- au plus deux racines réelles si n est pair,
- au plus trois racines réelles si n est impair

c- Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n ayant toutes ses racines réelles. Montrer qu'il en est de même pour P '. (distinguer le cas où toutes les racines de P sont simples du cas où elles ne le sont pas).

Exercice 10. Calculer les limites des fonctions ci-dessous aux points indiqués :

1- $f_1(x) = \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos(x)}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

2- $f_2(x) = \dfrac{x-1}{x^m-1}$ en $x_0 = 1$ (avec m réel non nul)

3- $f_3(x) = \dfrac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2}$ en $x_0 = a \neq 0$

4- $f_4(x) = \dfrac{a^x-b^x}{x}$ en $x_0 = 0$ $(a \neq b; a>0; b>0)$

Exercice 11. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1- $f(x) = \cos(x)$

2- $g(x) = x.\cos(x)$

3- $h(x) = x^{n-1}\ln(x)$

Exercice 12. En dérivant n fois l'égalité : $e^{3x}=e^xe^{2x}$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$.

Exercice 13. On dit que f est de classe C^n si f a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n.

1- a- Montrer que si f est de classe C^2 et si $f''(x_0)$ est non nul, le graphe de f est situé au voisinage de x_0 d'un seul côté par rapport à sa tangente en x_0.

b- Montrer que si de plus $f'(x_0)$ est nul, alors f présente un extremum local en x_0.

c- Montrer que si f et f' sont continues sur [a;b], si f '' existe et est positive sur]a;b[, alors le graphe (Γ) de f sur [a;b] est situé au dessus de chacune de ses tangentes.

2- Que peut-on conclure dans le cas où f est de classe C^n (n>2) et où $f''(x_0)$ est nul ?

Exercice 14. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I tels que $a < b < c$.
Montrer qu'il existe au moins un point d de I tel que :

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) + \frac{f''(d)}{2}(c-a)(c-b)$$

Méthode : On pourra utiliser la fonction ϕ définie par :

$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) - \frac{\lambda}{2}(x-a)(x-b)$ *pour un réel λ convenablement choisi.*

Exercice 15. Soit f une fonction de classe C² sur $[a;b]$ et telle que :

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.
On pourra introduire la fonction ϕ définie par : $\phi(x) = \big(f'(x) - f(x)\big)e^x$.

Exercice 16. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ et que pour tout entier n, $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \text{ et } M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

A l'aide de la formule de Taylor appliquée à un intervalle convenable de $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^{*+},\ |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

En déduire que : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 18. Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$A_x = \left\{\theta \in]0;1[/ \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6}.\mathrm{ch}(\theta x)\right\}$$

Montrer que A_x est un ensemble à un unique élément. On pose $A_x = \{\theta(x)\}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$

Exercice 19. a- Démontrer, en utilisant une fonction auxiliaire, que si f est dérivable sur [a;a+2h] et admet une dérivée seconde sur]a;a+2h[, on a :
$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(a + 2\theta h)$ où θ est élément de]0;1[

b- Supposons f de classe C^3 et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h)$.

Eléments de solution :

a- Soit $A = f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a)$

$= [f(a + 2h) - f(a + h)] - [f(a + h) - f(a)]$

Posons $\phi(x) = f(x + h) - f(x)$. On obtient alors : $A = \phi(a + h) - \phi(a)$.

Comme ϕ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe θ_1 élément de $]0;1[$ tel que $A = h.\phi'(a + \theta_1 h)$.

Or $\phi'(x) = f'(x + h) - f'(x)$, on a : $A = h[f'(a + \theta_1 h + h) - f'(a + \theta_1 h)]$.

Comme f' vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe θ_2 élément de $]0;1[$ tel que $A = h^2.f''(a + \theta_1 h + \theta_2 h)$.

Posons $\theta = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

Alors θ est élément de $]0;1[$ et $f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2.f''(a + 2\theta h)$.

b- f étant une fonction de classe C^3, nous pouvons appliquer la formule de Taylor à l'égalité précédente à l'ordre 2 pour le membre de gauche et à l'ordre 0 pour le membre de droite.

Nous avons ainsi l'existence de θ_3, θ_4, θ_5 éléments de $]0;1[$ tels que :

$$\left(f(a) + 2hf'(a) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(a) + \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(a + 2\theta_3 h) \right)$$

$$-2\left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a + \theta_4 h) \right) + f(a)$$

$$= h^2 f^{(2)}(a) + h^2 2\theta h f^{(3)}(a + 2\theta\theta_5 h)$$

D'où : $\theta = \dfrac{\frac{4}{3}f^{(3)}(a + 2\theta_3 h) - \frac{1}{3}f^{(3)}(a + \theta_4 h)}{2f^{(3)}(a + 2\theta\theta_5 h)}$.

Comme $f^{(3)}$ est continue et $f^{(3)}(a)$ non nul, par passage à la limite en 0 :

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$$

DEUX METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE

1- FORMULE DES TRAPÈZES

Soit f de classe C^2 sur [a,b] et g l'équation de la droite telle que g(a)=f(a) et g(b)=f(b). On approche alors l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ par le nombre $J = \int_a^b g(t)dt$.

1- Calculer J.

2- On désire majorer l'erreur de méthode |I-J|. Pour cela, on considère la fonction :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{x-a}{2}(f(x) + f(a)) - K\,(x-a)^3$$

où K est la constante déterminée par la condition $\varphi(b) = 0$.
Calculer φ' et φ''.
Par utilisation répétée du théorème de Rolle, prouver l'existence de c élément de]a,b[tel que $K = -\dfrac{f''(c)}{12}$

En déduire $I = J - \dfrac{(b-a)^3}{12} f''(c)$.

3- On discrétise l'intervalle [a,b] en les n+1 points $x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$, i=0,…,n. Prouver que l'on peut écrire :

$$I = \int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{2n}\left(f(a) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) + \varepsilon_n$$

$$\text{avec } |\varepsilon_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \text{ et } M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$$

Formule des trapèzes

Vous indiquerez auparavant pourquoi M_2 existe.

4- Application numérique : A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que l'utilisation de la formule pour approcher $\ln 2 = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t}$ assure une erreur de méthode inférieure à 10^{-6} ?

2- FORMULE DE SIMPSON

SIMPSON Thomas, anglais, 1710 - 1761. Disciple de Newton, il enseigna les mathématiques à l'académie de Woolwich. Il s'initia au calcul infinitésimal en étudiant les écrits de **L'Hospital** et publia un important traité *Nouveau traité des fluxions* (1737), autrement dit sur les *dérivées* selon **Newton** (par opposition à celles de **Leibniz**).
Méthode d'intégration approchée de Simpson : dans le calcul d'une quadrature (aire sous une courbe), elle consiste à remplacer trois points consécutifs d'un arc de courbe par un arc de parabole. Cette méthode très efficace est souvent utilisée sur les calculatrices "de poche" actuelles.

On désire ardemment améliorer la méthode précédente en approchant le graphe de f par une parabole, plutôt qu'une droite. Pour cela :
Soit f de classe C^4 sur [a,b] et g le polynôme de Lagrange de degré inférieur à 2 tel que $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$ et $g(c)=f(c)$ où $c=\frac{a+b}{2}$.

Exprimer g(x). Donner g(x) en fonction de u, avec $x = c + u\,\frac{b-a}{2}$.

Réponse : $g(x)=u^2\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-f(c)\right)+u\,\frac{f(b)-f(a)}{2}+f(c)$

Calculer $J=\int_a^b g(x)dx$. $\left\{\text{on posera } x = c + u\frac{b-a}{2}\right\}$

Réponse : $J=(f(a)+f(b)+4f(c))\,\frac{b-a}{6}$

3) Pour majorer l'erreur de méthode |I-J|, on considère la fonction :

$$\varphi(t)=\int_{c-t}^{c+t} f(x)dx - \frac{t}{3}\,(f(c+t) + f(c-t) + 4f(c)) - Kt^5,$$

où K est la constante déterminée par la condition $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$.

a) Calculer $\varphi^{(i)}$, i=1,2,3; prouver l'existence de η élément de $\left]0,\frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\varphi^{(3)}(\eta) = 0$, puis en déduire l'existence de γ élément de]a,b[tel que $K = -\frac{f^{(4)}(\gamma)}{90}$.

Réponse partielle : $\varphi'(t)=\frac{2}{3}[f(c+t)+f(c-t)]-\frac{4}{3}f(c)-\frac{t}{3}[f'(c+t)-f'(c-t)]-5Kt^4$.

$\varphi''(t)=\frac{1}{3}[f'(c+t)-f'(c-t)]-\frac{t}{3}[f''(c+t)+f''(c-t)]-20Kt^3$.

$\varphi^{(3)}(t)=-\frac{t}{3}[f^{(3)}(c+t)-f^{(3)}(c-t)]-60Kt^2$.

b) En déduire $I = J - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\gamma)$.

4) Montrer que, n étant un entier pair :

$$I=\int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{3n}(\, f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +\ldots+2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)) + \varepsilon_n$$

$$\text{avec } |\varepsilon_n|\le\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4 \text{ et } M_4 = \sup_{[a,b]}\left|f^{(4)}\right|$$

Formule de Simpson

Vous indiquerez auparavant pourquoi M_4 existe.
5) Application numérique : Reprendre l'application numérique illustrant la méthode des trapèzes.

Exemple : Une valeur approchée de $\int_0^1 \exp(x^2)dx$ est 1,4626517 (les 7 décimales sont exactes).
Comparons cette valeur avec celles obtenues par les sommes de Riemann (voir le chapitre Intégrale de Riemann), la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.

N	2	4	8	16	32	64
Riemann	1,14201271	1,27589363	1,36231966	1,41072400	1,43624595	1,44933827
Trapèzes	1,57158317	1,49067886	1,46971228	1,46442031	1,46309410	1,46276235
Simpson	1,46371076	1,46272341	1,46265632	1,46265203	1,46265176	1,46265175

On constate donc, que pour n=64, la méthode de Riemann $\left(\text{en } \frac{1}{n}\right)$ ne donne que deux décimales exactes, la méthode des trapèzes en donne quatre, et la méthode de Simpson en donne sept (et plus).

Quelques exercices corrigés

Exercice 20. Etudier la limite éventuelle de chacune des fonctions suivantes au point x_0 :

1- $u(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin^2(\pi x)}$ en $x_0 = 0$

2- $v(x) = \dfrac{\sin(x^3)}{\sin^2(x)}$ en $x_0 = 0$

Corrigé : 1- Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Posons $f(x)=1-\cos(x)$ et $g(x)=\sin^2(\pi x)$

On a bien $f(0)=g(0)=0$, et de plus $f'(x)=\sin(x)$ et $g'(x)=2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x)$.

On ne peut pas appliquer la règle de l'Hospital directement puisque

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x)}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Par contre, on a $f'(0)=g'(0)=0$, on peut donc appliquer la règle de l'Hospital aux fonctions f' et g'.

$f''(x)=\cos(x)$ et $g''(x)=2\pi^2\left[\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x)\right]$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{2\pi^2\left[\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x)\right]}=\dfrac{1}{2\pi^2}$.

Finalement, d'après la règle de l'Hospital appliquée aux fonctions f' et g', on a :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{2\pi^2}$, et d'après la règle de l'Hospital appliquée aux fonctions f et g, on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0}u(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2\pi^2}$

2- Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Comme précédemment, on va utiliser la règle de l'Hospital.

Posons $f(x)=\sin(x^3)$ et $g(x)=\sin^2(x)$.

On a bien $f(0)=g(0)=0$, et de plus $f'(x)=3x^2\cos(x^3)$ et $g'(x)=2\cos(x)\sin(x)$.

On ne peut pas appliquer la règle de l'hôpital directement puisque

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2\cos(x^3)}{2\cos(x)\sin(x)}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Par contre, on a $f'(0)=g'(0)=0$, on peut donc appliquer la règle de l'Hospital aux fonctions f' et g'.

$f''(x)=6x\cos(x^3)-9x^4\sin(x^3)$ et $g''(x)=2\left[\cos^2(x)-\sin^2(x)\right]$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\cos(x^3)-9x^4\sin(x^3)}{2\left[\cos^2(x)-\sin^2(x)\right]}=0$.

Finalement, d'après la règle de l'Hospital appliquée aux fonctions f' et g', on a :

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$, et d'après la règle de l'Hospital appliquée aux fonctions f et g, on obtient :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} v(x)=0$.

Exercice 21. Soient x et y deux réels vérifiant $0<x<y$. Montrer que : $x<\frac{y-x}{\ln y-\ln x}<y$.
On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g définie par : $g(t)=\ln t$.

Corrigé : Posons $g(t)=\ln t$, cette fonction est continue sur l'intervalle $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe c élément de $]x,y[$ tel que :

$$g(y)-g(x)=g'(c)(y-x)$$

Sachant que $\forall t\in\mathbb{R}^{*+},\ g'(t)=\frac{1}{t}$, la relation précédente nous donne $c=\frac{y-x}{\ln y-\ln x}$ et étant donné que $c\in]x,y[$, cela nous donne l'inégalité demandée.

Exercice 22. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.
Pour quelles valeurs de x, $x-\frac{x^2}{2}$ est-il une valeur approchée de ln (1 + x) à 10^{-3} près ?

Corrigé : Posons $f(x)=\ln(1+x)$.
D'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, puis 3 pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$, on obtient d'une part :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}(c_1),c_1\in]0,x[$$

et d'autre part :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}(0)+\frac{x^4}{24}f^{(4)}(c_2),c_2\in]0,x[$$

Un calcul simple nous donne $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f^{(3)}(0)=2$ ainsi que

$f^{(3)}(c_1)=\frac{2}{(c_1+1)^3},\ f^{(4)}(c_2)=\frac{-6}{(c_2+1)^4}$.

On en déduit donc que : $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(c_1+1)^3}$ et $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(c_2+1)^4}$.

En particulier, cela implique d'une part que : $f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^3}{3(c_1+1)^3}>0$, et d'autre part : $f(x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)=-\frac{x^4}{4(c_2+1)^4}<0$, d'où le résultat cherché.

On pouvait aussi démontrer chacune des inégalités en étudiant le signe des fonctions obtenues par différence des deux termes.

Puisque $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, on en déduit que : $0<\left|\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right|<\frac{x^3}{3}$.

Ainsi $x-\frac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près si :

$$\frac{x^3}{3}\leq 10^{-3}\Leftrightarrow x^3\leq 3\times 10^{-3}\Leftrightarrow x\leq 3^{\frac{1}{3}}\times 10^{-1}$$

Exercice 23. Etudier complètement la fonction f définie sur ℝ* par f(x) = |x ln|x| |.

Corrigé : Remarquons tout d'abord que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, on peut donc prolonger f par continuité sur ℝ en posant f(0)=0.

La fonction f est paire, on peut donc restreindre l'étude à ℝ*$^+$.

f est dérivable sur ℝ*$^+\backslash\{1\}$.

Dérivabilité de f en 0 :

$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{|x\ln|x||}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}|\ln|x||=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-|\ln|x||=-\infty$.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0. Par contre, le graphe de f, C_f, admet des demi-tangentes verticales à droite et à gauche au point d'abscisse 0.

Dérivabilité de f en 1 :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{|x\ln x|}{x-1}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}=1$, donc on a $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-\frac{x\ln x}{x-1}=-1$.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 1. Par contre, C_f admet des demi-tangentes de pente respective -1 et 1 à droite et à gauche au point d'abscisse 1.

Sur ℝ*$^+\backslash\{1\}$, f est dérivable et on a $f(x)=\left|\begin{array}{l}-x\ln x \text{ si } x\in\left]0,1\right[\\ x\ln x \text{ si } x\in\left]1,\infty\right[\end{array}\right.$.

On en déduit que $f'(x)=\left|\begin{array}{l}-(\ln x+1) \text{ si } x\in\left]0,1\right[\\ (\ln x+1) \text{ si } x\in\left]1,\infty\right[\end{array}\right.$.

Pour $x\in\left]1,\infty\right[$, on a : $(\ln x+1)\geq 0$ donc $f'(x)\geq 0$.

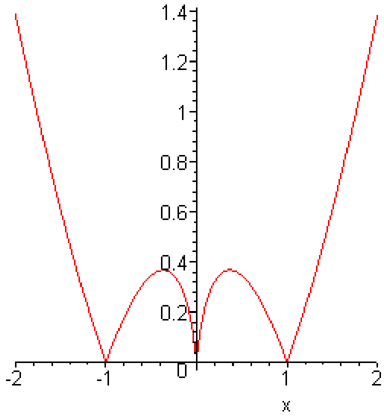
Pour $x \in]0,1[$, $(\ln x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$.

On peut donc tracer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$:

x	0 $\quad\quad$ e^{-1}	$\quad\quad$ 1	$\quad\quad$ $+\infty$
f'	+	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

A l'aide de la parité on en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

En s'aidant des informations concernant les demi-tangentes, on obtient l'allure de la courbe :



Chapitre 14

DEVELOPPEMENTS LIMITES

0- Présentation historique

Brillant élève de **Simson** et de **Newton** , **Maclaurin Colin** (ou **Mac-Laurin**) (écossais, 1698-1746) obtint à 19 ans une chaire d'enseignement des mathématiques à l'université d'Aberdeen et enseignera ultérieurement à Edimbourg. Il est à l'origine des développements en série entière des fonctions numériques par la méthode des coefficients indéterminés ("Traité des fluxions", 1742), prolongement des travaux de **Newton** et de **Taylor**.

Les formule de **Taylor** et de **Maclaurin** sont les outils privilégiés pour obtenir le développement limité d'un fonction sur un intervalle.

Un exemple de développement de Taylor convergent, mais non vers la fonction initiale, fut donné par Cauchy au moyen de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (Voir Exercices du Chapitre « Calcul Différentiel »).

Les développements limités sont utilisés pour l'approximation polynomiale des fonctions, l'étude des limites en un point et le comportement local.

1- Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0 sauf peut-être en x_0.
f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 signifie qu'il existe (n+1) réels a_0, …, a_n tels que :

$$f(x)= \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i \ + o\left((x\text{-}x_0)^n\right)$$

Remarque : On peut étendre la définition précédente à une fonction définie à droite de x_0, ou à gauche de x_0.

Définition : Le polynôme qui apparaît dans les écritures de développements limités s'appelle la partie régulière ou polynômiale de ces développements.

Remarque à propos des équivalents : Le premier terme non nul du développement limité d'une fonction est un équivalent de cette fonction.

Remarque à propos de la formule de Taylor-Young

Toute fonction f de classe C^{n-1} sur [0, x] (resp. [x, 0]) et telle que $f^{(n)}(0)$ existe admet un dl d'ordre n en 0 qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

Quelques développements limités classiques au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

2- Développement limité, continuité et dérivabilité

1- développement limité d'ordre 0

Propriété : Si f est définie au voisinage de 0 (sauf peut-être en 0), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1- f admet un dl d'ordre 0 en 0 de la forme $f(x) = a_0 + o(1)$

2- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a_0$

f est éventuellement prolongeable par continuité avec $f(0) = a_0$.

Dorénavant, les fonctions non définies en 0, qui admettent un dl en 0, seront prolongées par continuité.

2- développement limité d'ordre 1

Propriété : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1- f admet un dl d'ordre 1 en 0 de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$

2- f est dérivable en 0, $f'(0) = a_1$ et l'équation de la tangente au point $(0, a_0)$ est $y = a_0 + a_1 x$

3- Remarques :

a- Un développement de Taylor-Young à l'ordre n est un développement limité à l'ordre n.

b- Un développement limité à l'ordre n n'est pas nécessairement un développement de Taylor-Young à l'ordre n.

Exemple : La fonction $f(t) = \begin{cases} \cos(t) + t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais, comme elle n'est pas 2 fois dérivable en 0, elle n'admet pas de développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0. Voir exercice.

4- Application : Position d'une courbe par rapport à sa tangente.

Soit f une fonction admettant un développement limité en x_0 à un ordre n>1 de la forme :

$$f(x)=a_0 + a_1(x-x_0) + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \text{ avec } a_n \neq 0$$

Nous en déduisons que l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est $y= a_0 + a_1(x-x_0)$. Suivant la parité de n et le signe de a_n, nous pouvons préciser la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de x_0.

3- Propriétés

Dans ce paragraphe, f est une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0.

1- Unicité

Propriété : Le développement limité est unique.

Conséquence : Si f est de classe C^{n-1} sur [0, x] (resp. [x, 0]), si $f^{(n)}(0)$ existe et si f admet en 0 un dl d'ordre n de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$ alors pour tout entier k de [0, n], $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2- Parité

Propriété : Si f est une fonction paire (resp. impaire), la partie polynomiale (régulière) de son développement limité en 0 est un polynôme pair (resp. impair).

3- Développement limité par restriction

Propriété : Soit p un entier naturel inférieur à n. f admet un développement limité d'ordre p. Sa partie polynomiale (régulière) s'obtient « par restriction » aux termes de degré inférieur à p de la partie polynomiale (régulière) du développement limité d'ordre n.

4- Développement limité par division d'une puissance de la variable

Propriété : Si le développement limité de f en 0 est de la forme :

$$f(x)=a_p x^p+\ldots+a_n x^n+o(x^n) \quad (p \leq n)$$

Alors la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^p}$ admet un développement limité d'ordre (n-p) :

$$g(x)=a_p+a_{p+1}x^1+\ldots+a_n x^{n-p}+ o(x^{n-p})$$

5- Intégration d'un développement limité

Propriété : Soit f admettant un développement limité en 0 d'ordre n : $f(x)=P_n(x) + o(x^n)$ Si f est intégrable sur [0,x] ou [x,0], alors la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ admet en 0 un développement limité d'ordre (n+1) donné par :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x P_n(t)dt + o(x^{n+1})$$

Application : Développement limité de arctan en 0.

Remarque : Il est à noter que le développement limité de arctan a permis à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ une avancée spectaculaire dans le calcul des décimales de π, basé jusque là sur la méthode d'Archimède (III$^{\text{ème}}$ avant JC) qui approxima un cercle par un polygone dont on calcule la longueur du périmètre ou l'aire. Archimède utilisa un polygone de 96 côtés, Al-Kashi (XV$^{\text{ème}}$) un polygone de 3×2^{28} côtés, Ludolph van Ceulen (≈ 1600) un polygone de 2^{62} côtés, obtenant pour ce dernier une trentaine de décimales. Cette méthode fut abandonnée au profit de méthodes donnant des expressions de π sous forme d'arctan. Citons en particulier la formule de Machin (1706) que le lecteur assidu se chargera de prouver :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Machin obtint ainsi une centaine de décimales. On connaît aujourd'hui (2003) plus de 1000 milliards de décimales de π.

6- Remarque sur la dérivation d'un développement limité

Propriété : Soit f admettant un développement limité en 0 d'ordre n : $f(x)=P_n(x) + \circ(x^n)$
Si f est dérivable au voisinage de 0 et si **f '** ***admet un développement limité d'ordre (n-1) en 0 :***

$$f'(x)=Q_{n-1}(x) + o(x^{n-1}), \text{ alors } Q_{n-1}=P_n'$$

4- Calcul pratique

Dans ce paragraphe, f et g sont 2 fonctions admettant des développements limités d'ordre n en 0.

1- Combinaison linéaire

Propriété : $(\alpha f+\beta g)$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont on obtient la partie polynomiale (régulière) en additionnant les 2 parties polynomiales (régulières) de αf et βg.

2- Produit

Propriété : (fg) admet un développement limité d'ordre n en 0 dont on obtient la partie polynomiale (régulière) en faisant le produit des 2 parties polynomiales (régulières) de f et g et en ne gardant que les monômes de degré inférieur (ou égal) à n.

3- Quotient

Propriété : On suppose de plus que la valuation de la partie polynomiale (régulière) de g est nulle.
Alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie polynomiale (régulière) est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de la partie polynomiale (régulière) de f et par la partie polynomiale (régulière) de g.

4- Composition

Propriété : On suppose de plus que la valuation de la partie polynomiale (régulière) de f est non nulle $\left(\operatorname{Lim}_{0} f = 0\right)$.

Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Sa partie polynomiale (régulière) s'obtient en composant les parties polynomiales (régulières) de f et g et en ne gardant que les monômes de degré inférieur (ou égal) à n.

5- Développement généralisé (asymptotique)

1- Développement généralisé

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 tel que la fonction : $x \mapsto (x-x_0)^{\alpha} f(x)$ admette un développement limité d'ordre n en x_0.

$$(x-x_0)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Nous avons alors le développement généralisé de f en x_0 :

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{\alpha}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \right)$$

2- Branches infinies

On désigne par f une fonction de variable réelle et par C_f la courbe représentant f dans un plan muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Les branches infinies de C_f correspondent aux cas suivants :

1- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ avec x_0 réel : C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

2- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ avec L réel : C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$.

3- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$: une étude plus poussée est nécessaire.

Il y a deux méthodes possibles :

a- On cherche $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ pour comparer f(x) à x au voisinage de $\pm\infty$. On peut faire le classement suivant :

- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que C_f admet une branche parabolique verticale.

Exemples : $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$.

- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C_f admet une branche parabolique horizontale.

Exemples : $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \ln(x)$.

- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$)

– si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$, C_f admet une asymptote d'équation y=ax + b

– si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, C_f admet une branche parabolique de direction y=ax

Exemple : $f(x) = 2x + \ln x$

b- On cherche un développement asymptotique de f en $\pm\infty$

(qui peut permettre en plus d'étudier la position de C_f par rapport à l'asymptote).

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 : Simplifier au maximum les écritures suivantes :

1. $(1+3x-x^2+o(x^3))+(-2+5x^2-x^4+o(x^4))$
2. $(2x-5x^2+4x^3+o(x^5)).(-1+7x-x^2+3x^3+2x^4+x^5+o(x^5))$
3. $\dfrac{2x+4x^2+o(x^4)}{x-x^2+o(x^2)}$

Exercice 2 : Déterminer un développement limité à l'ordre n de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x)=2x+3x^3-x^4,\ a=0,\ n=2$ puis $n=5.$ Même question en a=3.
2. $f(x)=\ln(1-x)+x^2+\dfrac{2}{1+x^3},\ a=0,\ n=6.$
3. $f(x)=\cos(3x),\ a=0,\ n=5.$
4. $f(x)=\sin(x)\sqrt{1+x},\ a=0,\ n=4.$
5. $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x},\ a=0,\ n=3.$
6. $f(x)=\tan(x),\ a=\dfrac{\pi}{4},\ n=4.$

Exercice 3. Pour x réel convenable, on pose $f(x)=\dfrac{3x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1}$.

Montrer qu'au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ on a : $f(x)=3x+7+12\left(\dfrac{1}{x}\right)+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 :

1. $-1+3x+4x^2+o(x^3)$
2. $-2x+19x^2-41x^3+39x^4-15x^5+o(x^5)$
3. $2+6x+o(x)$

Exercice 2 :

1. quand $a=0,\ n=2,\ f(x)=2x+o(x^2)$,
   quand $a=0,\ n=5,\ f(x)=2x+3x^3-x^4+o(x^5)$
   quand $a=3,\ n=2,\ f(x)=6-25(x-3)-26(x-3)^2+o((x-3)^2)$,
   quand $a=3,\ n=5,\ f(x)=6-25(x-3)-26(x-3)^2-9(x-3)^3-(x-3)^4+o((x-3)^5)$
2. $f(x)=2-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{7x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{11x^6}{6}+o(x^6)$
3. $f(x)=1-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{81}{24}x^4+o(x^5)$
4. $f(x)=x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{7}{24}x^3-\dfrac{1}{48}x^4+o(x^4)$
5. $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$
6. $f(x)=1+2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{8}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\dfrac{10}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4+o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$

EXERCICES
APPLICATIONS DU COURS

Exercice 1. a- Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de t_0. Montrer que f est dérivable en t_0.

b- Montrer que l'existence d'un développement limité à l'ordre n strictement supérieur à 1 au voisinage de t_0 n'implique pas l'existence de $f^{(n)}(t_0)$ ni même l'existence d'autre dérivée que $f'(t_0)$.

Indication : Vous pourrez utiliser la fonction $f(t)=\begin{cases}\cos(t)+t^3\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

Exercice 2. Déceler l'erreur dans le calcul suivant du développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f:\ x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x+x^2}$ et la corriger.

1- $\sin(x) = x + o(x^2)$

2- La division suivant les puissances croissantes de x par $(x + x^2)$ donne :

$$x = (x + x^2)(1 - x) + x^3$$

3- D'où : $f(x) = 1 - x + o(x^2)$.

Exercice 3. a- Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1+x+x^2+x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1- Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(x)=1+x+x^2+o(x^2)$.

En déduire que f est dérivable en 0. Déterminer f '(0).

2- Montrer que f ' n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en 0.

b- Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Montrer que g admet en 0 un développement limité à tout ordre. Déterminer le.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(t) = (\ln|t|).t^2$.

a- Montrer que vous pouvez prolonger f en 0 par continuité. On appelle encore f le prolongement par continuité.

b- Montrer que f est dérivable en 0. Déterminer f '(0).

c- Montrer que f n'a pas de développement limité d'ordre strictement supérieur à 1.

Exercice 5. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\frac{x}{\sin(x)};\ f_2(x)=\frac{1}{\cos(x)};\ f_3(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x};\ f_4(x)=\frac{x}{e^x-1};\ f_5(x)=\sqrt{1+\sin(x)};$$
$$f_6(x)=\sqrt{1+\cos(x)}$$

Exercice 6. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{\cos(x)} ;\ f_2(x) = e^{\frac{x}{\cos(x)}} ;\ f_3(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 7. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 1 de $\frac{\ln x}{x^2}$.

<u>*Méthode :*</u> *on posera x = 1 + u avec u au voisinage de 0.*

Exercice 8. Déterminer le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 9. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de :

a- $f(x) = \arctan(x)$ au voisinage de $\sqrt{2}$.

b- $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}}$ au voisinage de π.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0 ;\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$, et donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$. Déterminer la limite de f en 0, l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la tangente par rapport à la courbe représentative de f.

Exercice 12. Etudier, suivant les valeurs du paramètre a, la forme et la position par rapport à sa tangente de la fonction ci-dessous au voisinage de 0 :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 - ax + x^2}{1 + ax - x^2}\right) - \frac{3 + x}{1 + x}$$

Chaque cas devra être illustré par un dessin.

Exercice 13. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$.

1- Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de g(x). En déduire un équivalent de g au voisinage de 0.

2- Calculer la limite éventuelle de $\dfrac{g(x)}{x^3}$ en 0.

Exercice 14. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + \lambda x^2 + 1}$.

1- Calculer un développement asymptotique de f(x) au voisinage de $-\infty$.

2- Calculer λ pour que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

EXERCICES
ETUDES DE FONCTIONS

Exercice 15. On considère la famille de fonctions f définies par :

$$f: x \mapsto \arctan(x) - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$$

où a et b sont deux réels.

1- Ecrire le développement limité à l'ordre 7 de f au voisinage de 0.

2- On se propose d'étudier la fonction f obtenue pour $a = \frac{4}{15}$ et $b = \frac{3}{5}$.

a- Déduire de la question 1-, l'allure de la courbe représentative (C) de f au voisinage de 0.

b- On rappelle que pour $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

En déduire le développement généralisé de f au voisinage de $(+\infty)$, de la forme :

$$f(x) = \alpha + \beta x + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

puis l'allure de (C) au voisinage de $(+\infty)$.

3- Achever l'étude de f.

4- Tracer (C).

Exercice 16. On considère la fonction réelle f définie pour tout x non nul par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x + 1}\, \arctan(x)$$

1- Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Quelle est la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour x strictement négatif ?

2- Déterminer des nombres réels a,b,c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ au voisinage de } (+\infty)$$

Déterminer de même des réels α,β,γ tels que :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ au voisinage de } (-\infty).$$

3- Soit (Γ) la courbe d'équation "$y = f(x)$". Déterminer les asymptotes de (Γ) et la position relative de (Γ) par rapport à ses asymptotes.

Exercice 17. On pose $f(x)=\frac{1-x^2}{x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

1. **Propriétés générales de la fonction f :**

   a- Donner le domaine de définition D_f de f.

   b- Montrer que f est paire.

   c- Exprimer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de f(x).

2. **Etude de f au voisinage de 0 et de $+\infty$:**

   a- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.

Donner l'allure de la courbe C_f représentant f dans un repère orthonormé au voisinage du point d'abscisse 0.

   b- Trouver un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ de précision $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Interpréter géométriquement.

3. **Etude de f au voisinage de 1 :**

   a- Donner un équivalent (le plus simple possible) de $f(x)$ au voisinage de 1.

   b- Quelle est l'allure de C_f au voisinage du point d'abscisse 1.

4. **Etude des variations de f :**

   a- En appliquant le théorème des accroissements finis à φ définie par :

$$\varphi(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\text{ montrer que : } \forall x\in\left]0;1\right[\quad \varphi(x)-\frac{2x}{1+x^2}>0$$

   b- Montrer que f (prolongée par continuité) est décroissante sur $[0;+\infty[$.

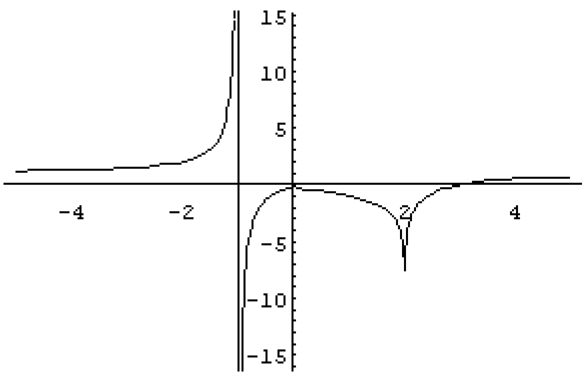
5. **Graphe**

   Représenter C_f.

Exercice 18. Etudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$$

Remarque : Le graphe donné par une calculatrice ou par un logiciel de calcul ne donne pas à première vue la bonne idée de la courbe comme vous pourrez vous en rendre compte en étudiant f…



Exercice 19. Etudier la fonction f définie par : $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t-1}\,e^{\frac{1}{t}}$ (exercice avec calculatrice).

Eléments de solution :

- f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
- Etude en 0 :

$\lim\limits_{0^+} f=-\infty$, $\lim\limits_{0^-} f=0$, on pose f(0)=0, $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=0$

f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

- Etude en 1 :

$f(t)\underset{1}{\sim}\dfrac{2e}{t-1}$ d'où les limites en 1.

- Etude en $+\infty$ et $-\infty$:

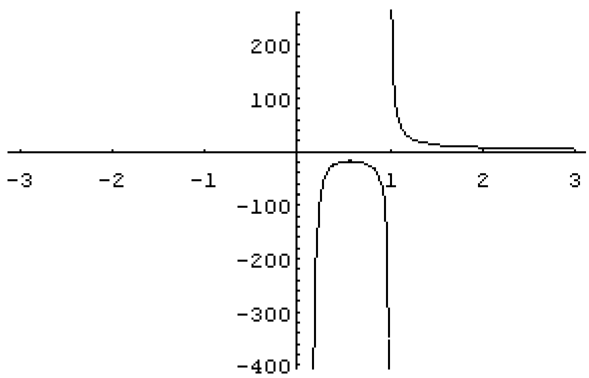
Un développement généralisé de f donne :

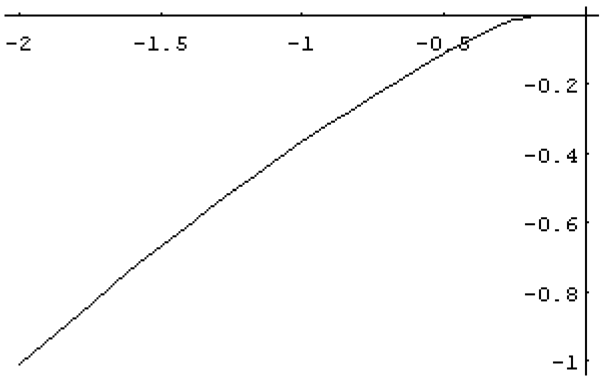
$f(t)=t+2+\dfrac{7}{2t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right)$ donc la droite Δ d'équation y=t+2 est asymptote au graphe C_f de f en $+\infty$ et $-\infty$. On en déduite aussi la position relative de Δ et C_f.

- Pour tout t élément de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f'(t)=e^{\frac{1}{t}}\dfrac{\varphi(t)}{t^2(t-1)^2}$ avec $\varphi(t)=t^4-3t^3-t+1$.

Pour étudier le signe de φ, on étudie ses variations via le signe de φ'.
Pour étudier le signe de φ', on étudie ses variations via le signe de φ''.
On trouve que φ s'annule 2 fois : une fois en β compris entre 0 et 1 et une fois en α compris entre 1 et $+\infty$.
Une valeur approchée de α est 3,07 et de $f(\alpha)$ est 6,97.
Une valeur approchée de β est 0,56 et de $f(\beta)$ est –17,80.

Graphe de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$ (attention à l'échelle)





Exercice 20. Soient f et g définies par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$

1- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α réelle. En déduire le signe de f.

2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3- Calculer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de g.

En déduire l'allure de la courbe représentant g au voisinage du point d'abscisse 0 et faire un dessin.

4- Calculer les réels a,b et c tels que : $g(x) \underset{+\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Faire un travail analogue au voisinage de - ∞.

5- En déduire la courbe représentative de g. On admettra $\alpha \approx 2{,}2$ et $g(\alpha) \approx 4$

Quelques exercices corrigés

Exercice 21. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 1 de $\frac{\ln(x)}{x^2}$.
Méthode : on posera x = 1 + u avec u au voisinage de 0.

Corrigé : Posons x=1+u alors $f(x)=\frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2}$.

Or, on sait que $\frac{1}{(1+u)}\underset{0}{=}1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+o(u^5)$.

Donc, en dérivant, on obtient : $\frac{-1}{(1+u)^2}\underset{0}{=}-1+2u-3u^2+4u^3-5u^4+o(u^4)$.

D'où : $\frac{1}{(1+u)^2}\underset{0}{=}1-2u+3u^2-4u^3+5u^4+o(u^4)$.

D'autre part, on a : $\ln(1+u)\underset{0}{=}u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o(u^4)$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2}&=\left(1-2u+3u^2-4u^3+5u^4+o(u^4)\right)\left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o(u^4)\right)\\
&=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4-2u\left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3\right)+3u^2\left(u-\frac{1}{2}u^2\right)-4u^4+o(u^4)\\
&=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4-2u^2+u^3-\frac{2}{3}u^4+3u^3-\frac{3}{2}u^4-4u^4+o(u^4)\\
&=u-\frac{5}{2}u^2+\frac{13}{3}u^3-\frac{77}{12}u^4+o(u^4)
\end{aligned}$$

Finalement, cela nous donne :

$$\begin{aligned}
f(x)&=x-1-\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{13}{3}(x-1)^3-\frac{77}{12}(x-1)^4+o\left((x-1)^4\right)\\
&=\frac{43}{12}-\frac{50}{3}x-28x^2-\frac{64}{3}x^3-\frac{77}{12}x^4+o\left((x-1)^4\right)
\end{aligned}$$

En fait, on a une deuxième solution qui est un peu plus rapide :
On veut calculer le développement limité du quotient de :

$\ln(1+u)\underset{0}{=}u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o(u^4)$ par $(1+u)^2=1+2u+u^2$.

On peut donc pour cela effectuer la division selon les puissances croissantes de la partie polynomiale du numérateur par la partie polynomiale du dénominateur car la valuation de $(1+u)^2$ est 0.

$$
\begin{array}{l|l}
u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4 & 1+2u+u^2 \\
\hline
-u-2u^2-u^3 & u-\frac{5}{2}u^2+\frac{13}{3}u^3-\frac{77}{12}u^4 \\
\hline
-\frac{5}{2}u^2-\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4 & \\
\frac{5}{2}u^2+5u^3+\frac{5}{2}u^4 & \\
\hline
\frac{13}{3}u^3+\frac{9}{4}u^4 & \\
-\frac{13}{3}u^3-\frac{26}{3}u^4-\frac{13}{3}u^5 & \\
\hline
-\frac{77}{12}u^4-\frac{13}{3}u^5 &
\end{array}
$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode précédente.

Exercice 22. 1- Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de $\arctan\left(\sqrt{x}\right)$.

2- Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de sh(ln(1+x)).

3- Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-\cos x}$.

Corrigé : 1- On sait que pour x au voisinage de 2, on a :

$$\arctan\left(\sqrt{x}\right)=$$

$$\arctan\left(\sqrt{2}\right)+(x-2)\arctan'\left(\sqrt{2}\right)+\frac{(x-2)^2}{2}\arctan''\left(\sqrt{2}\right)+\frac{(x-2)^3}{2}\arctan'''\left(\sqrt{2}\right)+o\left((x-2)^3\right)$$

Or, $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\arctan''(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ et $\arctan'''(x)=\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Donc, $\arctan'\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{3}$, $\arctan''\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{-2\sqrt{2}}{9}$ et $\arctan'''\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{10}{27}$.

Finalement, on obtient :

$$\arctan\left(\sqrt{x}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{\sqrt{2}}{9}(x-2)^2+\frac{5}{27}(x-2)^3+o\left((x-2)^3\right).$$

2- On calcule tout d'abord le développement limité de ln (1 + x) à l'ordre 5 :

$$\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right)$$

On rappelle que : $\operatorname{sh}(u)\underset{0}{=}u+\dfrac{u^3}{6}+\dfrac{u^5}{120}+o\left(u^5\right)$.

On en déduit alors que :

$$\operatorname{sh}\left(\ln(1+x)\right)\underset{0}{=}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)^3$$
$$+\frac{1}{120}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)^5+o\left(x^5\right)$$

Evidemment, on ne va pas développer complètement chacune de ces expressions.
En effet, vu qu'on est à l'ordre 5, on peut directement remplacer
$\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)^5$ par x^5, les autres termes étant des puissances supérieures strictement à 5.

De même, $\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)^3$ devient :

$$x^3-3\times\frac{1}{2}x^4+3\times\frac{1}{3}x^5+3\times\frac{1}{4}x^5=x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\operatorname{sh}\left(\ln(1+x)\right)\underset{0}{=}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5\right)+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^5\right)$$
$$\underset{0}{=}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^5+o\left(x^5\right)$$

3- On a $\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)$ donc :

$$x-\ln(1+x)\underset{0}{=}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right),$$

c'est-à-dire $x-\ln(1+x)\underset{0}{=}x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2+o\left(x^2\right)\right)$

D'autre part, $e^x\underset{0}{=}1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)$ et $\cos(x)\underset{0}{=}1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)$.

D'où : $e^x-\cos(x)\underset{0}{\overset{x}{=}}x+x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)=x\left(1+x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^3\right)\right)$.

Ainsi : $\frac{1}{e^x-\cos(x)}\underset{0}{=}\frac{1}{x\left(1+x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^3\right)\right)}\underset{0}{=}\frac{1}{x}\frac{1}{\left(1+x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^3\right)\right)}$

Or, $\frac{1}{1+u}\underset{0}{=}1-u+u^2+o\left(u^2\right)$, donc en posant $u=x+\frac{1}{6}x^2$, on obtient :

$$\frac{1}{e^x-\cos(x)}\underset{0}{=}\frac{1}{x}\times\left(1-x-\frac{1}{6}x^2+\left(x+\frac{1}{6}x^2\right)^2+o\left(x^2\right)\right)\underset{0}{=}\frac{1}{x}\times\left(1-x-\frac{1}{6}x^2+x^2+o\left(x^2\right)\right)$$
$$\underset{0}{=}\frac{1}{x}\times\left(1-x+\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

Finalement, on en conclut que :

$$\frac{x-\ln(1+x)}{e^x-\cos(x)}\underset{0}{=}x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2+o\left(x^2\right)\right)\frac{1}{x}\left(1-x+\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1-x+\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{x-\ln(1+x)}{e^x-\cos(x)}\underset{0}{=}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{12}x^3+o\left(x^3\right)\underset{0}{=}\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

Exercice 23. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

1- Calculer un développement limité de f(x) à l'ordre 2 au voisinage de 0. Que peut-on en déduire pour f et sa représentation graphique C_f ?
2- Montrer que C_f admet deux asymptotes et étudier sa position par rapport à celles-ci.

Corrigé : 1- On a $e^x\underset{0}{=}1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$, donc $e^x-1\underset{0}{=}x\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)$.

D'où : $\dfrac{x}{e^x-1}\underset{0}{=}\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o\left(x^2\right)}$.

Or, $\dfrac{1}{1+u}\underset{0}{=}1-u+u^2+o\left(u^2\right)$ donc,

$$\frac{x}{e^x-1}\underset{0}{=}1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)^2+o\left(x^2\right)\underset{0}{=}1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x^2+o\left(x^2\right)\underset{0}{=}1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o\left(x^2\right)$$

Graphiquement, cela signifie que C_f à l'allure de la droite d'équation $y=1-\frac{1}{2}x$ au voisinage de zéro.

2- Etude au voisinage de $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=0^-$.

On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et C_f est en dessous de son asymptote en $+\infty$.

Etude au voisinage de $-\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=+\infty$.

Il suffit tout d'abord étudier $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=-1$.

Ensuite, on étudie :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)=0^+$$

On en conclut que la droite d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et C_f est en dessus de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right) \arctan x$.

1- Montrer que f admet en 0 une limite finie que l'on déterminera.

2- Montrer que le prolongement de f en 0 est dérivable. Etudier la position de la courbe par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

3- Étudier au voisinage de $+\infty$ l'existence d'une asymptote ainsi que la position de la courbe par rapport à celle-ci. De même au voisinage de $-\infty$.

Corrigé : 1- On sait que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$, donc : $f(x) \underset{0}{\sim} \left(x+2-\frac{1}{x}\right)x = x^2+2x-1 \underset{x\to 0}{\to} -1$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$.

2- On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)+1}{x}$.

On sait que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ donc :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{=} \frac{\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)+1}{x} \underset{0}{=} \frac{x^2+2x-1-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)+1}{x}$$

$$\underset{0}{=} \frac{2x+\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x} \underset{0}{=} 2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}x^2+o(x^2).$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{=} 2$.

On en conclut que le prolongement de f en 0 est dérivable en 0, et on a $f'(0) = 2$.

De plus, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{=} 2+\frac{4}{3}x+o(x)$, donc $f(x)-(f(0)+2x) \underset{0}{=} \frac{4}{3}x^2+o(x^2)$.

Or l'équation de la tangente n'est autre que « y=f(0)+2x » donc on en déduit que la courbe est toujours au dessus de sa tangente.

3- Pour l'étude des asymptotes, nous allons faire appel au résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$$

Etude au voisinage de $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x) = +\infty$.

Il faut donc tout d'abord étudier : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ car $\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}x$.

Ensuite, il faut étudier :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right)$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)=\pi$ et on peut faire un développement asymptotique de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui nous donne :

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right)=-1$.

On en déduit donc que $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\pi-1$.

On en conclut que la droite d'équation « $y=\frac{\pi}{2}x+(\pi-1)$ » est une asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

Etude au voisinage de $-\infty$:

On a : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)=+\infty$.

Il faut donc tout d'abord étudier $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)}{x}=-\frac{\pi}{2}$ car $\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{\pi}{2}x$.

Ensuite, il faut étudier :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan(x)+\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right).$$

On a $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)=-\pi$ et on peut faire un développement asymptotique de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\underset{-\infty}{=}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui nous donne :

$\lim_{x\to-\infty}\left(-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)\right)=-1$.

On en déduit donc que : $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=-\pi-1$.

On en conclut que la droite d'équation « $y=\frac{\pi}{2}x-(\pi+1)$ »est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$.

Chapitre 15

SUITES DE REELS

I- À Propos des suites

Définition : Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
L'image de n par u est notée u_n. La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ et parfois s'il n'y a pas d'ambigüité (u_n).

a. Suites arithmétiques et géométriques

Le tableau ci-dessous rassemble les principaux résultats à connaître sur les suites.

	Suite arithmétique de raison r de premier terme u_0=a	Suite géométrique de raison q de premier terme u_0=a
Caractérisation par une relation de récurrence	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q.u_n$
Caractérisation par une formule explicite	$u_n= rn + a$	$u_n=a.q^n$
Somme de N termes consécutifs	$Na + \frac{N(N-1)}{2}r$	$a\times\frac{1-q^N}{1-q}$ (si $q\neq 1$)

Exemple :
Une utilisation courante des suites géométriques intervient dans les prêts à crédits. Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Du point de vue de prêteur, le taux d'intérêt correspond à ce qu'il pourrait gagner par ailleurs en plaçant son argent. Ainsi, le capital M deviendrait M(1+t) au bout du premier mois, $M(1+t)^2$ au bout du deuxième, ..., $M(1+t)^n$ au bout de n mois. Il ne peut consentir à prêter la somme M que si les remboursements réguliers lui permettent d'obtenir un capital équivalent à $M(1+t)^n$ au bout de n mois, en plaçant ces remboursements dans des conditions comparables. Ainsi, recevant une somme a au bout d'un mois, et plaçant cette somme au taux t, il aura $a(1+t)^{n-1}$ au bout des n-1 mois restants. Recevant une autre somme a au bout de deux mois, il aura $a(1+t)^{n-2}$ au bout des n-2 mois restants, etc... La dernière somme reçue, au $n^{\text{ème}}$ mois, est a et ne rapporte aucun intérêt. Son capital final sera donc :

$$a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + ... + a(1+t) + a = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

qui doit être égal à $M(1+t)^n$, d'où la relation :

$$a = \frac{Mt}{1-(1+t)^{-n}}$$

Une autre explication de cette formule sera donnée en application des suites arithmético-géométriques.

Indiquons par ailleurs qu'il existe deux méthodes pour passer du temps mensuel t au taux annuel T :

1- La méthode exacte du taux actuariel (tenant compte des intérêts cumulés) :

$$1 + T = (1 + t)^{12}$$

Ainsi, un taux annuel de 6% correspond à un taux mensuel de 0,4868 %.

2- La méthode du taux proportionnel consistant à annoncer la formule $t = \frac{T}{12}$ (tout en pratiquant quand même des intérêts cumulés). Ainsi, un taux proportionnel annoncé de 6% correspond à un taux mensuel de 0,5 %, et donc à un taux annuel actuariel réel de 6,17 % = $1{,}005^{12} - 1$. Le prêteur a avantage à parler de taux proportionnel. A charge pour l'emprunteur de le convertir en taux actuariel qui lui sera vraiment appliqué.

Application numérique : emprunt de 40 000 Euros au taux annuel de 6% sur 10 ans. Le montant mensuel des remboursements est de 440,90 Euros au taux actuariel, et de 444,08 au taux proportionnel. La différence est minime, mais, sur 120 mois, cela représente quand même 381,60 Euros.

A propos des suites arithmético-géométriques :
Une telle suite est de la forme :

$$\forall n, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarques : avec b = 0, on retrouve les suites géométriques.
avec a = 1, on retrouve les suites arithmétiques.

Une solution particulière est obtenue pour la suite constante l telle que $l = al + b$. Cette valeur l est d'ailleurs la limite éventuelle de la suite si elle converge. Soit (v_n) la suite auxiliaire définie par :

$$\forall n, v_n = u_n - l$$

On a alors :

$$\forall n, v_{n+1} = a.v_n$$

On a :

$$v_n = a^n v_0$$

et

$$u_n = l + a^n (u_0 - l)$$

La suite converge donc si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 = l$.

Exemple :

Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Au moment de payer la $k^{ème}$ mensualité, l'emprunteur a déjà remboursé une partie du capital. Soit C_{k-1} le capital restant à rembourser après le $k-1^{ème}$ versement, de sorte que $C_0=M$ et $C_n=0$. Le paiement de la mensualité a consiste d'une part à rembourser la partie du capital $C_{k-1} - C_k$, d'autre part à payer des intérêts sur le capital C_{k-1} pendant un mois, de sorte que :

$a = C_{k-1} - C_k + tC_{k-1}$
Donc, $C_k = (1+t)C_{k-1} - a$
On reconnaît dans $(C_k)_k$ une suite arithmético-géométrique, de point fixe $l = (1+t)l - a$, soit $l = \frac{a}{t}$.

D'où : $C_k - \frac{a}{t} = (1+t)\left(C_{k-1} - \frac{a}{t}\right)$

$\Rightarrow C_k - \frac{a}{t} = (1+t)^k(C_0 - t) = (1+t)^k\left(M - \frac{a}{t}\right)$

$\Rightarrow -\frac{a}{t} = (1+t)^n\left(M - \frac{a}{t}\right)$ puisque $C_n = 0$

$\Rightarrow a = \frac{Mt}{1-(1+t)^{-n}}$.

b. Suites croissantes, suites décroissantes

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :
- La suite $(u_n)_n$ est **croissante** lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n.
- La suite $(u_n)_n$ est **décroissante** lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier n.
- La suite $(u_n)_n$ est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Techniques : Trois techniques permettent pour l'essentiel d'étudier la monotonie d'une suite.

1. La technique fonctionnelle

Elle s'applique aux suites dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ (où f est une fonction). Elle consiste à étudier les variations de f.

2. La technique algébrique

Elle consiste :
- soit à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- soit à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si $u_n > 0$.

3. Le raisonnement par récurrence.

c. Suites majorées, minorées

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :
- La suite $(u_n)_n$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier n.
- La suite $(u_n)_n$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout entier n.
- La suite $(u_n)_n$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

II- Comportement asymptotique

a- Généralités

Suite convergente :

Une suite convergente est une suite qui admet une limite finie l, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|u_n - l\right|\right) \leq \varepsilon$$

Une suite convergente admet une limite unique.

Suite divergente :

Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.
Dans ce cas, elle peut :
- soit avoir une limite infinie
- soit ne pas avoir de limite

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

Remarque : La réciproque est fausse. Exemple : $u_n=(-1)^n$.

b. Opérations

Tous les résultats concernant les opérations sur les limites s'étendent aux suites.

Théorème : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergents vers respectivement les réels l et l'. Alors,

1- La suite $(u_n+v_n)_n$ converge vers $(l + l')$

2- Soit α un réel. La suite $(\alpha u_n)_n$ converge vers αl

3- La suite $(u_n.v_n)_n$ converge vers $(l.l')$

4- Si pour tout entier n, v_n est non nul et si l' est non nul, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

c. Comparaison

hypothèse 1 : **inégalités** (à partir d'un certain rang)	hypothèse 2 comportement à l'infini	conclusion
$u_n \geq 0$	$(u_n)_n$ converge vers l	$l \geq 0$
$v_n \leq u_n$	$(u_n)_n$ converge vers l $(v_n)_n$ converge vers l'	$l' \leq l$
$u_n \leq v_n$	$(u_n)_n$ tend vers $+\infty$	$(v_n)_n$ tend vers $+\infty$
$v_n \leq u_n$	$(u_n)_n$ tend vers $-\infty$	$(v_n)_n$ tend vers $-\infty$
$\lvert v_n - l\rvert \leq u_n$	$(u_n)_n$ converge vers 0	$(v_n)_n$ converge vers l
$u_n \leq w_n \leq v_n$	$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite l	$(w_n)_n$ converge vers l (théorème des gendarmes)

d. Image d'une suite par une fonction

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et $(u_n)_n$ une suite de points de I. Si Lim u_n =a et $\lim\limits_{x \to a} f(x)=l$ alors Lim $f(u_n) = l$ (avec a et l finis ou infinis).

e. Suites monotones, bornées

Théorème : 1- Toute suite réelle croissante et majorée à partir d'un certain rang converge.

2- Toute suite réelle décroissante et minorée à partir d'un certain rang converge.

f- Suites et équivalence

Théorème : Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites équivalentes et si l'une possède une limite finie ou infinie, l'autre a la même limite.
Attention : La réciproque de ce théorème est fausse.

III- SUITES ADJACENTES

Définition : Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si par définition :

a- $(u_n)_n$ est croissante
b- $(v_n)_n$ est décroissante
c- $\text{Lim}(v_n-u_n)=0$

Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Application : Méthode de dichotomie.

IV- SUITES EXTRAITES

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de réels.
La suite $(v_n)_n$ est dite extraite de $(u_n)_n$ si par définition il existe une application φ strictement croissante de ℕ dans ℕ telle que pour tout entier naturel n, $v_n=u_{\varphi(n)}$.

Théorème : Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l.

Théorème : Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{2n})_n$ convergent vers un même réel l, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers le réel l.

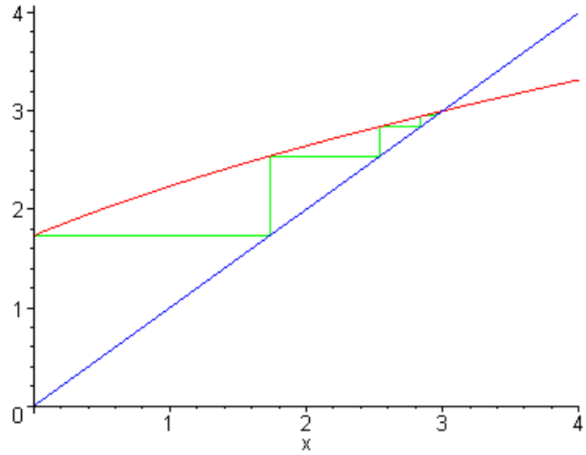
V- SUITES RECURRENTES

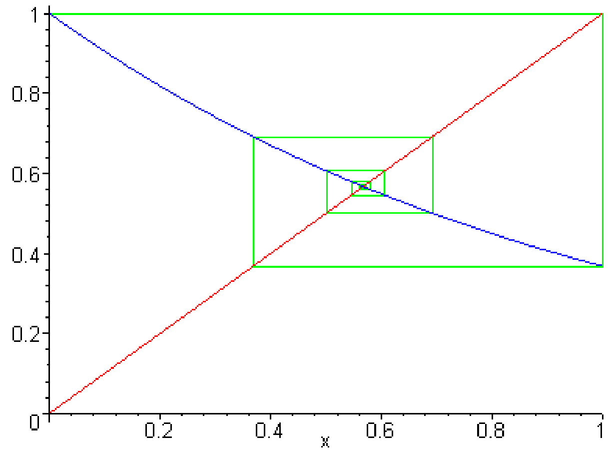
Positionnement du problème : Soit I un intervalle. Soit f une fonction de I dans I.

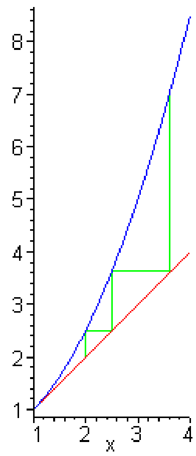
On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & \in & I \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

Etude de la suite $(u_n)_n$.

Interprétations graphiques :







Théorème : Soit f une fonction croissante de I dans I. Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & I \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1- Si $u_0 \leq u_1$, alors la suite $(u_n)_n$ est croissante.
2- Si $u_0 \geq u_1$, alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

Théorème : Soit f une fonction décroissante de I dans I. Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & I \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$$

Alors les suites extraites $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{2n})_n$ sont monotones : l'une est croissante et l'autre décroissante.

Définition : Soit f une fonction. Les solutions de l'équation « f(x)=x » sont par définition les points fixes de f.

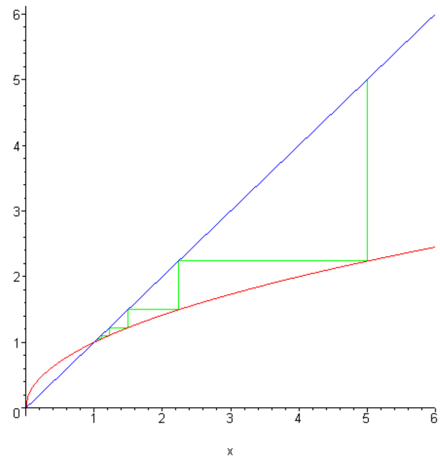
Théorème : Soit f une fonction continue de I dans I. Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & I \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$$

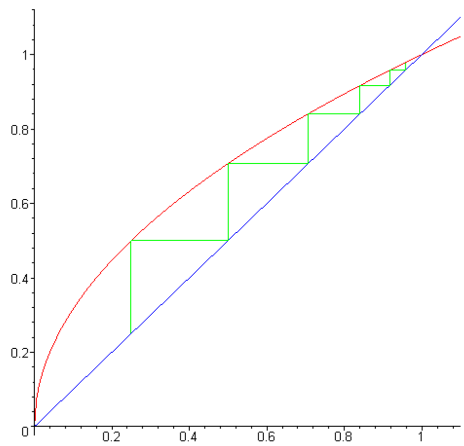
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers le réel l de I, alors l est un point fixe de f.

Exemple : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les 2 suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{4} \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases}$.

Etude de la monotonie et de la convergence de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.



Représentation de $(u_n)_n$



Représentation de $(v_n)_n$

Théorème du point fixe : Soit f une fonction définie et dérivable sur I=[a,b] vérifiant :

1- Pour tout x de I, f(x) est élément de I,
2- Il existe un réel k de]0,1[tel que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$ (on dit alors que f est k-contractante),

Alors il existe un unique réel α de I tel que $f(\alpha)=\alpha$.

De plus, la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & \in & I \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$ converge et a pour limite α.

On a : $|u_n-\alpha| \leq k^n|b-a|$ pour tout entier naturel n.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 : Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{8}(3k+1)\ ;\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{12n+k}{6n^2-3}\ ;\quad \sum_{k=0}^{n}(3^k+k-1)\ ;\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

Exercice 2 : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour n entier naturel, exprimer u_n en fonction de u_0.

1. $u_{n+1}=3u_n$
2. $u_{n+1}=u_n+2n+1$
3. $u_{n+1}=-2u_n+3$
4. $u_{n+1}=(u_n)^2$

Exercice 3 :

1. En revenant à la définition, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=\dfrac{2}{n+1}$ est convergente.
2. En revenant à la définition, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n=n^2$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 : On définit pour n entier naturel non nul, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. Ecrire les termes u_1, u_2, u_3 et u_4, par ailleurs écrire à l'aide du signe $\sum$ le terme $u_{n^2}-u_n$, pour un entier n donné.
2. Donner (sans les calculer) les quatre premiers termes de la suite extraite $(u_{n^2})_n$.
3. Quelle est la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 5 : Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où u_n est donné par :

1. $u_n=\dfrac{n}{2}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $u_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$
3. $u_n=\ln(n+1)-\ln(n)$
4. $u_n=\dfrac{3n^2+\cos(n)}{4(n+1)^2+\sin(3n)}$
5. $u_n=n-\sqrt{n^2-n}$
6. $u_n=\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1 : 117 ; $\dfrac{25n(n+1)}{2\left(6n^2-3\right)}$; $\dfrac{3^{n+1}-3+n(n-1)}{2}$; 2^n

Exercice 2 :

1. $u_n = 3^n u_0$
2. $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = u_0 + (n+1)^2 - 1$
3. $u_n = (-2)^n(u_0 - 1) + 1$
4. $u_n = \left(u_0\right)^{2^n}$

Exercice 4 :

1. $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{5}{4}, u_3 = \dfrac{49}{36}, u_4 = \dfrac{205}{144}$; si n est un entier, $u_{n^2} - u_n = \sum_{k=n+1}^{n^2} \dfrac{1}{k^2}$.
2. Les quatre premiers termes sont u_1, u_4, u_9 et u_{16}.
3. Si n est un entier, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Exercice 5 :

1. La suite est divergente (Les suites extraites $\left(u_{4n}\right)_n$ et $\left(u_{4n+1}\right)_n$ sont convergentes avec des limites différentes).
2. La suite est divergente. (Les suites extraites $\left(u_{2n}\right)_n$ et $\left(u_{2n+1}\right)_n$ sont convergentes avec des limites différentes.)
3. $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
4. $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\dfrac{3}{4}$ (Mettre n^2 en facteur au numérateur et au dénominateur).
5. $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.
6. En simplifiant, on obtient $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, donc $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

EXERCICES

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$ pour tout entier naturel n.

a- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée.

b- Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 2. Montrer que la suite de terme général $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ converge vers e.

Exercice 3. Etudier la convergence des suites suivantes définie par leur terme général :

a- $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

b- $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

c- $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

d- $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

e- $u_n = \sqrt{n.(n+a)} - n$

f- $u_n = n + \sqrt[3]{1-n^3}$

g- $u_n = \dfrac{n}{2}.\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

h- $u_n = \dfrac{\sin^2(n) - \cos^3(n)}{n}$

Exercice 4. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0=1$.

On se propose de montrer la convergence de $(u_n)_n$ et de déterminer sa limite par trois méthodes différentes.

Montrer que la limite éventuelle de $(u_n)_n$ ne peut être que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Nombre d'or).

1- a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{\alpha}|u_n - \alpha|$.

b- En déduire que $(u_n)_n$ converge vers le nombre d'or.

2-a- Etudier le signe de $u_{n+1}-\alpha$ en fonction de celui de $u_n-\alpha$ et le signe de $u_{n+1}-u_n$ en fonction de celui de u_n-u_{n-1}.

b- Montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} \le \alpha$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p+1} \ge \alpha$.

c- Montrer que $(u_{2p})_p$ est une suite croissante et que $(u_{2p+1})_p$ est une suite décroissante et que ces deux suites extraites de $(u_n)_n$ sont des suites convergentes.

d- Montrer que les limites de $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ sont égales.

e- Montrer qu'alors $(u_n)_n$ est une suite convergente.

3- Soit β la deuxième racine de l'équation : $x^2=x+1$.

a- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(v_n)_n$ est-elle définie ?

b- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

c- En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.

Exercice 5. Soit a un réel positif. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right)$ avec $u_0>0$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 6. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1+u_n{}^2}{2}$$

Exercice 7. Soit f la fonction définie par : $f(x) = - x - \dfrac{1}{x}$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1- Etudier les variations de f. Déterminer éventuellement les asymptotes et les points fixes de f. Tracer le graphe de f sur $\left[-5,-\dfrac{1}{5}\right]\cup\left[\dfrac{1}{5},5\right]$ (Unité: 1 cm). Vous soignerez la figure.

2- Représenter graphiquement les termes u_n pour n élément de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3- Déterminer les ensembles $(f\circ f)([1\ ;+\infty[)$ et $(f\circ f)(]-\infty\ ;-2])$. En déduire les inclusions : $(f\circ f)([1\ ;+\infty) \subset [1\ ;+\infty[$ et $(f\circ f)(]-\infty\ ;-2]) \subset]-\infty;-2]$.

4-a- Montrer que la suite $(u_{2n})_n$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.

b- Quelles sont les limites éventuelles de $(u_{2n})_n$ et de $(u_{2n+1})_n$? Conclure.

Exercice 8. Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$$

a- Etudier le signe de la fonction φ définie par $\varphi : x \mapsto \ln(1+2x) - x$.

b- Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 9. On se propose de calculer une valeur approchée de la solution positive de l'équation « $x^2+x-1=0$ ».

1-a- Montrer que dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, cette équation admet une racine unique, notée r.

b- Montrer qu'elle est équivalente à l'équation « $g(x) = x$ » où $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

2- On définit une suite $(u_n)_n$ par $u_0= 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$.

a- A l'aide du théorème du point fixe, montrer que $(u_n)_n$ converge vers r.

b- Déterminer une valeur approchée de r à 10^{-2} près.

On donne: $\left(\dfrac{4}{9}\right)^2 \approx 0{,}1975$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^3 \approx 0{,}0878$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^4 \approx 0{,}039$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^5 \approx 0{,}0173$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^6 \approx 0{,}0077$.

Exercice 10. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

2- Montrer qu'il existe un unique réel $l \in [0, 1]$ tel que $f(l) = l$.

3- Prouver, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-l| \leq \frac{2}{3}|u_n-l|$$

4- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, puis donner une valeur approchée de l à 10^{-3} près.

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3-u_n} \end{cases}$.

1- On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{3-x}$ et $I = [-3;0]$.

Les conditions d'application du théorème du point fixe sont-elles réunies ?

2- En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$ ainsi que sa limite α.

3- A partir de quelle valeur de n, u_n est-il une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Exercice 12. Méthode de Newton

Soit f une fonction de classe C^2 sur [a,b] telle que $f(a)f(b)<0$, f ' et f '' de signe constant et ne s'annulant pas sur [a,b]. Soit C_f le graphe de f.

1- Tracer des esquisses de C_f faisant apparaître les propriétés de f (il y a 4 cas de figure).

2- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique r sur [a,b].

On suppose désormais, pour fixer les idées, que $f(a)<0$, f ' et f ''>0 sur [a,b].

3- On définit géométriquement la suite $(u_n)_n$ de la façon suivante :

$u_0=b$

la droite d'équation $x=u_n$ coupe C_f en un point M_n. La tangente à C_f menée de M_n coupe Ox en le point d'abscisse u_{n+1}.

Représenter graphiquement la suite $(u_n)_n$, puis calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

4- On suppose dans cette question n fixé, avec $r<u_n \leq b$.

a- Montrer que $u_{n+1}<u_n$.

b- Prouver l'existence de c élément de]a,b[tel que :

$$f(r)=f(u_n)+(r-u_n)f'(u_n)+\frac{(r-u_n)^2}{2}f''(c) \qquad (1)$$

c- En remarquant que $f(r)=0$, montrer que $r<u_{n+1}$.

5- Prouver la convergence de $(u_n)_n$ vers r.

6- Soit $\varepsilon_n=|u_n-r|$ l'erreur de méthode commise lorsqu'on arrête l'itération à la $n^{\text{ième}}$ étape. Montrer, en utilisant (1), que $\varepsilon_{n+1}=\frac{f''(c)}{2f'(u_n)}\varepsilon_n^2$, puis que $\varepsilon_n \leq \frac{1}{K}(K\varepsilon_0)^{2^n}$, avec $K=\frac{M_2}{2m_1}$, $M_2=\sup\limits_{[a,b]}|f''|$, $m_1=\inf\limits_{[a,b]}|f'|$.

Application numérique : $f(x)=x^3-5$, $a=\frac{3}{2}$, $b=2$. Combien faut-il prévoir d'itérations pour obtenir $\sqrt[3]{5}$ avec 1000 décimales exactes ? (avec un calculateur parfait !)

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n=\frac{a_n}{b_n}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1} \text{ et } b_n=a_{n-1}+2b_{n-1} \text{ avec } a_0>0 \text{ et } b_0>0$$

a- Montrer que, pour tout entier n, a_n et b_n sont strictement positifs.
b- Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
c- Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 14. Soit la suite $(u_n)_n$ telle que $(u_{2n+1})_n$, $(u_{2n})_n$, $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 15. Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0=\frac{5}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=1+\frac{4}{1+u_n}$$

a- Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.
b- Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 16. Soit $0 < b < a$. On considère les suites imbriquées définies par $u_0=a$, $v_0=b$ et pour tout n :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$$

1- Démontrer que $0<u_n$ et $0<v_n$ pour tout entier n. En déduire que $u_n>v_n$.
2- Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante et que $(u_n)_n$ est décroissante.
3- Vérifier que pour tout entier n, $0<u_{n+1}-v_{n+1}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$.
4- En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5- Montrer que la suite $(u_nv_n)_n$ est constante et en déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17. Suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1-a- Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_n$.
b- Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
2- Démontrer par récurrence la relation (1) suivante :

(1) Pour tout entier n non nul, $u_n^2-u_{n+1}u_{n-1}=(-1)^n$

3- On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a- En utilisant la relation (1), exprimer v_{n+1}-v_n en fonction de u_n et de u_{n+1}.

b- En déduire que les suites $(v_{2p})_p$ et $(v_{2p+1})_p$ sont adjacentes.

c- Montrer que $(v_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 18. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$ pour x réel.

1- Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2- Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.

3- En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge.

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note x_n la solution de l'équation « $\tan x = x$ »sur l'intervalle $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi ; \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

Le but de cet exercice est de déterminer un développement généralisé de la suite $(x_n)_n$.

1- Justifier l'existence et l'unicité de x_n et donner un équivalent de x_n en $+\infty$.

2- On pose $u_n = x_n - n\pi$. Vérifier que $u_n \in I_0 = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et démontrer que $u_n = \arctan(x_n)$.

En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

3- On pose $v_n = \dfrac{\pi}{2} - u_n$. Vérifier que $\tan v_n = \dfrac{1}{\tan x_n}$. En déduire un équivalent de v_n en $+\infty$.

4- Déduire des questions précédentes un développement généralisé de la suite $(x_n)_n$.

Quelques méthodes numériques de résolution de l'équation f(x)= 0

1 DICHOTOMIE

Soit f continue sur [a,b] et telle que $f(a)f(b)<0$.

1- Montrer qu'il existe au moins une racine de l'équation $f(x) = 0$ sur]a,b[.

2- La méthode de dichotomie consiste à localiser une racine en choisissant un des intervalles $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ tel que $f(a_1)f(b_1)\leq 0$, puis à itérer. Soit $[a_n,b_n]$ l'intervalle obtenu à la $n^{\text{ième}}$ étape.

a) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une racine r de l'équation $f(x)=0$.

b) Donner un majorant ε_n de l'erreur de méthode commise en donnant pour valeur approchée de r le milieu de $[a_n,b_n]$.

c) Application numérique : Combien d'itérations faut-il prévoir si l'on veut une valeur approchée à 10^{-15} près de $\sqrt[3]{5}$, en utilisant $f(x)=x^3-5$, $a=\frac{3}{2}$, $b = 2$?

2 THEOREME DU POINT FIXE

1- Soit φ contractante sur [a,b] et y admettant donc un point fixe unique r et soit $(u_n)_n$ la suite récurrente: $u_0 \in [a,b]$, $u_{n+1}=\varphi(u_n)$.
Rappeler l'expression d'un majorant de l'erreur de méthode $|u_n-r|$.

2- Soit $f\in C^1[a,b]$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admette une racine unique r sur [a,b]. r est alors point fixe de toute application φ de la forme

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x),\ (\lambda \neq 0).$$

a) Pourquoi serait-il judicieux de choisir λ tel que $\varphi'(r) = 0$?

En pratique on peut choisir $\lambda = \frac{-1}{f'(x_0)}$ où x_0 est une approximation de r.

b) Application numérique : Appliquer la méthode à la recherche de $\sqrt[3]{5}$ à à 10^{-15} près.

Quelques exercices corrigés

Exercice 20. Déterminer les limites éventuelles des suites de terme général :

1- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$	2- $v_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	3- $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{3^k}$

Corrigé : 1- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

En fait, on a : $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2- $v_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant :

$$v_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)} = 3 \times \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)}.$$

On sait que : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$.

3- $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{3^k}$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

On a donc : $w_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$, d'où $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{4}$.

Exercice 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ décroît, et que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé : Remarquons tout d'abord que l'application : $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0;1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie. Par contre, on ne peut pas exprimer facilement les termes de la suite en fonction de n.

On calcule donc $I_{n+1} - I_n$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Sur $\left[0;1\right]$, $\dfrac{x^n\left(x-1\right)}{\sqrt{1+x^2}}\leq 0$, donc $I_{n+1}-I_n\leq 0$, et la suite est décroissante.
En particulier, il est évident que $I_n\geq 0$. Il s'agit donc d'une suite décroissante et minorée donc elle converge.
De plus, sur $\left[0;1\right]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1$ donc : $I_n=\left|I_n\right|\leq\int_0^1 x^n dx=\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{n+1}$.
On en déduit d'après le théorème des gendarmes que la suite $\left(I_n\right)_n$ tend vers 0.

Exercice 22. Etudier la suite $\left(u_n\right)_n$ définie par : $u_0\in\mathbb{R}^+$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$.

Corrigé : Posons : $f\left(x\right)=\dfrac{1+x^2}{2}$.
La fonction f est définie et dérivable de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, et on a, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f'\left(x\right)=x$.
Cette fonction est donc croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donc la suite $\left(u_n\right)_n$ est monotone.
D'autre part, on a : $u_1=\dfrac{1+u_0^2}{2}\geq u_0$. En effet, $\left(u_0-1\right)^2\geq 0\Leftrightarrow u_0^2+1\geq 2u_0$.
La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. On doit donc distinguer deux cas :

$\underline{u_0\in\left[0;1\right]}$:

Dans ce cas, on vérifier par une récurrence immédiate que : $u_n\leq 1$.
En effet, c'est vrai au rang 0 et si $u_n\leq 1$ alors $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2}\leq\dfrac{1+1}{2}=1$.
La suite $\left(u_n\right)_n$ est croissante et majorée, on en déduit qu'elle converge. On note α sa limite.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$, on obtient :

$$\alpha=\frac{1+\alpha^2}{2}\Leftrightarrow 1-2\alpha+\alpha^2=0\Leftrightarrow\left(\alpha-1\right)^2=0\Leftrightarrow\alpha=1.$$

On en conclut que la suite converge vers 1.

$\underline{u_0\in\left]1;+\infty\right[}$:

Cette fois, on doit étudier si la suite est majorée.
Remarquons que : $u_n^2+1=\left(u_n-1\right)^2+2u_n$. D'autre part, nous avons : $u_0=1+\alpha$ avec $\alpha>0$.
On en déduit que : $u_{n+1}\geq\dfrac{\alpha^2}{2}+u_n$. Par une récurrence immédiate, on vérifie que :

$$u_n\geq n\frac{\alpha^2}{2}+u_0$$

En particulier, la suite n'est pas majorée, et on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exercice 23. On veut étudier la suite $\left(u_n\right)_n$ définie par :

$u_0=\dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$

1- On considère la fonction f définie sur $I=[1;2]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.

Les conditions d'application du théorème du point fixe sont-elles réunies ?

2- En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$ ainsi que sa limite α.

3- A partir de quelle valeur de n, u_n est-il une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Corrigé : 1- La fonction f est définie et dérivable sur I, et on a, pour tout x de I,
$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$.

De plus, pour $x\in I$, $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x}\le 1$, donc $1+1\le x+\dfrac{2}{x}\le 2+2$, et ainsi $1\le f(x)\le 2$, donc $f(I)\subset I$.

D'autre part, pour $x\in I$, $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{x^2}\le 1$, donc $-1\le -\dfrac{1}{x^2}\le -\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{4}$.

On en déduit que : pour $x\in I$, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

Les conditions d'application du théorème du point fixe sont donc toutes vérifiées.

2- D'après la question précédente, on peut appliquer le théorème du point fixe :
Il existe un unique $\alpha\in I$ tel que $f(\alpha)=\alpha$, et la suite $(u_n)_n$ converge vers α.

Il ne reste donc plus qu'à déterminer la valeur du réel α :

$$f(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{2} \text{ ou } \alpha=-\sqrt{2}$$

Etant donné que $\alpha\in I$, on en conclut que $\alpha=\sqrt{2}$.

3- D'après le théorème du point fixe, on a la relation : $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|2-1|=\dfrac{1}{2^n}$.

u_n est donc une valeur approchée de α à 10^{-3} près dès que $\dfrac{1}{2^n}\le 10^{-3}$:

$$\frac{1}{2^n}\le 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n\ge 10^3 \Leftrightarrow n\ln 2\ge 3\ln 10 \Leftrightarrow n\ge 3\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

Sachant que $3\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\simeq 9{,}97$, nous choisissons $n\ge 10$.

Exercice 24. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'application $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par :
$f_n(x)=x^n-(1-x)^3$

1- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $\alpha_n\in\,]0;1[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$.

2- Montrer que : Pour tout entier $n\ge 2$, $f_{n-1}(\alpha_n)>0$

3- En déduire que la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers une limite $\alpha\in\,]0;1]$.

Démontrer par l'absurde que $\alpha=1$.

Corrigé : 1- La fonction f_n est continue et dérivable sur $[0;1]$, et on a :

$f_n'(x) = nx^{n-1} + 3(1-x)^2$.

En particulier, pour x élément de $]0;1[$, $f_n'(x) > 0$, et donc la fonction est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus, f_n est continue sur $[0;1]$.

D'autre part, on a : $f_n(0) = -1$, et $f_n(1) = 1$, donc $0 \in [f(0);f(1)]$.

On en conclut qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0;1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

2- Par définition, on a : $f_n(\alpha_n) = 0$ et cela implique que : $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^3$.

On obtient donc : $f_{n-1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n-1} - (1-\alpha_n)^3 = \alpha_n^{n-1} - \alpha_n^n = \alpha_n^{n-1}(1-\alpha_n)$.

Sachant que $\alpha_n \in]0;1[$, on en déduit que : $f_{n-1}(\alpha_n) > 0$.

3- D'après la question précédente, on a : $f_{n-1}(\alpha_n) > 0$.

Or par définition, $f_{n-1}(\alpha_{n-1}) = 0$, et on a vu à la question 1 que la fonction f_{n-1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

On en déduit que : $\alpha_{n-1} < \alpha_n$, c'est-à-dire que la suite $(\alpha_n)_n$ est croissante.

D'autre part, étant donné que $\alpha_n \in]0;1[$, elle est majorée par 1.

On en conclut qu'elle converge vers un réel $\alpha \in [0;1]$.

En particulier, la suite étant strictement croissante, on a $\alpha_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi $0 < \alpha$.

Donc, $\alpha \in]0;1]$.

Démontrer par l'absurde que $\alpha = 1$.

Supposons que $\alpha \neq 1$, on a donc $0 < \alpha < 1$.

D'après ce qui précède, on a donc $\alpha_n \leq \alpha < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or par définition, on a : $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^3$, et vu que $\alpha_n^n \leq \alpha^n$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\alpha_n)^3 = 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\alpha_n)^3 = (1-\alpha)^3$, on en conclut que $\alpha = 1$, ce qui contredit notre hypothèse.

Chapitre 16

INTEGRALE DE RIEMANN

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand, élève de **Gauss**, s'est illustré brillamment dans de nombreux domaines; impossible d'avancer sérieusement en Mathématiques sans rencontrer son nom : intégrale de Riemann, surface de Riemann, conjecture de Riemann (« monumental et capital problème » non encore résolu).

1- Intégrale d'une fonction en escalier

Définition : Soit I=[a,b]. Une fonction f définie sur I est en escalier signifie qu'il existe une subdivision $a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<c_n=b$ de I telle que la restriction de f à chaque intervalle $]c_i,c_{i+1}[$, pour i = 0 à n-1, soit constante.

$$\forall i=0 \text{ à } n\text{-}1,\ \exists\lambda_i\in\mathbb{R},\ \forall x\in\left]c_i,c_{i+1}\right[,\ f(x)=\lambda_i$$

Notation : $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions en escalier.

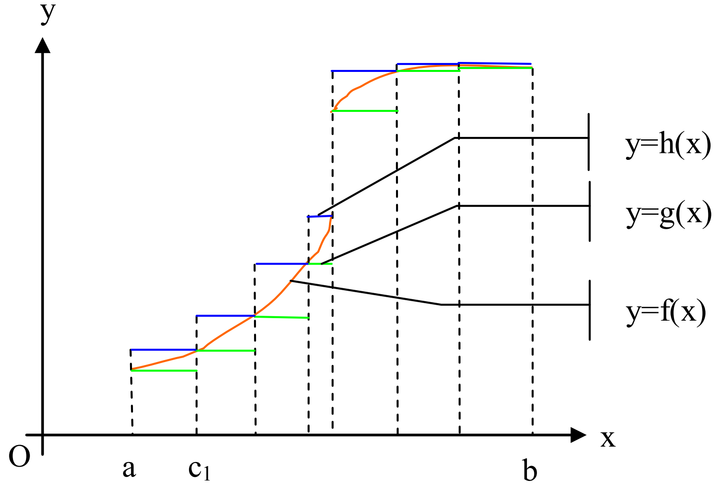
Définition : Soit f un élément de $\mathcal{C}$. On pose : $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(c_{i+1}-c_i)$.

2- Fonction intégrable sur un intervalle fermé [a,b]

Soit f une fonction bornée sur [a,b].

On pose : $\mathcal{C}_-(f)=\{g\in\mathcal{C}/\forall x\in[a,b],\ g(x)\leq f(x)\}$

$\mathcal{C}_+(f)=\{h\in\mathcal{C}/\forall x\in[a,b],\ h(x)\geq f(x)\}$.



On dit que f est intégrable au sens de Riemann lorsque : $\displaystyle\sup_{g\in\mathcal{E}_-(f)}\int_a^b g(x)dx = \inf_{h\in\mathcal{E}_+(f)}\int_a^b h(x)dx$.

On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sup_{g\in\mathcal{E}_-(f)}\int_a^b g(x)dx = \inf_{h\in\mathcal{E}_+(f)}\int_a^b h(x)dx$.

Notation : On notera I(D) l'ensemble des fonctions intégrables sur un ensemble D.

Théorème : Les fonctions continues, continues par morceaux ou monotones sur [a,b] sont intégrables sur [a,b].

Remarques : 1- Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
Montrer que si u et v sont deux fonctions en escalier telles que $u \le f \le v$, alors $u \le 0$ et $v \ge 1$.
En déduire que f n'est pas intégrable sur [a;b].

2- Il existe des fonctions non continues admettant des primitives. Par exemple, étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$. F est dérivable en 0 de fonction dérivée f sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas continue en 0.

Henri Lebesgue

Le problème précédent nous montre que, parmi les fonctions non continues, certaines ont des primitives d'autres non. La question . « Quelles sont les fonctions admettant des primitives ? », question étroitement liée à la théorie de l'intégration suscita à la fin du XIX^{e} siècle de nombreux travaux. Il faut porter au crédit du mathématicien français **Henri Lebesgue** (1875-1941) d'avoir déterminé les « heureuses élues de la consultation engagée ».

3- Propriétés

1- Linéarité

$$\forall(f,g)\in I^2([a,b]),\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \int_a^b(\alpha f+\beta g)(t)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$$

2- Intégrale et valeur absolue

$$\forall f\in I([a,b]),\ \left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b\left|f(t)\right|dt$$

3- Positivité

$$\forall f\in I([a,b]),\ (a\leq b),\ \left(\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq 0\right)\Rightarrow\int_a^b f(t)dt\geq 0$$

4- Intégrale et inégalité

$$\forall(f,g)\in I^2([a,b]),\ (a\leq b),\ \left(\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq g(x)\right)\Rightarrow\int_a^b f(t)dt\leq\int_a^b g(t)dt$$

5- **Relation de Chasles**

$$\forall f\in I([a,b]),\ \forall c\in[a,b],\ \int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$$

6- **Théorème :** Soit f une fonction continue, positive sur [a,b]. S'il existe x_0 élément de [a,b] tel que $f(x_0)>0$, alors $\int_a^b f(t)dt>0$.

Corollaire : Soit f une fonction continue, positive sur [a,b].

$$\int_a^b f(t)dt=0\Rightarrow\forall x\in[a,b],\ f(x)=0$$

4- Formule de la moyenne

Théorème : Formule de la moyenne

Soient f et g deux fonctions intégrables sur [a,b] telles que :

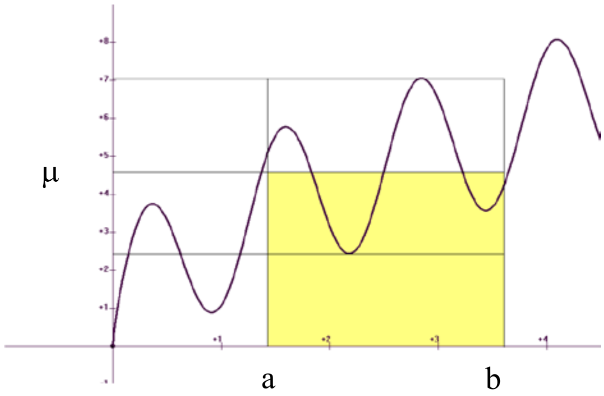
1- f continue sur [a,b]
2- g positive sur [a,b]

Alors, il existe c élément de [a,b] tel que : $\int_a^b f(t)g(t)dt=f(c)\int_a^b g(t)dt$.

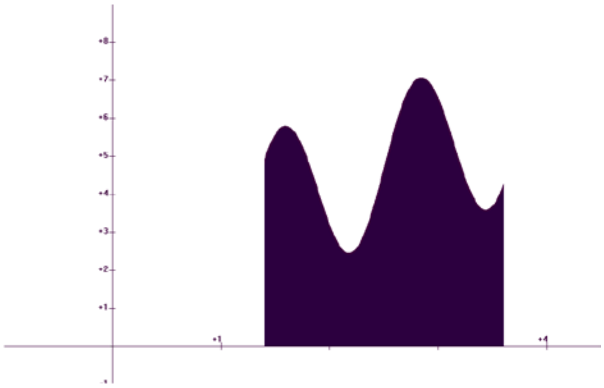
Remarque : Avec g(x)=1 pour tout x de [a,b], la propriété devient :
Soit f une fonction continue sur [a,b]. Il existe c élément de [a,b] tel que :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Cette valeur est appelée **valeur moyenne** de f sur [a,b].
En annexe, vous pouvez voir des exemples d'application de cette notion.



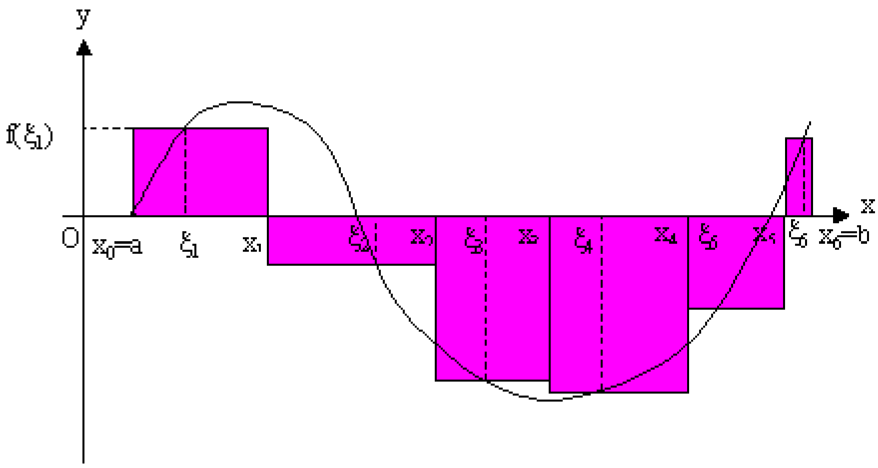
L'aire grisée est : (b-a)μ



L'aire grisée est $\int_a^b f(t)dt$

5- Somme de Riemann

Définition : Soit f une fonction définie sur [a,b] .
Soit une subdivision $a = x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Le pas de la subdivision est $h=\underset{1\le i\le n}{\mathrm{Sup}}(x_i - x_{i-1})$.
Soit, pour i=1 à n, ξ_i un élément de $[x_{i-1},x_i]$.
On appelle somme de Riemann le réel $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$.



Théorème : Soit f une fonction intégrable sur [a,b].

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(t)dt$$

où h désigne le pas de la subdivision.

Cas particulier : Soit f une fonction intégrable sur [a,b].

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(a+j\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$$

6- Primitive d'une fonction continue

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue.
Soit a un élément fixé de I.
Soit F la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Alors, F est de classe C^1 sur I et F '=f.

Remarque : si f n'est pas continue, rien ne permet de dire que F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est dérivable.

Exemple : Sur [0,2], soit f(x)=1 sur [0,1] et f(x)=0 sur]1,2]. On a alors F(x)=x sur [0,1] et F(x)=1 sur [1,2]. F est bien continue, mais n'est pas dérivable en x=1.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue.
Soit a un élément fixé de I.
Soit u une fonction dérivable d'un intervalle J dans I.
Soit T la fonction de J dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$T(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$$

Alors, T est de dérivable sur J et $\forall x \in J$, T '(x)=u'(x)f(u(x)).

Théorème : Soit f une fonction continue sur [a,b]. Alors $\int_a^b f(t)dt = [G(t)]_a^b$ où G est une primitive quelconque de f sur [a,b].

Tableau de primitives

f	$\int f(t)dt$ à une constante (additive) près sur des intervalles où la fonction est dérivable
x^r pour $r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\ln x$	$x\ln\|x\| - x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$a>0$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2+h}\right\|$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\|$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soient a et b des réels tels que $a < b$. Calculer $\int_a^b x\,dx$ à l'aide de la définition de l'intégrale.

Exercice 2. Montrer que le produit de deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a\,,b]$ est aussi une fonction intégrable sur $[a\,,b]$ (commencer par le cas où les deux fonctions sont à valeurs positives).

EXERCICES

Exercice 1. On considère la suite $(g_n)_n$ de fonction en escalier sur [0,1] définie par :

$$g_n(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x>\dfrac{1}{n} \\ n \quad \text{si} \quad x\leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Soit f une fonction continue sur [0;1]. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)_n$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 f(x).g_n(x)dx$$

converge vers f(0).

Exercice 2. En utilisant une formule de la moyenne, trouver un équivalent quand $x \to +\infty$ de $x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 3. Déterminer la limite à droite en 0 de la fonction I définie pour x strictement positif par :

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt$$

Exercice 4. Pour n>0, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

Etudier la limite de cette suite.

Exercice 5. Pour n>0, on pose :

$$u_n = \frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{4^2}{n^3+4^3}+\ldots+\frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^3+8k^3}$$

Etudier la limite de cette suite.

Exercice 6. Pour n >0, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{e^{\frac{p}{n}}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}$$

Montrer que ces deux suites convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 7. Calculer la dérivée des fonctions suivantes : (avec f continue sur $\mathbb{R}$)

$$F_1(x)=\int_a^x e^{t^2}dt \qquad F_2(x)=\int_{x-3}^b e^{t^2}dt \qquad F_3(x)=\int_a^b e^{t^2}dt \qquad F_4(x)=\int_x^{2x} e^{t^2}dt$$

$$F_5(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt \qquad F_6(x)=\int_{2x-1}^{x^2+1} f(t)dt \qquad F_7(x)=\int_0^x \left(x^2-f(t)\right)^2 dt$$

Exercice 8. Soit 0<a<b et f continue sur $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$ et soit $F : x \mapsto \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}} f(t)dt$.

1- Montrer que F est de classe C^1 sur [a ; b].
2- Calculer F'.
3- Calculer F pour $f : t \mapsto \frac{1}{t^3}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et $b=\pi$.

Exercice 9. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose $G(x)=\int_{\ln x}^{\frac{1}{x}} g(t)dt$.

1- Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de G.
2- Calculer la dérivée de G sur son ensemble de dérivabilité.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_x^{4x} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est paire.
3. A l'aide de la formule de la moyenne, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln(4)$.
4. On prolonge f en posant $f(0)=\ln(4)$. Montrer que f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

Quelques exercices corrigés

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$ avec $n \in N^*$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Corrigé : On sait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée.
Posons $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On a pour tout n : $|I_n| \le \int_0^1 |x^n f(x)|dx = \int_0^1 x^n\,|f(x)|dx \le M\int_0^1 x^n dx = M \times \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{M}{n+1}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

On suppose que $\int_a^b (f(x))^2\,dx = \int_a^b (f(x))^3\,dx = \int_a^b (f(x))^4\,dx$. Montrer que f est constante sur $[a,b]$.

On pourra utiliser la fonction g définie par : $g(x) = \left((f(x))^2 - f(x)\right)^2$.

Corrigé : Posons $g(x) = \left((f(x))^2 - f(x)\right)^2$.

Alors on a : $g(x) = f^4(x) - 2f^3(x) + f^2(x)$.

En utilisant la linéarité de l'intégrale et l'hypothèse, on obtient $\int_a^b g(x)\,dx = 0$.

Or g étant une fonction positive, cela implique que g est nulle sur $[a,b]$, donc f vaut soit 1 soit 0.
Comme f est continue sur cet intervalle, elle est nécessairement constante.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Montrer que f est de signe constant.

Corrigé : On a deux possibilités :

- $\int_a^b f \ge 0$ $\left(\text{ie: } \int_a^b f = \left|\int_a^b f\right|\right)$:

Dans ce cas, on pose : $g(x) = |f(x)| - f(x)$.
g est une fonction positive et continue, et

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|dx - \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$$

Donc g est nulle sur $[a,b]$, ce qui implique que f est positive sur $[a,b]$.

- $\int_a^b f < 0$ $\left(\text{ie: } \int_a^b f = -\left|\int_a^b f\right|\right)$:

Cette fois, on pose : $g(x) = |f(x)| + f(x)$.

g est une fonction positive et continue, et

$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx - \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$.

Donc g est nulle sur $[a, b]$, ce qui implique que f est négative sur $[a, b]$.

Finalement, on a bien démontré que f est de signe constant sur $[a, b]$.

Annexe 1
Historique

Le calcul d'aire est remonte à la plus haute antiquité. Archimède sait comparer l'aire délimitée par une parabole avec celle d'un triangle. Il sait également que :

1- Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre.

2- L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon.

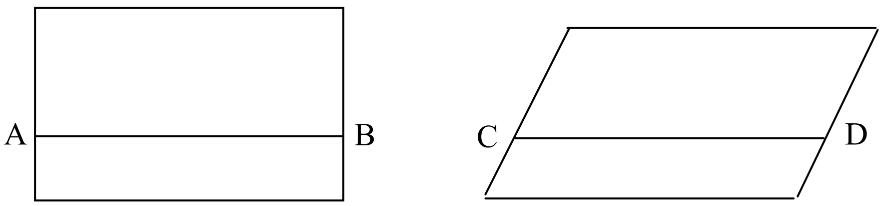
Or le coefficient de proportionnalité π est le même. Comment le démontrer ? Archimède compare un cercle avec un triangle rectangle dont l'un des côtés est le rayon du cercle, et dont l'autre a une longueur égale au périmètre du cercle. Il utilise pour cela une méthode dite par exhaustion.

Appelons C l'aire du cercle et T celui du triangle. Pour montrer l'égalité (en tant qu'aire) de ces deux figures, il fait un double raisonnement par l'absurde, en supposant d'abord que le triangle est plus petit ($T < C$). Il construit alors un polygone d'aire P tel que $T < P < C$ en inscrivant dans le cercle une suite de polygones à 3×2^n côtés de façon que l'aire de l'un d'eux soit supérieure à l'aire du triangle. C'est possible car $T < C$. Il suffit de choisir un polygone dont l'aire est suffisamment proche de C. Il montre ensuite que ce polygone a une aire inférieure à T aboutissant ainsi à une contradiction. Il suffit de remarquer que ce polygone est constitué de triangles dont la somme des longueurs de base est inférieure au périmètre du cercle et dont la hauteur est inférieure au rayon. L'aire P du polygone est donc bien inférieure à T. Première contradiction.

Il suppose ensuite que le triangle a une aire supérieure à celle du cercle ($T > C$). Il circonscrit alors au cercle une suite de polygones régulier de façon à ce que l'aire de l'un d'eux soit inférieure à l'aire du triangle ($T > P > C$). Il montre ensuite que ce polygone a une aire supérieure à T. En effet, la somme des longueurs des bases des triangles constituant le polygone est supérieure au périmètre du cercle, et la hauteur est égale à celle du rayon. L'aire P du polygone est donc supérieure à l'aire T du triangle. Deuxième contradiction.

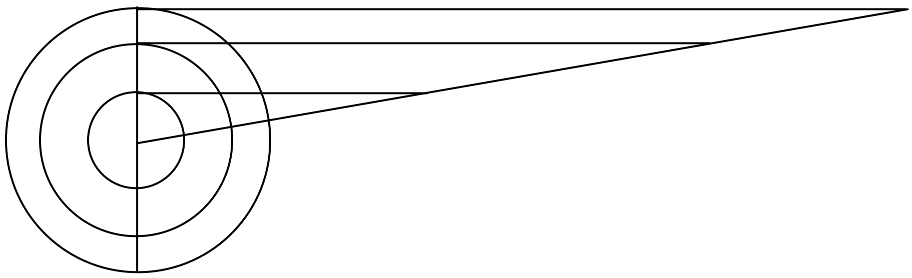
D'où la seule conclusion possible : $C = T$.

En 1635, Cavalieri (1598-1647), afin d'accélérer les démonstrations de la méthode par exhaustion développe la théorie des indivisibles. Pour prouver l'égalité de deux aires, il vérifie l'égalité des lignes constituant les deux surfaces. Donnons un exemple très simple qui permettra de comprendre le fonctionnement et l'intérêt de cette méthode. Considérons un rectangle et un parallélogramme de même base et même hauteur.



A chaque segment [AB] du rectangle correspond un segment [CD] du parallélogramme de même longueur. La méthode des indivisibles conclut alors que, les segments correspondants étant égaux, il en est de même des aires des deux figures. La démonstration du résultat d'Archimède, par la méthode des indivisibles, consiste par exemple à tracer un cercle de rayon R, ainsi que, pour tous les cercles de même centre de rayon r, inférieur à R, des segments parallèles entre eux, tangents à chaque cercle et de longueur la circonférence de chaque cercle. De même que les cercles vont remplir le disque de rayon R, de même, les segments vont remplir le triangle annoncé.

L'aire du triangle sera égale à l'aire du disque.



Cette méthode, bien artisanale comparée aux méthodes modernes, est cependant extrêmement efficace. On peut s'en faire une idée en lisant « Le traité de la Roulette » de Pascal (1623-1662), dans lequel Pascal calcule les centres de gravité de courbes, de surfaces, de volumes, choses que nous ne pourrions plus faire actuellement sans calcul intégral. Pascal fait un pas de plus que Cavalieri en disant qu'une surface est la somme de ses lignes. Il dit « Je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée ».

Les méthodes précédentes présentent le grave défaut de ne pouvoir donner une valeur à une aire, mais seulement de comparer deux aires entre elles. Ainsi, il faut connaître a priori la valeur d'une aire avant de prouver que cette aire possède effectivement la valeur désirée.

Les travaux de Pascal ont grandement influencé Leibniz (1646-1716), inventeur avec Newton (16421727) du calcul différentiel et intégral. Pour Leibniz et Newton, l'intégration est l'opération opposée à la dérivation. Pour calculer l'intégrale d'une fonction f, on cherche une primitive de f.

Cet aspect présente deux difficultés :

Au cours du XVIII$^{\text{ème}}$, les travaux de Fourier (1768-1830) nécessitent un calcul intégral de plus en plus poussé, où la recherche de primitive et la limitation aux fonctions continues sont insuffisantes.

Pour l'enseignant d'aujourd'hui, cette présentation repose sur le fait que toute fonction continue admet une primitive, ce qu'il reste à prouver.

A l'inverse, Cauchy (1789-1857) résout ce dernier point en définissant l'intégrale d'une fonction f continue indépendamment de l'existence d'une primitive, puis en prouvant que l'intégrale ainsi obtenue est effectivement une primitive de f. Pour définir son intégrale, Cauchy divise [a, b] en n intervalles et il considère la somme $\sum_{k=1}^{n} l_k f(t_k)$ où l_k est la longueur d'un petit intervalle et t_k une extrémité de l'intervalle. Puis il fait tendre n vers $+\infty$. Cette démarche a été critiquée par la suite car les démonstrations utilisées par Cauchy présentent quelques défauts. En outre, l'intégrale de Cauchy ne s'applique qu'aux fonctions continues.

Il revient à Riemann (1826-1866) d'introduire la première notion d'intégrale, reconnue encore valide de nos jours, en améliorant la démarche de Cauchy. L'intégrale de Riemann est suffisamment puissante pour définir une intégrale pour toutes les fonctions suivantes :

Les fonctions continues

Les fonctions monotones

La fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction $x \mapsto 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$

$\frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ irréductible, $q > 0$

Elle n'est cependant pas complète car elle ne permet pas d'attribuer une valeur à l'intégrale de la fonction de Dirichlet :

$x \mapsto 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$

$x \mapsto 1$ si $x \in \mathbb{Q}$

C'est d'autant plus étonnant que cette fonction ne semble guère différente de la dernière fonction intégrale au sens de Riemann donnée précédemment en exemple.

L'intégrale de Riemann pose également des problèmes délicats lorsqu'il s'agit de savoir si, étant donné une suite de fonctions (f_n) convergeant vers f (dans un sens à préciser), l'intégrale des f_n converge vers l'intégrale de f.

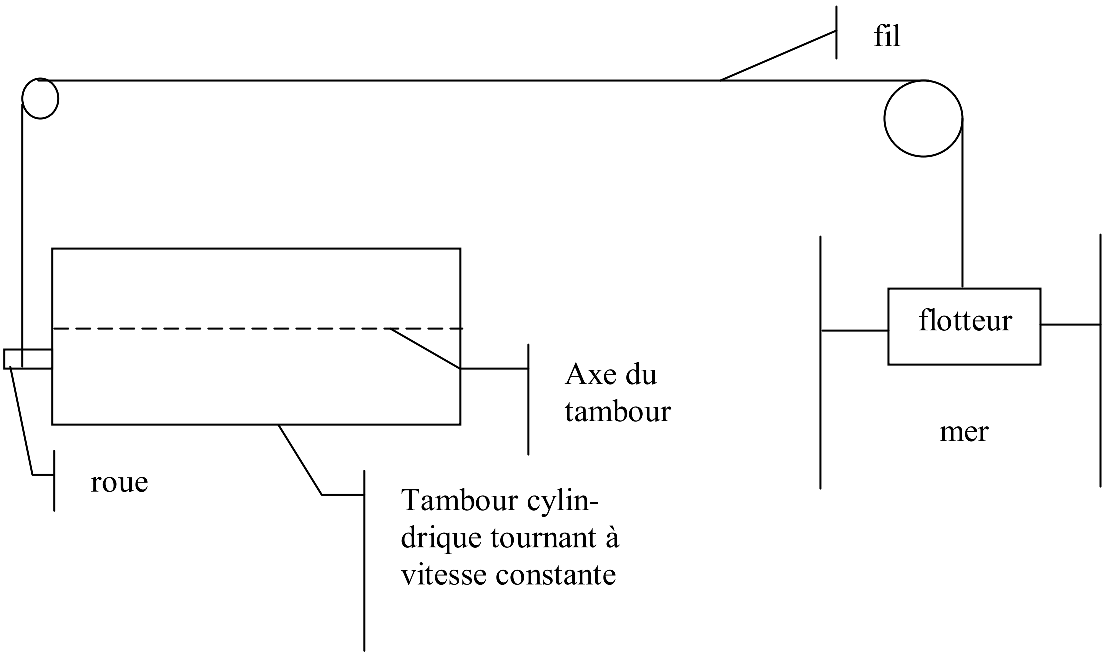
Ces défauts ont conduit Lebesgue (1875-1941) à introduire une nouvelle notion d'intégrale, telle que :

- La fonction de Dirichlet est Lebesgue-intégrable
- Un exemple de fonction positive non Lebesgue-intégrable existe à condition d'utiliser un axiome (dit axiome du choix), et il ne peut donc pas être défini explicitement.
- L'intégrale de Lebesgue est particulièrement adaptée au problème de convergence de suites de fonctions.

Annexe 2
Exemples d'application de la notion de valeur moyenne

Exemple 1 : Considérons les températures prises au cours d'une journée. On découpe une journée en n intervalles égaux. La température moyenne est $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T(h_k)$, où h_k est le $k^{\text{éme}}$ instant de mesure, par exemple, $h_k = \frac{k}{n}$, si l'unité est la journée. Plus n est grand et plus la fonction T est précise. A la limite, on peut modéliser T par une fonction continue. Sa valeur moyenne est $\int_0^1 T(t)dt$ qui n'est autre que la limite de la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 2 : Le marégraphe de Marseille est chargé de mesurer la hauteur de la mer. Un puits communique avec la mer pour amortir les vagues. Dans ce puits se trouve un flotteur. On mesure à quelle hauteur se trouve ce flotteur par rapport à un repère fixe. Un fil relié au flotteur possède un curseur qui permet de déterminer cette hauteur. Mais un mécanisme astucieux, en marche depuis un siècle, permet en outre de calculer la hauteur moyenne de la mer. En voici la description simplifiée :



Une petite roue, reliée par un fil tendu au flotteur, roule par frottement contre un cylindre tournant à vitesse constante. Soit x la distance de la roue à l'axe du cylindre. x correspond à la hauteur du flotteur. Plus le flotteur est haut, plus la roue est loin de l'axe du tambour et plus x est grand. Plus le flotteur est bas, plus la roue est proche de l'axe du tambour et plus x est petit. La hauteur du flotteur ainsi que x dépend de t. La hauteur moyenne sur un intervalle de temps [a,b] est calculé par $\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt$. Or la vitesse de rotation de la roue est proportionnelle à x. Plus x est grand, plus la roue tourne vite. Si le tambour tourne à la vitesse constante Ω et si le rayon de la roue est R, sa vitesse de rotation ω est $\omega = \frac{\Omega x}{R}$. Le nombre de tours dont tourne la petite roue est une primitive de ω et est donc proportionnelle à une primitive de x. Ce nombre de tours indique donc à u ne constante multiplicative près, la valeur moyenne de x et donc la hauteur moyenne de la mer.

Depuis peu, ce système est couplé avec un système électronique, calculant, à intervalle régulier, la hauteur de la mer. Ce système somme également les données recueillies et procède donc à une somme de Riemann. Il permet donc également de calculer une valeur moyenne de la hauteur d'eau.

Exemple 3 : La puissance dissipée par effet Joule en courant alternatif est RI^2, avec $I=I_0\sigma\iota\nu(\omega x)$. La puissance moyenne peut se mesurer sur une période est vaut :

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} RI_0^2\sin^2(\omega t)dt$$

Le calcul donne $\frac{1}{2}RI_0^2$.

Dans un dipôle soumis à une tension $U = U_0\sin(\omega t+\varphi)$, la puissance moyenne vaut :

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_0U_0\sin(\omega t)\sin(\omega t+\varphi)dt$$

qui donne $\frac{1}{2}I_0U_0\cos\varphi$.

Chapitre 17

CALCUL PRATIQUE D'INTEGRALES ET DE PRIMITIVES

A- CALCUL D'INTEGRALES

1- Intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur [a,b].

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

2- Changement de variable

Théorème : Soient I et J deux intervalles.
Soit φ une fonction de J dans I de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue sur I.

$$\text{Alors, } \forall(\alpha,\ \beta)\in J^2,\ \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$$

Autre version : Soit f une fonction continue sur [a,b] et soit φ une fonction de $[\alpha,\beta]$sur [a,b] de classe C^1 avec $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$. Alors, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$

Exemple 1 : Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ en utilisant le changement de variable x=sin(t).

$$\begin{cases} x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)dt \\ x=0 \text{ si } t=0 \\ x=1 \text{ si } t=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \text{ et sin est une fonction de classe } C^1 \text{ de } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ dans } [0,1]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt$$

Il suffit alors de linéariser $\cos^2(t)$ pour trouver $\dfrac{\pi}{4}$.

Exemple 2 : Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ en utilisant le changement de variable x=sh(t).

$\begin{cases} x = sh(t) \\ dx = ch(t)dt \\ x = 0 \text{ si } t=0 \\ x=1 \text{ si } t=\text{argsh}(1) \end{cases}$ et sh est une fonction de classe C^1 de [0, argsh(1)] dans [0,1].

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_0^{\text{argsh}(1)} ch^2(t)\, dt$$

On linéarise $ch^2(t)$ en $\frac{1+ch(2t)}{2}$. On rappelle que $\text{argsh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ et que $ch(\text{argsh}(t))=\sqrt{1+t^2}$ pour conclure que l'intégrale vaut :

$\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}sh(2t)\right]_0^{\text{argsh}(1)} = \frac{1}{2}\text{arg}\,sh(1)+\frac{1}{2}ch(\text{arg}\,sh(1)) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right)$.

Le changement de variable $x = \tan\theta$ est également possible, mais il se trouve que l'intégrale est plus difficile à intégrer.

B- CALCUL DE PRIMITIVES

Notation : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

$t \mapsto \int f(t)dt$ désigne une primitive de f sur I. $\int f(t)dt$ est définie à une constante additive près.

Exemple : $\int x.dx = \frac{x^2}{2} + cste$.

1- Intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

2- Changement de variable

Théorème : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe C^1de J dans I.

1- Si F est une primitive de f sur I.

$$\int (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt \underset{\begin{cases} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{cases}}{=} \int f(x)dx = F(x)+cste=F(\varphi(t))+cste$$

$F\circ\varphi$ est une primitive de la fonction $(f\circ\varphi).\varphi'$ sur J.

2- Si G est une primitive de $(f\circ\varphi).\varphi'$ sur J où φ est une **bijection** de classe C^1de J dans I.

dans I.

$$\int f(x)dx \underset{\begin{cases} x=\varphi(t) \\ t=\varphi^{-1}(x) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{cases}}{=} \int (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt = G(t)+cste = G(\varphi^{-1}(x))+cste$$

$G\circ\varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I.

3- Primitives d'une fraction rationnelle

Soit F une fraction rationnelle définie sur un intervalle I. Nous nous proposons de déterminer les primitives de F sur I.

1- On décompose F en éléments simples de $1^{ère}$ et $2^{ième}$ espèce (et sa partie entière).

2- Primitives des éléments simples de $1^{ère}$ espèce de la forme $\dfrac{b}{(x-a)^n}$ avec a et b réels et n entier naturel.

- i- Pour n=1, $\int \dfrac{b}{x-a}dx = b.\ln|x-a| + cste$
- ii- Pour $n\geq 2$, $\int \dfrac{b}{(x-a)^n}dx = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{b}{(x-a)^{n-1}} + cste$

3- Primitives des éléments simples de $2^{ième}$ espèce de la forme $\dfrac{mx+p}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec m, p, a, b, c réels et $\Delta=b^2-4ac<0$.

On cherche $G(x)=\int \dfrac{mx+p}{(ax^2+bx+c)^n}dx$

- i- On écrit ax^2+bx+c sous forme canonique : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
- ii- On pose $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- iii- On effectue le changement de variable : $u=\dfrac{x-\alpha}{\beta}$. On obtient :

$$G(x)=\frac{1}{\beta^{2n-1}a^n}\int \frac{m\beta u+m\alpha+p}{(u^2+1)^n}du$$

4- Reste à déterminer les primitives suivantes : $\int \dfrac{u}{(u^2+1)^n}du$ et $\int \dfrac{1}{(u^2+1)^n}du$.

- i- Pour $\int \dfrac{u}{(u^2+1)^n}du$, on pose $t=u^2+1$. On obtient : $\int \dfrac{u}{(u^2+1)^n}du = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^n}$

Pour n=1, $\dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t} = \dfrac{1}{2}\ln t + cste$

Pour $n\geq 2$, $\dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{t^n} = -\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{t^{n-1}} + cste$.

- ii- Pour $\int \dfrac{1}{(u^2+1)^n}du = I_n(u)$

Pour n=1, $I_1(u) = \int \dfrac{1}{u^2+1}du = \arctan u + cste$

Pour $n\geq 2$, $I_n(u)=\int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^n}du = I_{n-1}(u) - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^n}du$.

$\int \frac{u^2}{(u^2+1)^n}du=\int u\frac{u}{(u^2+1)^n}du$ et on intègre par partie avec $f(u)=u$, $f'(u)=1$, $g'(u)=\frac{2u}{2(u^2+1)^n}$

et $g(u)=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(u^2+1)^{n-1}}$.

On obtient : $I_n(u)=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(u) + \frac{1}{2(n-1)}\frac{u}{(u^2+1)^{n-1}}$.

Exemple : Calcul de $I=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$.

La fraction rationnelle $\frac{2x}{x^2+x+1}$ est un élément simple de seconde espèce.

$I=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$

Nous avons : $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 = \ln(3)$.

Pour le calcul de $J=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

$$J=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(u^2+1)}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}.$$

Conclusion : $I=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx = \ln(3)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right) = \ln(3)-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

$I = \ln(3)-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

4- Primitives d'une fraction en sinus et cosinus

5- Intégrale abélienne

ABEL Niels Henrick, norvégien, 1802-1829. Les travaux de ce grand mathématicien, victime de la tuberculose à peine âgé de 27 ans, ne furent reconnus qu'après sa mort. Son mémoire fondamental sur les *fonctions elliptiques*, présenté par Hachette (1826) à l'Académie des Sciences de Paris, fut mésestimé par Gauss et Legendre puis égaré et heureusement retrouvé par Cauchy mais, hélas, après la mort d'Abel.

Ce sera Jacobi qui comprendra tout le génie du jeune mathématicien. C'est avec ce dernier qu'Abel recevra, à titre posthume, le grand prix de mathématiques de l'Institut de France (1830).

COMPLEMENT
DEMONSTRATION DES REGLES DE BIOCHE

Enoncé :

1- Soit a un nombre réel. Démontrer que toute fonction G, définie sur l'intervalle [-a,a] par :

$$G(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

où P(u, v) et Q(u, v) sont des polynômes à deux indéterminées u et v peut s'écrire :

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x) + \sin x.\ M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x.\ M_2(\cos x)}$$

où $L_1(v)$, $M_1(v)$, $L_2(v)$, $M_2(v)$ sont des polynômes en v.

2- Démontrer que dans l'hypothèse où pour tout élément x de [- a, a], G(x) = - G(- x), la fonction G est de la forme G(x) = S(cos x) sin x où S est une fonction rationnelle.

3- En déduire une remarque utile pour reconnaître que l'intégrale :

$$\int_a^b G(x)dx$$

peut être calculée à l'aide du changement de variable s = cos x.

Quelles sont les remarques analogues pour reconnaître que cette intégrale peut être calculée à l'aide du changement de variable s = sin x ou s = tan x ?

Solution :

1- Le polynôme P(u, v) peut s'écrire sous la forme :

$$P(u, v) = \sum_{\substack{0 \le p \le m \\ 0 \le q \le n}} a_{pq} u^p v^q$$

où a_{pq} est le coefficient du monôme $u^p v^q$ de ce polynôme. Séparons les monômes qui contiennent u à une puissance impaire des monômes qui contiennent u à une puissance paire. Nous avons :

$$P(u, v) = \sum_{\substack{0 \le 2r \le m \\ 0 \le q \le n}} a_{2r,q} u^{2r} v^q + \sum_{\substack{0 \le 2r+1 \le m \\ 0 \le q \le n}} a_{2r+1,q} u^{2r+1} v^q$$

Si u = sin x et v = cos x nous avons $u^2 + v^2 = 1$. Soit $L_1(v)$ le polynôme :

$$\sum_{\substack{0 \le 2r \le m \\ 0 \le q \le n}} a_{2r,q} (1 - v^2)^{2r} v^q$$

et $M_1(v)$ le polynôme :

$$\sum_{\substack{0 \le 2r+1 \le m \\ 0 \le q \le n}} a_{2r+1,q} (1 - v^2)^{2r+1} v^q$$

alors pour u = sin x et v = cos x nous obtenons $P(u, v) = L_1(v) + uM_1(v)$.

Nous démontrerions de manière analogue qu'il existe deux polynômes $L_2(v)$ et $M_2(v)$ tels que pour $u = \sin x$ et $v = \cos x$ nous ayons :

$$Q(u, v) = L_2(v) + uM_2(v)$$

et par suite :

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x) + \sin x.\ M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x.\ M_2(\cos x)}$$

2- Supposons que pour tout élément x de [- a, a] nous ayons $G(x) = - G(-x)$.
La fonction cosinus est une fonction paire et la fonction sinus une fonction impaire. Nous avons donc :

$$\frac{L_1(\cos x) + \sin x.\ M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) + \sin x.\ M_2(\cos x)} = - \frac{L_1(\cos x) - \sin x.\ M_1(\cos x)}{L_2(\cos x) - \sin x.\ M_2(\cos x)}$$

pour tout élément x de [- a, a].
Par suite :

$$L_1(\cos x)L_2(\cos x)+\sin x[M_1(\cos x)L_2(\cos x)-L_1(\cos x)M_2(\cos x)]-\sin^2 xM_1(\cos x)M_2(\cos x)$$
$$= - L_1(\cos x)L_2(\cos x)+\sin x[M_1(\cos x)L_2(\cos x)-L_1(\cos x)M_2(\cos x)]+\sin^2 xM_1(\cos x)M_2(\cos x)$$

pour tout élément x de [- a, a].
Nous avons donc la relation :

$$L_1(\cos x)\ L_2(\cos x) - \sin^2 xM_1(\cos x)\ M_2(\cos x) = 0$$

pour tout élément x de [- a, a].
Supposons que le polynôme L_2 ne soit pas identiquement nul, alors nous aurons :

$$L_1(\cos x) = \frac{\sin^2 xM_1(\cos x)M_2(\cos x)}{L_2(\cos x)}$$

et par suite :

$$G(x) = \frac{\sin xM_1(\cos x)}{L_2(\cos x)}$$

Si le polynôme L_2 est identiquement nul alors nécessairement le polynôme M_1 est identiquement nul, car M_2 ne peut être identiquement nul en même temps que L_2.
Nous avons alors :

$$G(x) = \frac{L_1(\cos x)}{\sin xM_2(\cos x)} = \sin x\ \frac{L_1(\cos x)}{(1-\cos^2 x)M_2(\cos x)}$$

Donc, si $G(x) = - G(- x)$ pour tout élément x de [- a, a], il existe une fonction rationnelle S telle que $G(x) = \sin x.\ S(\cos x)$.

3- Nous déduisons du 2- que l'intégrale $\int_a^b G(x)dx$ peut être calculée en a faisant le changement de variable $\cos x = s$, si $G(x) = - G(- x)$, soit encore si l'élément différentiel $G(x)dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto - x$.
Les notations et les hypothèses étant celles de la question précédente, nous avons alors :

$$\int_a^b G(x)dx = \int_a^b \sin x\ S(\cos x)dx$$

donc si $\overline{S}$ est une primitive de la fonction rationnelle S, nous avons :

$$\int_a^b G(x)dx = \overline{S}(\cos b) - \overline{S}(\cos a)$$

Nous démontrerions de même que l'intégrale proposée peut être calculée en faisant le changement de variable $\sin x = s$ (resp. $\tan x = t$) si l'élément différentiel $G(x)\,dx$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$ (resp. $x \mapsto \pi + x$).

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction continue sur $[-a\,,a]$. Montrer que si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$. Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

Exercice 2. Calculer $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ de deux manières : en posant $x = \frac{1}{t}$, puis en posant $x = \frac{-1}{u}$.

Exercice 3. Calculer les dérivées des fonctions de variable x définies par :

$$f(x) = \int_0^x (\sin t)^5 dt,\ g(x) = \int_x^2 (\operatorname{ch}\ t)^{\frac{5}{2}} dt,\ h(x) = \int_x^{x^2} \arctan(u)du\,,$$

$$k(x) = \int_{\cos x}^{\sin x}\left(\int_0^t \ln(1+u^2)du\right)dt$$

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes sur les intervalles convenables (qu'il faut préciser) : $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}dx$; $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$ (sur $]0\,,\pi[$, de quatre manières différentes) ; $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ (deux calculs différents suivant l'intervalle).

EXERCICES

Exercice 1. Calculer :

$$I = \int_0^1 (2x+3)^{15}dx \ ; \ J = \int_0^1 (2x+3)^2 x^{10}dx \ ; \ K = \int_0^1 \frac{x}{(2x+3)^4}dx$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^x \ln(t)dt \text{ pour x strictement positif ; } \int_0^x \arctan(t)dt \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(x)dx$$

Exercice 3. Calculer $\int \mathrm{ch}(x).\sin(2x)dx$.

Exercice 4. Calculer $\int \frac{\ln(x^2+4x+5)}{(x+1)^2}dx$ sur un intervalle ne contenant pas (-1).

Exercice 5. Calculer $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$.

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-t)dt$. En déduire la valeur de $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \ln(\tan(x))dx$.
2. Montrer que si $f(a+b-x)=f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b x\, f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. En déduire la valeur de $K = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables indiqués :

$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ avec $t = \cos(x)$ $\qquad$ $J = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ avec $u = x^2+1$

$K = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$ avec $u = \arctan(x)$ $\qquad$ $L = \int_e^{e^2} \frac{1}{x.\ln(x)}dx$ avec $u = \ln(x)$

$M = \int_0^1 x^2.(x^3+1)^{-\frac{7}{4}}dx$ avec $u = x^3+1$

Exercice 8. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$.

Exercice 9. Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant chaque fois les intervalles utilisés :

1) $F(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}$ 2) $G(x)=\dfrac{1}{(x^4-1)}$ 3) $H(x)=\dfrac{x^6}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

Exercice 10. Etablir une relation entre I(n) et I(n+1) avec I(n) $=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2-1)^n}$. Calculer I(2) et I(3).

Exercice 11. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de : $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ en utilisant le changement de variable u=sin(x).

Exercice 12. Déterminer une primitive sur $]0,\pi[$ de : $x\mapsto\dfrac{1}{\sin(x)}$ en utilisant le changement de variable u=cos(x).

Exercice 13. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de : $x\mapsto\dfrac{1}{1+\sin^2(x)}$ en utilisant le changement de variable u=tan(x).

Exercice 14. Déterminer une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de : $x\mapsto\dfrac{1}{a+\sin(x)}$ où a est un réel strictement supérieur à 1 en utilisant le changement de variable $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 15. Déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(x).\sin^3(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$ en utilisant le changement de variable u=cos(x).

Exercice 16. Déterminer $\int\cos^6(x).\sin^3(x)\,dx$ sur $[0,\pi]$; $\int\cos^2(x).\sin^4(x)\,dx$.

Exercice 17. Calculer $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

Exercice 18. Déterminer $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 19. Soient a un nombre réel strictement supérieur à 2 et x un nombre réel supérieur à a. Calculer les intégrales :

$$I=\int_a^x\frac{t+1}{\sqrt{t^2-3t+2}}\,dt \quad \text{et} \quad J=\int_a^x\frac{t^2}{\sqrt{4+9t^2}}\,dt$$

Exercice 20. Déterminer $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\,dx$.

Exercice 21. Calculer $I = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}\,dx$ en utilisant le changement de variable $u = x - \frac{1}{x}$.

Exercice 22. Calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}\,dx$ où $[a\,;b] \subset]-2\,;1[$.

Exercice 23. On considère la fonction $F : x \mapsto F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

a- Montrer que pour tout réel t strictement positif,

$$\frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t^2}$$

En déduire que pour tout réel x strictement positif,

$$\arctan(2x) - \arctan(x) \leq F(x) \leq \frac{1}{2x}$$

b- On pose $H(X) = \int_0^X \left(\arctan(2x) - \arctan(x)\right)dx$. Calculez H(X) et déterminer :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{H(X)}{\ln(X)}$$

Vous pourrez utiliser la formule : Pour $X > 0$, $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\pi}{2}$.

c- On pose $G(X) = \int_1^X F(x)dx$. Donner un équivalent de G(X) quand X tend vers plus l'infini.

Quelques exercices corrigés

Exercice 24. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur [a ; b] telle que $\forall x \in [a ; b]\ f(a + b - x) = f(x)$.
Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a : $\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$.

Corrigé : Posons $I = \int_a^b x f(x) dx$.
A l'aide du changement de variable : $u = a + b - x$. Ce changement de variable est de classe C^1. On a :

$$I = \int_b^a (a+b-u) f(a+b-u)(-du) = \int_a^b (a+b-u) f(u) du$$

Cela s'écrit encore : $I = (a+b)\int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du = (a+b)\int_a^b f(u)du - I$.

Cela implique donc que : $2I = (a+b)\int_a^b f(u)du \Leftrightarrow I = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(u)du$.

Exercice 25. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changements de variables :

$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$	$J = \int_0^{\pi/4} \tan x\, dx$	$K= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2} dx$	$L = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

Corrigé : Remarque :
Il y a essentiellement deux manières de définir un changement de variable pour l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

- La première solution consiste à remplacer la variable de l'intégrale par une fonction dépendant d'une autre variable : $x = u(t)$. Dans ce cas, il suffit que la fonction soit de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$, et qu'elle vérifie : $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$.

On obtient alors : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

- La seconde méthode consiste définir une nouvelle variable comme fonction de la variable de l'intégrable, c'est-à-dire à poser : $t = g(x)$. Cette fois, il faut que la fonction g soit bijective sur l'intervalle $[a,b]$ dans $[\alpha,\beta]$ (ce qui revient à dire que le changement de variable est bijectif !).

On se ramène à la première méthode en posant : $t = g^{-1}(x)$ (ie : $u = g^{-1}$).

On obtient alors : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt$.

Cette méthode est intéressante si d'une part, la fonction g apparaît dans l'intégrale et si de plus, on peut facilement démontrer qu'il s'agit d'une bijection sur l'intervalle considéré.

- $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$

Posons $t=\cos(u)$. L'application $u\mapsto \cos u$ est de classe C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;1]$ vérifiant $\cos(0)=1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, on obtient donc :

$$I=\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\cos^2(u)}\times(-\sin(u)du)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\cos^2(u)}\sin(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(u)du.$$

Remarquons que l'on peut remplacer $\sqrt{1-\cos^2(u)}$ par $\sin(u)$ car on est sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour finir le calcul de cette intégrale, il suffit de voir que : $\sin^2(u)=\frac{1-\cos(2u)}{2}$.

D'où : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2u)}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}du-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2u)du=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

Posons $x=\text{Arccos}(u)$. Ce changement de variable est de classe C^1.

On a $u=\cos(x)$, $du=-\sin(x)dx$ et pour $x=0,\ u=1$ et $x=\frac{\pi}{4},\ u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où : $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-1}{u}du=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{1}{u}du=[\ln(u)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$.

- $K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2}dx$

Posons $u=\text{Arctan}(x)$. Ce changement de variable est de classe C^1.

On a $x=\tan(u)$, $du=\frac{dx}{1+x^2}$ et pour $x=0,\ u=0$ et $x=\sqrt{3},\ u=\frac{\pi}{3}$.

D'où : $K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{u}du=\int_0^{\frac{\pi}{3}}u^{1/2}du=\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2}$.

- $L=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

Posons $u=\ln x$. Ce changement de variable est de classe C^1.

On a $x=e^u$, $du=\frac{dx}{x}$ et pour $x=e,\ u=1$ et $x=e^2,\ u=2$.

D'où : $L=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^2\frac{1}{u}du=[\ln u]_1^2=\ln 2$.

Exercice 26. Calculer les intégrales suivantes :

1- $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{x^2+1}dx$ 2- $I_2=\int_0^1 xf''(x)dx$ (f est de classe C^2 sur [0 ; 1])

3- $I_3=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\sin(qx)dx$ (n, p et q éléments de ℕ)

Corrigé : 1- $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}dx$.

La fonction $x\mapsto\frac{x\cos(x)}{x^2+1}$ est impaire. Or l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0 est nulle. Pour le vérifier, il suffit de découper l'intégrale en deux de la manière suivante :
$\int_{-1}^{1}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x\cos(x)}{x^2+1}dx$ et d'effectuer le changement de variable : u=-x dans le premier terme.
Finalement, $I_1=0$

2- $I_2=\int_0^1 xf''(x)dx$

A l'aide d'une intégration par partie (on vérifie simplement les hypothèses), on a :

$$I_2=\left[xf'(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-\left[f(x)\right]_0^1=f'(1)-f(1)+f(0)$$

3- $I_3=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\sin(qx)dx$

Pour calculer cette intégrale, il faut décomposer le produit de sin en somme de sin et de cos.
Remarquons d'ailleurs que la fonction à intégrer étant paire, on a $I_4=2\int_0^{\pi}\sin(px)\sin(qx)dx$.

On a : $\sin(px)\sin(qx)=\frac{-1}{2}\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}x\right)-\cos\left(\frac{p-q}{2}x\right)\right)$.

D'où $I_3=-\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}x\right)-\cos\left(\frac{p-q}{2}x\right)\right)dx=-\left[\frac{2}{p+q}\sin\left(\frac{p+q}{2}x\right)-\frac{2}{p-q}\sin\left(\frac{p-q}{2}x\right)\right]_0^{\pi}$.

Or, $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$ si n est un entier.

D'où, $I_3=-\left[\frac{2}{p+q}(-1)^{p+q}-\frac{2}{p-q}(-1)^{p-q}\right]=0$ car $(-1)^{p-q}=(-1)^{p+q}$.

Exercice 27. Etant donné $\theta\in[0;\pi[$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\cos\theta\cos t}$ *(On pourra poser* t=2arctan(u)*)*.

Corrigé : On pose comme indiqué t=2arctan(u).

On peut remarquer que ce changement de variable est bijectif de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans [0 ;1] car $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{t}{2}\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, et ainsi $u=\tan\frac{t}{2}$.

De plus, l'application $t \mapsto \tan\frac{t}{2}$ est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

On rappelle que $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{t}{2}} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, et d'autre part, $dt = \frac{2du}{1+u^2}$.

On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos\theta\cos t} = \int_{\tan(0)}^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+\cos\theta\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2+\cos\theta\left(1-u^2\right)} = \int_0^1 \frac{du}{1+\cos\theta+u^2\left(1-\cos\theta\right)}.$$

Pour simplifier les notations, on pose : $\alpha = 1+\cos\theta$, et $\beta = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$.

Remarquons que β est bien défini car $\theta \in [0;\pi[$.

On obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos\theta\cos t} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1+\beta u^2}$.

Effectuons maintenant le changement de variable : $v = \sqrt{\beta}u$ ($\beta > 0$), on a $du = \frac{1}{\sqrt{\beta}}dv$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos\theta\cos t} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1+\beta u^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\sqrt{\beta}} \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}}dv}{1+v^2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\int_0^{\sqrt{\beta}} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\left[\operatorname{Arc}\tan v\right]_0^{\sqrt{\beta}} = \frac{\operatorname{Arc}\tan\sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}}$$

Exercice 28. Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant chaque fois les intervalles utilisés :

1- $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	2- $g(x) = \frac{\sin x}{(\cos(x))^5}$	3- $h(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x - 1}$
4- $j(x) = \frac{1}{\cos(x) - \cos(3x)}$	5- $k(x) = \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}$	6- $l(x) = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$

Corrigé : 1- $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

On se place sur un intervalle où la fonction f est définie c'est à dire sur un intervalle du type $I_k = \left]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right[$ avec k élément de $\mathbb{Z}$.

D'après les règles de Bioche, on peut utiliser le changement de variable : $t = \sin(x)$ qui est un changement de variable bijectif de classe C^1 de I_k sur un intervalle.

On a ; $\frac{dx}{\cos x} = \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}$, et $dt = \cos x dx$ donc $\int f(x) = \int \frac{dt}{1-t^2}$.

Pour calculer $\int \frac{dt}{1-t^2}$, on fait une décomposition en éléments simples :

$\frac{2}{1-t^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}$ d'où $\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1-t}+\int\frac{dt}{1+t}=-\ln|1-t|+\ln|1+t|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$.

Finalement, on en déduit que :

$$\int f(x)=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+Cste=\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+Cste=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+Cste$$

2- $g(x)=\frac{\sin x}{(\cos(x))^5}$

De même que précédemment, on se place sur un intervalle du type $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$ avec k élément de $\mathbb{Z}$.

On sait que la dérivée de $x\mapsto\cos x$ est $x\mapsto-\sin x$, on reconnaît donc une fonction de la forme $-\frac{u'}{u^5}$ avec $u=\cos(x)$, donc une primitive de g est $G(x)=\frac{1}{\cos^4 x}+Cste$.

3- $h(x)=\frac{1+\cos x}{\sin x-1}$

On se place sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas à savoir un intervalle du type $I_k=\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi\right[$ avec k élément de $\mathbb{Z}$.

Pour déterminer une primitive de h, on effectue le changement de variable : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est un changement de variable bijectif de classe C^1 de I_k sur un intervalle.

On sait que : $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ et $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

On obtient donc :

$$\int h(x)=\int\frac{1+\cos x}{\sin x-1}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}{\frac{2t}{1+t^2}-1}\times\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{-\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{-4}{(1+t^2)(1-t)^2}dt.$$

Une décomposition en éléments simples nous donne :

$$\frac{4}{(1+t^2)(1-t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)}-\frac{2}{(t-1)}+\frac{2}{(t-1)^2}$$

On en déduit que :

$$\int h(x)=-\int\left(\frac{2t}{(1+t^2)}-\frac{2}{(t-1)}+\frac{2}{(t-1)^2}\right)dt=-\left(\ln(1+t^2)-2\ln(t-1)-\frac{2}{(t-1)}\right)+C$$

$$=-\ln(1+t^2)+2\ln(t-1)+\frac{2}{(t-1)}+C$$

4- $j(x)=\frac{1}{\cos(x)-\cos(3x)}$

Il est facile de vérifier à l'aide des formules de trigonométrie usuelles que : $\cos(3x)=\cos x-4\sin^2 x\cos x$ d'où $\cos x-\cos(3x)=4\sin^2 x\cos x$, et ainsi $j(x)=\dfrac{1}{4\sin^2 x\cos x}$.

On doit donc se placer sur un intervalle I où ni cosinus ni sinus ne s'annule.

D'après les règles de Bioche, on pose : $t=\sin x$ qui est un changement de variable bijectif de classe C^1 de I sur un intervalle, ce qui nous donne $dt=\cos x dx$.

On a : $\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\dfrac{\cos x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ donc :

$$\int j(x)dx=\int\frac{1}{4\sin^2 x\cos x}dx=\int\frac{\cos x dx}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dt}{4t^2\left(1-t^2\right)}$$

On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{t^2\left(1-t^2\right)}$ et on trouve :

$$\frac{1}{t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t+1}-\frac{2}{t-1}$$

Finalement, on en déduit que :

$\displaystyle\int j(x)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t+1}-\frac{2}{t-1}\right)dt=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}+2\ln\left(|t+1|\right)-2\ln\left(|t-1|\right)\right)+C$, soit :

$$\int j(x)dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sin x}+2\ln\left(|\sin x+1|\right)-2\ln\left(|\sin x-1|\right)\right)+C$$

5- $k(x)=\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}$

On se place sur un intervalle I où le cosinus ne vaut pas -1. On remarque que : $k(x)=\dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos x}$.

Posons $u=\cos(x)$ qui est un changement de variable bijectif de classe C^1 de I sur un intervalle. (Règles de Bioche) alors $du=-\sin x dx$, on obtient donc :

$$\int k(x)dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx}{1+\cos x}=\int\frac{\left(1-u^2\right)}{1+u}(-du)=-\int(1-u)du=-u+\frac{u^2}{2}+C=-\cos x+\frac{\cos^2 x}{2}+C$$

6- $l(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x\cos x}$

On se place sur un intervalle I où ni sinus ni cosinus ne s'annulent. On a : $l(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x\cos^2 x}$.

Posons $u=\sin(x)$ qui est un changement de variable bijectif de classe C^1 de I sur un intervalle (Règles de Bioche) alors $du=\cos x dx$, on obtient donc :

$$\int l(x)dx=\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x\cos^2 x}=\int\frac{du}{u^3\left(1-u^2\right)}$$

En faisant une décomposition en éléments simples, on trouve :

$$\frac{1}{u^3\left(1-u^2\right)}=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^3}-\frac{1}{2(u+1)}-\frac{1}{2(u-1)}$$

On en déduit que :

$$\int l(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^3}-\frac{1}{2(u+1)}-\frac{1}{2(u-1)}\right)du=\ln|u|-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{2}\ln\left(|1+u|\right)-\frac{1}{2}\ln\left(|u-1|\right)+C$$

D'où : $\int l(x)\,dx=\ln|\sin x|-\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left(|1+\sin x|\right)-\frac{1}{2}\ln\left(|\sin x-1|\right)+C$

Exercice 29. Intégrales de Wallis

On pose : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1- Calculer I_0 et I_1.

2- Prouver que la suite $\left(I_n\right)_n$ est strictement décroissante et minorée.

3- A l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_{n+1}\qquad(1)$$

4- En déduire l'expression de I $_n$ en fonction de n, en distinguant le cas n pair du cas n impair.

5- A partir de la relation (1), prouver que la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n=nI_nI_{n-1}$ est constante pour $n > 0$.

En déduire la limite de la suite $\left(I_n\right)_n$.

6- Montrer que le rapport $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ a pour limite 1. En déduire que : $I_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

7- En déduire finalement que : $\lim\limits_{p\to+\infty}\sqrt{p}\,\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2p-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2p)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Corrigé : 1- On a $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ et $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2- $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $0\le\sin x<1$ donc $\sin^{n+1}x<\sin^n x$.

On en déduit donc que : $I_{n+1}<I_n$ c'est-à-dire que la suite est strictement décroissante.

D'autre part, comme $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0\le\sin^n x$, on a $I_n\ge0$.

La suite étant décroissante et minorée, on peut en déduire qu'elle converge. On note I sa limite.

3-

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin^n(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos x}_{v}\times\underbrace{\cos x\sin^n(x)}_{u'}dx$$

$$I_{n+2}=I_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos x}_{v}\times\underbrace{\cos x\sin^n(x)}_{u'}dx=I_n-\left[\cos x\times\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}dx$$

$$=I_n-\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx=I_n-\frac{1}{n+1}I_{n+2}$$

D'où : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

4- Supposons tout d'abord n pair : n=2p.

D'après la relation (1), on a : $2(p+1)I_{2(p+1)} = (2p+1)I_{2p} \Leftrightarrow I_{2(p+1)} = \dfrac{(2p+1)}{2(p+1)}I_{2p}$.

On applique alors de nouveau cette relation à (n-2) afin d'obtenir une expression de I_{2p}, cela nous donne :

$$I_{2(p+1)} = \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \times \frac{(2p-1)}{2p} I_{2(p-1)}$$

On continue :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= \frac{(2p+1)}{2(p+1)} \times \frac{(2p-1)}{2p} \times \frac{(2p-3)}{2(p-1)} \ldots \times I_0 = \frac{(2p+1)\times(2p-1)\times(2p-3)\times \ldots .1}{2(p+1)\times 2p \times 2(p-1)\times \ldots \times 2} \times I_0 \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\times \ldots .1}{(2(p+1))^2 \times (2p)^2 \times (2(p-1))^2 \times \ldots \times 2^2} \times I_0 \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} \times I_0 = \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

On traite de la même manière le cas n impair.
On obtient :

$$\begin{aligned}
I_{2p+3} &= \frac{2(p+2)}{2p+3} \times \frac{2(p+1)}{2p+1} \times \frac{2(p)}{2p-1} \ldots \times I_1 = \frac{2(p+2)\times 2(p+1)\times 2(p) \times \ldots .2}{(2p+3)\times(2p+1)\times(2p-1)\times \ldots \times 1} \times I_1 \\
&= \frac{(2(p+2))^2 \times (2(p+1))^2 \times (2(p))^2 \times \ldots .2}{(2p+4)(2p+3)(2p+2)(2p+1)2p(2p-1)\times \ldots \times 1} \times I_1 = \frac{2^{2(p+2)}((p+2)!)^2}{(2p+4)!}
\end{aligned}$$

D'où : $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+2)!}$.

5- D'après la relation (1), on a $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$.

Remarquons que d'après la question précédente, I_n n'est jamais nul, donc U_n non plus.

On a donc : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{(n+1)I_{n+1}I_n}{nI_nI_{n-1}} = \dfrac{(n+1)I_{n+1}}{nI_{n-1}} = \dfrac{(n+1)n}{n(n+1)} = 1$.

On en conclut que la suite $(U_n)_n$ est constante et pour tout entier naturel n, $U_n = U_1 = I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

On a donc : $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.

On a vu à la question 2 que la suite $(I_n)_n$ converge vers I, on peut donc passer à la limite dans la relation précédente, ce qui nous donne : $I^2 = 0$ d'où $I = 0$.

6- D’après la relation (1), on a : $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\frac{n}{n+1} I_{n-1}}{\frac{n-1}{n} I_{n-2}} = \frac{n^2}{n^2-1} \times \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}$.

Posons $V_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ alors d’après ce que l’on vient de voir, on a $V_n = \frac{n^2}{n^2-1} V_{n-2}$.

On a donc selon que n est pair ou impair :

$V_{2p} = \frac{4p^2}{4p^2-1} V_{2(p-1)}$ et $V_{2p+1} = \frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1} V_{2(p-1)+1}$.

Considérons alors les suites $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ définies par : $a_p = V_{2p}$ et $b_p = V_{2p+1}$.

On a : $a_p = \frac{4p^2}{4p^2-1} a_{(p-1)}$ (A) et $b_p = \frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1} b_{(p-1)}$ (B) donc il est clair que ces deux suites sont croissantes.

D’autre part puisque la suite $(I_n)_n$ est décroissante, elles sont majorées par 1 $\left(V_n = \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \right)$.

Or on sait qu’une suite croissante et majorée est convergente donc ces deux suites sont convergentes.

En passant à la limite dans les relations (A) et (B), on voit que ces deux suites ont même limite 1.

On vient donc de montrer que $\lim_{p\to\infty} V_{2p} = \lim_{p\to\infty} V_{2p+1} = 1$, on peut donc en conclure que $\lim_{n\to\infty} V_n = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ implique que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$ donc $I_{n+1} I_n \underset{+\infty}{\sim} I_n^2$.

Or, on a vu à la question 5 que : $I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ donc $I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ et ainsi $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

7- Cette relation découle immédiatement de l’expression de I_{2p} et de l’équivalence précédente :

On a $\lim_{p\to\infty} \frac{I_{2p}}{\sqrt{\frac{\pi}{4p}}} = 1$ et en remplaçant I_{2p} par son expression on trouve le résultat.

Chapitre 18

INTEGRALE GENERALISEE

1- Fonctions localement intégrables

Définition : Soit I un intervalle (ouvert, fermé, semi-ouvert) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. f est localement intégrable sur I signifie que f est intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans I.

Théorème : Une fonction continue sur I est localement intégrable sur I.

Définition : Soit f une fonction localement intégrable sur [a,b[(b réel ou infini).
Posons pour tout élément x de [a,b[, F(x)= $\int_a^x f(t)dt$.

Si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe et vaut le **réel** l, alors on pose $\int_a^b f(t)dt = l$ et on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge (vers l), sinon on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Définition : Soit f une fonction localement intégrable sur]a,b] (a réel ou infini).
Posons pour tout élément x de]a,b], F(x)= $\int_x^b f(t)dt$.

Si $\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe et vaut le **réel** l, alors on pose $\int_a^b f(t)dt = l$ et on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge (vers l), sinon on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Attention : L'idée de définir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ par : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(t)dt$ est fausse. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner l'exemple suivant :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} tdt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{a} = 0 \text{ et } \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a^2} tdt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{a^2} = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{a^4}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = +\infty$$

Quelle valeur prend-t-on pour $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$?

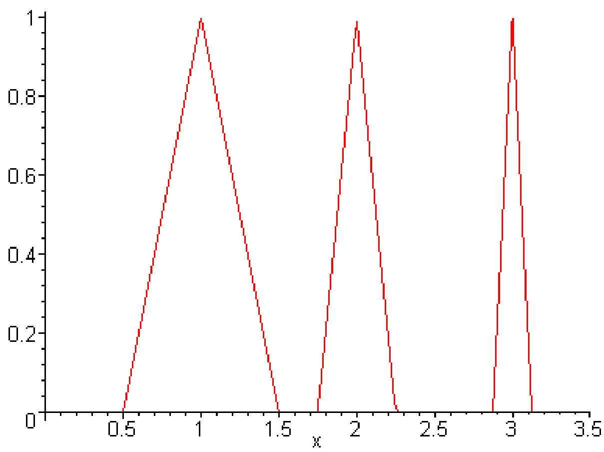
Réponse : L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ est divergente.

Remarques : a- Soit f une fonction localement intégrable sur]a,b[(a et b réels ou infinis). L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour c élément de]a,b[les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et dans ce cas, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
On peut montrer que ce résultat est indépendant du réel c.

b- Soit f un élément de $C^0([a;+\infty[)$. La condition "$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge" n'implique pas que "$\lim\limits_{+\infty} f = 0$".

Exemple : Soit f la fonction définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \text{si } t \in \left[n\,,\, n+\dfrac{1}{2^n}\right], & f(x) = -2^n t + 1 + 2^n n \\ \text{si } t \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n\right], & f(x) = 2^n t + 1 - 2^n n \\ \text{si } t \in \left]n\text{-}1+\dfrac{1}{2^{n-1}},\, n\text{-}\dfrac{1}{2^n}\right[, & f(t) = 0 \end{cases}$$



f vérifie $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et est égale à 1 et $\lim\limits_{+\infty} f$ n'existe pas.

c- Prolongement par continuité

Soit f une fonction réelle continue sur [a,b[. Etude de $\int_a^b f(t)dt$.

Si $\lim\limits_{t \to b^-} f(t) = l \in \mathbb{R}$, alors nous prolongeons f par continuité en b en posant f(b)=l.

Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est l'intégrale d'une fonction continue définie sur [a,b] et le problème de convergence ne se pose plus…

2- Méthode de calcul

1- Utilisation d'une primitive

2- Changement de variable « généralisé »

Théorème : Soit φ une bijection de classe C^1 de]α, β[sur f (]α, β[). On note $a=\lim\limits_{t\to\alpha^+}\varphi(t)$ et $b=\lim\limits_{t\to\beta^-}\varphi(t)$.

Soit f une fonction continue sur]a, b[ou]b, a[.

Alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et si elles convergent, elles sont égales.

3- Intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions de]a,b[dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$A=\lim_{x\to a^+} u(x)v(x) \text{ et } B=\lim_{x\to b^-} u(x)v(x) \text{ existent}$$

Alors, les intégrales généralisées $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ sont de même nature.

Si elles convergent, alors $\int_a^b u(t)v'(t)dt = B-A-\int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Remarque : Si l'intégrale $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ converge, on a alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt\right]_a^b$$

3- Les intégrales de Riemann

Théorème : Soit a un réel strictement positif.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha>1$$

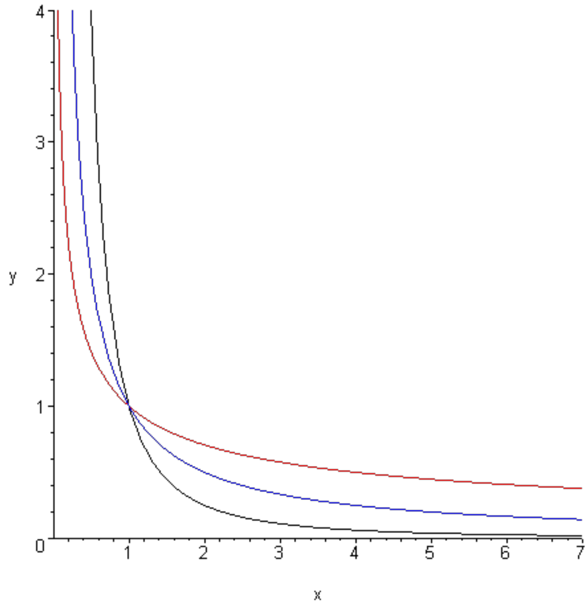
Théorème : Soit b un réel strictement positif.

$$\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha<1$$

Théorème : Soit c un réel strictement supérieur au réel a.

$$\int_a^c \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha<1$$

Truc : Positionnement des graphes des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ par rapport au graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.



4- Comparaison avec des fonctions positives

Théorème : Soient f et g deux fonctions localement intégrables positives définies sur [a,b[telles que pour tout x de [a,b[, $f(x) \leq g(x)$.

1- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge

2- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

5- Intégrale absolument convergente et semi-convergente

Définition : L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est dite absolument convergente si par définition $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Propriété : Soit f une fonction localement intégrable. Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Définition : Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge sans que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente.

6- Critère de Riemann au voisinage de l'infini

Théorème : Soit a un réel strictement positif.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

a- S'il existe un réel $\alpha>1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha}f(t)=0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente

b- S'il existe des réels k non nul et α tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{t^{\alpha}}$, alors

- $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si $\alpha>1$
- $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente si $\alpha \leq 1$

c- S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha}f(t)=+\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

7- Critère de Riemann au voisinage d'un réel a

Théorème : Soit a et b deux réels.
Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b]$.

a- S'il existe un réel $\alpha<1$ tel que $\lim\limits_{t\to a^+} (t-a)^{\alpha}f(t)=0$, alors $\int_a^{b} f(t)dt$ est absolument convergente

b- S'il existe des réels k non nul et α tels que $f(t) \underset{a}{\sim} \dfrac{k}{(t-a)^{\alpha}}$, alors

- $\int_a^{b} f(t)dt$ est absolument convergente si $\alpha<1$
- $\int_a^{b} f(t)dt$ est divergente si $\alpha \geq 1$

c- S'il existe un réel $\alpha \geq 1$ tel que $\lim\limits_{t\to a^+} (t-a)^{\alpha}f(t)=+\infty$ (ou $-\infty$), alors $\int_a^{b} f(t)dt$ est divergente.

8- Intégrales généralisées et équivalence

Théorème : Soit f et g deux fonctions localement intégrables, strictement positives sur $[a,b[$ telles que : $f \underset{b}{\sim} g$. Alors les intégrales généralisées $\int_a^{b} f(t)dt$ et $\int_a^{b} g(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration : Comme $\lim\limits_{t\to b} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$, il existe $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall t \in [a,b[,\ t \in [c,b[\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3}{2}$$

Donc,
$$\forall t \in [a,b[,\ t \in [c,b[\Rightarrow \frac{1}{2} g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2} g(t)$$

On a alors : $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_c^b g(t)dt$ converge

$$\Rightarrow \int_c^b f(t)dt \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

la deuxième implication provenant de l'inégalité $f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$, et la première et la troisième étant évidentes.

De même : $\int_a^b f(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ converge

grâce, cette fois, à l'inégalité : $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t)$.

Conclusion : les intégrales sont de même nature.

Remarque : Il faut être très rigoureux dans l'usage des équivalents pour établir la nature des intégrales. Il est clair que le résultat précédent reste valable si les fonctions sont strictement négatives. Mais, le résultat est faux lorsque les fonctions changent de signe (voir exercices).

9- Fonction Gamma d'Euler

En 1755, **Euler** publie un traité de calcul différentiel et intégral (complété en 1768 : *Institutiones calculi integralis*) où l'on y rencontre les « fonctions d'Euler » ou *fonctions eulériennes* dont la plus connue, la fonction Γ (le G grec : gamma, ainsi nommée par **Legendre**) définie pour tout nombre x > 0 par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

Si n est entier naturel, alors :

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Preuve : 1- Pour trouver l'ensemble de définition de Γ, il faut étudier à quelles conditions sur x l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\left| \begin{array}{l} [0,\infty[\text{ si } x \geq 1 \\ ]0,\infty[\text{ sinon} \end{array} \right.$.

On doit donc distinguer deux cas :

- $x \geq 1$:

On a un problème en $+\infty$. Or on a $t^2 \times t^{x-1}e^{-t} = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ donc d'après le critère de Riemann, cette fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On en déduit donc que si $x \geq 1$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

- $x < 1$:

On a un problème en $+\infty$ et en 0.

En $+\infty$, on a la même chose que précédemment, à savoir convergence de l'intégrale.

En 0, on a $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\overset{t}{\sim}} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et cette fonction est intégrable en 0 si et seulement si $1-x<1 \Leftrightarrow 0<x$.

On en déduit donc que si $0<x<1$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Finalement, on en conclut que le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}^{*+}$.

2- Montrons que pour tout réel x>0, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Soit x>0, on a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \lim\limits_{B\to\infty} \int_0^B t^x e^{-t}dt$.

Or $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1. D'où :

$$\int_0^B t^x e^{-t}dt \underset{IPP}{=} \left[t^x \times \left(-e^{-t}\right)\right]_0^B - \int_0^B xt^{x-1}\left(-e^{-t}\right)dt = -B^x e^{-B} + \int_0^B xt^{x-1}e^{-t}dt == -B^x e^{-B} + x\int_0^B t^{x-1}e^{-t}dt$$

Donc, $\Gamma(x+1) = \lim\limits_{B\to\infty}\left(-B^x e^{-B} + x\int_0^B t^{x-1}e^{-t}dt\right) = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$.

Soit alors n un entier naturel. D'après ce qui précède, on a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Il est alors facile de vérifier par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$.

En effet, $\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.

De plus, si on suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ alors puisque $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, on obtient :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$$

Moins célèbre, mais pratique pour l'intégration des fonctions rationnelles, est la fonction eulérienne β :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Euler démontra la formule dite *des compléments* :

$$\text{si } 0 < p < 1 \text{, alors : } \Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

Conséquence avec $p = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

C'est l'intégrale dite de Gauss.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. A l'aide de la définition de la convergence d'une intégrale impropre, étudier la convergence (et donner éventuellement la valeur) des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \;;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \;;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;;\; \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;;\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \;;\; \int_0^1 \ln(u)\,du$$

Exercice 2. Montrer la convergence de $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(2-t)(t-1)}}\,dt$, puis calculer cette intégrale.

Exercice 3 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$ converge, puis calculer I_n en l'exprimant en fonction de I_{n-1}.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $J_n = \int_0^1 (\ln(t))^n\,dt$ converge, puis calculer J_n.

EXERCICES

Exercice 1. Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 2. 1- Soit f une fonction de classe C^1, décroissante sur $[a;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ soit nulle. En intégrant par parties, montrer que $\int_a^{+\infty} f(x).\sin(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x).\cos(x)\,dx$ convergent.

2- Montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ est divergente.

Indication : exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

3- Montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$ sont convergentes. Sont-elles absolument convergentes ?

4- Soit a un réel strictement positif. Etudier : $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.\left(1+\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)dx$. Conclure.

Exercice 3. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes en déterminant les limites correspondantes : $\int_0^1 \ln(x)\,dx$; $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$.

Exercice 4. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Exercice 5. Soient α et β deux réels tels que : $0<\alpha\leq\beta$. Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}\,dx$.

Exercice 6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx \;;\; \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)}\,dx \;;\; \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(x)+1}\,dx \;;\; \int_2^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,dx$$

Exercice 7. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Calculer $\Gamma(\alpha)$ pour α entier naturel non nul.

Exercice 8. Soit a un réel.

1- Etudier la convergence de $I_a = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Dans la suite de l'exercice, on choisit a tel que I_a converge.

2- Calculer I_1 et I_2.

3- Montrer que $I_{a+2} = \frac{a}{a+1} I_a$.

Indication : vous pourrez utiliser une intégration par parties de I_a.

4- Soit n un entier naturel. Calculer I_n.

Exercice 9. Etudier et éventuellement calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\ln\left(\tan(x)\right) dx$.

Exercice 10. 1- Pour $u > 0$, on pose $f(u) = \frac{\ln(u)}{(1+u)^3}$. Calculer $\int f(u)du$ sur $]0;+\infty[$.

2- Montrer que l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$ existe.

3- Calculer I_1 à l'aide de 1-.

4- Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\ln(t)}{(1+t^\alpha)^3}\,dt$. Calculer I_α à l'aide de 3- (vous distinguerez les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

Exercice 11. Prouver la convergence puis calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{\sqrt{1-u}}\,du$.

Exercice 12. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante : $\int_0^1 \frac{1}{\arccos(x)}\,dx$.

Exercice 13. On considère les intégrales : $I = \int_1^{+\infty} \frac{t.\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^3.\ln(t)}{(1+t^4)^3}\,dt$.

Montrer que I et J sont convergentes et calculer leurs valeurs.

Exercice 14. Soit $\varphi(t,x)=e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$, $(t,x)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

1- Montrer la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t,x)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)dt \quad \text{pour tout } x\in[0,+\infty[$$

2- On pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)dt$.

a- Prouver que $\forall u \in [0,+\infty[,\ 0 \le 1-e^{-u} \le \min(1,u)$.

b- En déduire que $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)-f(0)| \le \int_0^x e^{-t^2}dt + x^2\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$.

c- Montrer alors que f est continue en 0^+.

3- On admet que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)dt$.

Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x)=-2f(x)$.

4- En déduire l'expression de f sur [0,+∞[sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Eléments de correction :

1- Soit x un élément de $[0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \varphi(t,x)$ est localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut prolonger par continuité cette fonction en 0 en posant φ(0,0)=1 et φ(0,x)=0 si x est non nul. Donc $\int_0^1 \varphi(t,x)dt$ est convergente.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\,\varphi(t,x)=0$. Donc, d'après les critères de Riemann, $\int_1^{+\infty} \varphi(t,x)dt$ converge.

On a : $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = -\frac{2x}{t^2}\,\varphi(t,x)$.

- Pour x=0, on a : $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,0)=0$, d'où $\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,0)dt$ converge.
- Pour $x\neq 0$, on a : $\lim\limits_{t\to0^+} t^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)=0$. Donc, d'après les critères de Riemann, $\int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)dt$ converge.

2- a- L'inégalité $\forall u\in[0,+\infty[,\ 0\le 1-e^{-u}\le u$ s'obtient en étudiant la fonction : $u \mapsto e^{-u}+u-1$. Les autres ne posent pas de difficulté.

b- $$|f(x)-f(0)| = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(1-e^{-\frac{x^2}{t^2}}\right)dt$$

$$\le \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{Min}\left(1,\frac{x^2}{t^2}\right)dt$$

$$\le \int_0^{x} e^{-t^2}\mathrm{Min}\left(1,\frac{x^2}{t^2}\right)dt + \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{Min}\left(1,\frac{x^2}{t^2}\right)dt$$

$$\le \int_0^{x} e^{-t^2}dt + \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{t^2}e^{-t^2}dt.$$

Donc, $\forall x\in[0,+\infty[,\ |f(x)-f(0)| \le \int_0^x e^{-t^2}dt + x^2\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$

$$\le \int_0^x e^{-t^2}dt + x.$$

c- Par passage à la limite, on en déduit que f est continue en 0.

3- Le changement de variable est $u=\frac{x}{t}$.

4- On obtient le résultat : $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}$ en intégrant l'équation différentielle obtenue en 3-.

Exercice 15. Soit la fonction :

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt$$

1- Démontrer que F est définie sur ℝ et est paire.

2- Dérivabilité :

2-1- Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall (x,t,h) \in \mathbb{R}^3,\ \left|\sin^2\big(t(x+h)\big) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \leq h^2t^2$$

2-2- Montrer que :

$$G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}dt$$

est définie sur $\mathbb{R}$.

2-3- En étudiant :

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right|,$$

démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée G.

Exercice 16.

1- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ est convergente. Pour la suite, **on admet que I** $=$ $\boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$**.**

2 - On considère l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1+t^2\right)}$.

a- Montrer que J est convergente.

b- Utiliser, après l'avoir justifié, le changement de variable $u = \sqrt{t}$ pour calculer la valeur de J.

3 - Pour $\alpha > 0$, on considère l'intégrale $K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}dt$.

a- Pour quelles valeurs de α l'intégrale $K(\alpha)$ est-elle convergente ?

b- Calculer $K\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 17.

1 - Pourquoi l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt$ peut-elle être considérée comme une intégrale ordinaire ?

2-a- Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1[$, $\int_0^x \frac{t}{\ln(t)}dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln(u)}du$.

b- En déduire que $J = \lim_{x\to 1^-} \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln(t)}dt$.

3 - Soit $t \in]0,1[$. Déterminer un encadrement de - ln(t) en intégrant les inégalités $1 \leq \frac{1}{u} \leq \frac{1}{u^2}$ pour tout $u \in [t, 1]$..

4 - En déduire un encadrement de $\int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln(t)}dt$ puis la valeur de J.

Exercice 18.

1 - Montrer la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

a- Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$ f(x) (on pourra appliquer le théorème de la moyenne à un taux d'accroissement de f).

3 - Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$.

Montrer que F est constante. En déduire la valeur de I.

Quelques exercices corrigés

Exercice 19. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans calculer leur valeur) :

$J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$	$J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2 dt$	$J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5} dx$	$J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2} dx$
$J_5 = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$	$J_6 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sqrt{\tan t}}$	$J_8 = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$
$J_9 = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$	$J_{10} = \int_2^{+\infty} \frac{\text{arctant}}{t^3 + \ln t} dt$	$J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$	$J_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$
$J_{13} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$	$J_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}$	$J_{15} = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$	$J_{16} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Corrigé : Pour étudier la convergence de chacune des intégrales proposées, il faut tout d'abord étudier la continuité de la fonction à intégrer. Si la fonction n'est pas continue en l'une des deux bornes, alors il y a un problème en cette borne et l'on doit résoudre ce problème grâce à des résultats connus. Sinon on n'a rien à faire, et la fonction est intégrable.

1- $J_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$

La fonction : $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0.

Or, on a $\ln(1+t) \underset{0}{\overset{t}{\sim}} t$ d'où $\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{0}{\overset{t}{\sim}} 1$, la fonction : $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0, et ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ converge.

2- $J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2 dt$

La fonction : $t \mapsto (\ln t)^2$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0.

Or, on a $\sqrt{t}(\ln(t))^2 = \left(t^{1/4}\ln(t)\right)^2 = \left(4t^{1/4}\ln\left(t^{1/4}\right)\right)^2 \xrightarrow{t\to 0} 0$ d'où $(\ln(t))^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

La fonction : $t \mapsto \sqrt{t}$ étant intégrable en 0, on en déduit que l'intégrale $J_2 = \int_0^1 (\ln t)^2 dt$ converge.

3- $J_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5} dx$

La fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^5}$ est continue sur $[2,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a : $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(\ln(x))^5} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$, donc $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x}(\ln(x))^5} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$, donc d'après le critère de Riemann, cette intégrale diverge.

4- $J_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2} dx$

La fonction : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

Or, on sait que $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ donc $\sqrt{\ln x} \underset{\infty}{\overset{x}{=}} o\left(\sqrt{x}\right)$.

Ainsi, $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x^2} \underset{\infty}{\overset{x}{=}} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, et comme : $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_4 = \int_2^{+\infty} \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x^2}dx$ converge.

5- $J_5 = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

La fonction : $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4}} \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} 1 > 0$, et comme $x \mapsto 1$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_5 = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$ ne converge pas.

6- $J_6 = \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

La fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$. On a un problème en 1.

On a : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{u=1-t}{=} \dfrac{1}{\sqrt{-u^2+2u}} = \dfrac{1}{\sqrt{u(2-u)}} \underset{0}{\overset{u}{\sim}} \dfrac{1}{\sqrt{2u}} > 0$, et comme $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2u}}$ est intégrable au voisinage de 0, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_6 = \int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

7- $J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dt}{\sqrt{\tan t}}$

La fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\tan t}}$ est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. On a un problème en 0.

On a : $\dfrac{1}{\sqrt{\tan t}} \underset{0}{\overset{t}{\sim}} \dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0$, et comme $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable au voisinage de 0, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dt}{\sqrt{\tan t}}$ converge.

8- $J_8 = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$

La fonction : $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$. On a un problème en 0.

On a : $t^{3/4}\times\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}=t^{1/4}\times\ln t\xrightarrow{t\to0}0$ donc $\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}=o\left(\dfrac{1}{t^{3/4}}\right)$ et comme $t\mapsto\dfrac{1}{t^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_8=\int_0^1\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$ converge.

9- $J_9=\int_1^{+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)dt$

La fonction : $t\mapsto\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a : $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\underset{\infty}{\overset{t}{\sim}}\dfrac{1}{t^2}>0$, et comme $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_9=\int_1^{+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)dt$ converge.

10- $J_{10}=\int_2^{+\infty}\dfrac{\arctan t}{t^3+\ln t}dt$

La fonction : $t\mapsto\dfrac{\arctan t}{t^3+\ln t}$ est continue sur $[2,+\infty[$. On a un problème en $+\infty$.

On a : $\dfrac{\arctan t}{t^3+\ln t}\underset{+\infty}{\overset{t}{\sim}}\dfrac{\pi}{2t^3}>0$, et comme $t\mapsto\dfrac{1}{2t^3}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que l'intégrale $J_{10}=\int_2^{+\infty}\dfrac{\arctan t}{t^3+\ln t}dt$ converge.

11- $J_{11}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}dt$

La fonction : $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a un problème en 0 et en $+\infty$.

On a : $\left|\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}\right|\le\dfrac{1}{t^{3/2}}$ et comme $t\mapsto\dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit par un théorème de comparaison que $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'autre part, on a $\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}\underset{0}{\overset{t}{\sim}}\dfrac{t}{t^{3/2}}\underset{0}{\overset{t}{\sim}}\dfrac{1}{\sqrt{t}}>0$ et comme $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0, on en déduit par un théorème de comparaison que $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de 0.

Finalement, on en conclut que l'intégrale $J_{11}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{3/2}}dt$ converge.

12- $J_{12}=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^\alpha}{1+t^2}dt$

Il faut étudier la convergence en fonction de la valeur du paramètre α.

Tout d'abord, on a : $t\mapsto\dfrac{t^\alpha}{1+t^2}$ est continue sur $\left|\begin{array}{l}[0,+\infty[\text{ si }\alpha\ge0\\ ]0,+\infty[\text{ sinon}\end{array}\right.$.

- $\underline{\alpha \geq 0}$:

On a un problème en $+\infty$.

Or on a : $\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\overset{t}{\sim}} t^{\alpha-2} > 0$ et $t \mapsto t^{\alpha-2} = \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ est intégrable si et seulement si $2-\alpha > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$.

On en déduit donc que si $0 \leq \alpha < 1$, alors l'intégrale $J_{12} = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ converge.

- $\underline{\alpha \leq 0}$:

On a un problème en $+\infty$ et en 0.
En $+\infty$, on a la même chose que précédemment, à savoir convergence si et seulement si $\alpha < 1$ ce qui est le cas.

En 0, on a : $\dfrac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\overset{t}{\sim}} t^\alpha > 0$ et cette fonction est intégrable si et seulement si $\alpha > -1$.

On en déduit donc que si $-1 < \alpha < 0$, alors l'intégrale $J_{12} = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ converge.

Finalement, on en conclut que l'intégrale $J_{12} = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ converge si et seulement si $-1 < \alpha < 1$.

13- $J_{13} = \int_0^1 \dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta} dx$

La fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta}$ est continue sur $]0;1]$, il y a donc un problème en 0.

On cherche un équivalent de cette fonction en 0, en fonction des paramètres :

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et on a $\ln\left(1+x^\alpha\right) \underset{0}{\overset{x}{\sim}} x^\alpha$, d'où $\dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta} \underset{0}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}} > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Si $\alpha = 0$, on a $\ln\left(1+x^\alpha\right) = \ln 2$, d'où $\dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta} \underset{0}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{\ln 2}{x^\beta} > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\beta < 1$.

Enfin, si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ et on a $\ln\left(1+x^\alpha\right) \underset{0}{\overset{x}{\sim}} \ln x^\alpha = \alpha \ln x$, d'où $\dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta} \underset{0}{\overset{x}{\sim}} \alpha \dfrac{\ln x}{x^\beta} > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\beta < 1$.

14- $J_{14} = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)} dt$

Il faut étudier la convergence en fonction de la valeur du paramètre α.

Tout d'abord, on a : $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

On a un problème en $+\infty$.

Or, on a : $\dfrac{1}{t^{\alpha}\left(1+t^{\beta}\right)} \underset{+\infty}{\overset{t}{\sim}} \dfrac{1}{t^{\alpha+\beta}} > 0$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha+\beta}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

On en déduit donc l'intégrale $J_{14}=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{\alpha}}{1+t^2}dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

15- $J_{15}=\int_0^1 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$

On a : $\int_0^1\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|dx \le \int_0^1 dx = 1$. Donc, J_{15} est absolument convergente.

On en déduit que l'intégrale $J_{15}=\int_0^1 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$ converge.

16- $J_{16}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$

La fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.

Il suffit donc d'étudier la convergence de $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$.

En intégrant par parties (hypothèses vérifiées), on a : $\int_1^b \dfrac{\sin x}{x}dx = \left[\dfrac{-\cos t}{t}\right]_1^b - \int_1^b \dfrac{\cos t}{t^2}dt$.

Comme $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{\cos b}{b}=0$, les intégrales $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos t}{t^2}dt$ sont de même nature.

Or, on a : $\left|\dfrac{\cos u}{u^2}\right| \le \dfrac{1}{u^2}$ sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos(u)}{u^2}du$ est convergente.

On en conclut que l'intégrale $J_{16}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ est convergente.

Exercice 20. 1- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(x+2)^2}dx$ est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive F sur $]0;+\infty[$ de la fonction $\dfrac{\ln x}{(x+2)^2}$.

3- Déterminer les limites de F(x) quand x tend vers 0^+ et vers $+\infty$. En déduire la valeur de I.

Corrigé : La fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(x+2)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a donc un problème en 0 et un en $+\infty$.

En $+\infty$, on a $x^{3/2}\dfrac{\ln x}{(x+2)^2} \underset{+\infty}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, donc d'après le critère de Riemann, on en déduit que la fonction est intégrable en $+\infty$.

En 0, on a $\dfrac{\ln x}{(x+2)^2} \underset{0}{\overset{x}{\sim}} \dfrac{1}{4}\ln x > 0$, et $x \mapsto \ln x$ est intégrable en 0 (appliquer le critère de Riemann).

Finalement, l'intégrale I est convergente.

2- Soit F la primitive de f qui vaut 0 en 1, on a donc : $F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{(t+2)^2}dt$.

On va faire une intégration par partie en posant : $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=\frac{1}{(t+2)^2}$, alors $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v(t)=-\frac{1}{(t+2)}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1.

On obtient : $\int_1^x \frac{\ln t}{(t+2)^2}dt=\left[-\frac{\ln t}{(t+2)}\right]_1^x-\int_1^x \frac{-1}{t(t+2)}dt=-\frac{\ln x}{(x+2)}+\int_1^x \frac{1}{t(t+2)}dt$.

Il est facile de vérifier que : $\frac{1}{t(t+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)$, on a donc :

$$\int_1^x \frac{1}{t(t+2)}dt=\frac{1}{2}\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^x\frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int_1^x\frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{2}[\ln t]_1^x-\frac{1}{2}[\ln(t+2)]_1^x$$

$$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln 3$$

Finalement, on obtient : $F(x)=-\frac{\ln x}{(x+2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln 3$

3- D'après la question précédente, $F(x)=-\frac{\ln x}{(x+2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln 3$.

D'une part, cela peut s'écrire $F(x)=-\frac{\ln x}{(x+2)}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}+\frac{1}{2}\ln 3$ et ainsi on a :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{2}\ln 3$$

D'autre part, on peut aussi écrire : $F(x)=\frac{x}{2(x+2)}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln 3$ et ainsi :

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{4}\ln x\right)-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln 3$$

F étant une primitive de f, on a :

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\lim_{x\to\infty}F(x)-\lim_{x\to 0^+}F(x)=\frac{1}{2}\ln 3-\left(-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln 3\right)=\frac{1}{2}\ln(2)$$

D'où finalement : $I=\frac{1}{2}\ln(2)$.

Chapitre 19

ESPACE VECTORIEL

0- Présentation historique

Grassmann Hermann Günther (allemand, 1809-1877) est professeur de mathématiques à Stettin (alors ville prussienne, en Poméranie, sur l'estuaire de l'Oder, aujourd'hui polonaise : Szczecin), physicien et linguiste (il étudia le sanskrit). Etudiant le phénomène des marées, il est amené à développer le calcul vectoriel. Ses travaux portent essentiellement sur le concept nouveau d'espaces vectoriels abstraits de dimension supérieure à 3. Il publia ses résultats en 1844 dans un traité intitulé « La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace » (complété en 1863). A la même époque l'irlandais **Hamilton** introduisait le concept moderne de vecteur.

On lui doit les premières notions :

- d'indépendance linéaire ;
- de somme de sous-espaces ;
- de produit linéaire, correspondant au produit scalaire actuel ;
- de produit extérieur, qui deviendra, en dimension 3, avec **Gibbs** et **Clifford**, notre produit vectoriel usuel ;
- l'important théorème des dimensions, qui porte son nom :

$$\mathrm{Dim}(F+G)=\mathrm{Dim}(F) + \mathrm{Dim}(G) - \mathrm{Dim}(F\cap G)$$

Mais c'est à **Peano** que reviendra le mérite de définir de façon axiomatique et plus claire le concept d'espace vectoriel sur un corps de scalaires.

1- Espace vectoriel

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E muni d'une loi interne + (c'est-à-dire une application de $E\times E$ dans E) et d'une loi externe $\times$ (c'est-à-dire une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E) vérifiant :

- (E,+) est un groupe commutatif
- $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ (k_1 + k_2) \times u = k_1 \times u + k_2 \times u$
- $\forall k \in \mathbb{K},\ \forall (u_1, u_2) \in E^2,\ k \times (u_1 + u_2) = k \times u_1 + k \times u_2$
- $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ k_1 \times (k_2 \times u) = (k_1 k_2) \times u$
- $\forall u \in E,\ 1 \times u = u$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**, et les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des suites ou l'ensemble des fonctions constituent un espace vectoriel. En fait, la définition ne servira que pour ces ensembles de base. D'autres critères sont ensuite utilisés pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

En ce qui concerne la règle « $1 \times u = u$ », il faut bien prendre conscience qu'elle ne va pas de soi. 1 est le neutre du produit de $\mathbb{K}$, il n'y a aucune raison pour qu'il adopte une attitude comparable en ce qui concerne le produit externe. C'est le seul résultat d'un produit par un scalaire qui est donné par les axiomes.

Il résulte des axiomes que :

a- $\forall u \in E,\ 0 \times u = 0_E$

où 0 est le neutre de $(\mathbb{K},+)$ et 0_E le neutre de (E,+).

b- $\forall k \in \mathbb{K},\ k \times 0_E = 0_E$

c- $(-1) \times u = -u$ où -1 est le symétrique de 1 dans $(\mathbb{K},+)$ et -u le symétrique de u dans (E,+).

d- $k \times u = 0_E \Rightarrow k = 0$ ou $u = 0_E$

Démonstration :

a- $1 \times u = u = (1+0) \times u = 1 \times u + 0 \times u = u + 0 \times u \Rightarrow u = u + 0 \times u \Rightarrow 0 \times u = 0_E$

b- $k \times 0_E = k \times (0 \times u) = (k.0) \times u = 0 \times u = 0_E$

c- $0_E = 0 \times u = [1 + (-1)] \times u = u + (-1) \times u \Rightarrow (-1) \times u = -u$

d- Si $k \times u = 0_E$ et si $k \neq 0$, alors $\frac{1}{k} \times (k \times u) = \frac{1}{k} \times 0_E \Rightarrow 1 \times u = 0_E \Rightarrow u = 0_E$.

2- Sous-espace vectoriel

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (muni des lois induites par celles de E).

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

1- F est non vide
2- F est stable pour la loi interne de E
3- F est stable pour la loi externe de E

Exemple :

Soit $E=\mathbb{R}^3$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Alors P défini par son équation cartésienne : 3x+2y+z=0, c'est-à-dire :

$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/3x+2y+z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

De même, D défini par $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$, c'est-à-dire $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y+2z=0 \ \wedge \ x-y-z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : L'**intersection** de 2 sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : La **réunion** de 2 sous-espaces vectoriels de E n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. (voir exercice).

3- Sous-espace vectoriel engendré

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le **sous-espace vectoriel engendré** par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
On le note Vect(A) (ou $\langle A\rangle$).

Remarque : $\text{Vect}(A)=\bigcap\limits_{\substack{F\text{ sev}\\ A\subset F}} F$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\ldots,x_n$ des éléments de E.
$\text{Vect}(\{x_1,\ldots,x_n\})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1,\ldots,x_n$.

$$\text{Vect}(\{x_1,\ldots,x_n\})=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \ \ / \ \ \forall i=1 \text{ à } n,\ \lambda_i\in\mathbb{K}\right\}$$

4- Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On pose $F+G=\{v_1+v_2/v_1\in F,\ v_2\in G\}$.

Théorème : Avec les notations ci-dessus, F+G est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : F+G est le **plus petit sous-espace vectoriel** de E contenant F et G :

$$F+G=\text{Vect}(F\cup G)$$

Définition : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
La somme F+G est dite **directe** si par définition $F\cap G=\{0_E\}$. On la note alors $F\oplus G$.

Théorème : La somme F+G est directe si et seulement si tout vecteur de F+G se décompose de **manière unique** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 1 :

$E=\mathbb{R}^3$. On pose i=(1,0,0), j=(0,1,0) et k=(0,0,1).Nous avons E=Vect({i,j,k}).

Soient F=Vect({i, j – i}) et G=Vect({k, j + k})

La somme n'est pas directe car :

$$-i+j+k=\underbrace{-i}_{\in F}+\underbrace{j+k}_{\in G}=\underbrace{-i+j}_{\in F}+\underbrace{k}_{\in G}$$

Exemple 2 :

$E=\mathbb{R}^3$. On pose i=(1,0,0), j=(0,1,0) et k=(0,0,1).Nous avons E=Vect({i,j,k}).

Soient F=Vect({i, j + k}) et G=Vect({j - k - i}).

La somme F+G est directe et $F\oplus G=\mathbb{R}^3$ car :

$$xi+yj+zk=\frac{1}{2}(2x+y-z)i+\frac{1}{2}(y+z)(j+k)+\frac{1}{2}(y-z)(j-k-i)$$

et il n'y a pas d'autre possibilité.

Remarque : Dans les 2 exemples précédents, il est plus facile de montrer que la somme est directe en déterminant $F\cap G$.

Définition : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. F et G sont **supplémentaires** si par définition $F\oplus G=E$.

5- Familles libres, familles liées

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\{v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E.
La famille $\{v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ est **libre** si par définition toute combinaison linéaire de ses vecteurs nulle a tous ces coefficients nuls.

$$\forall(\lambda_i)_{i=1\text{ à }p}\in\mathbb{K}^p,\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=0_E\Rightarrow\forall i=1\text{ à }p,\ \lambda_i=0$$

On dit alors que les vecteurs de cette famille sont **linéairement indépendants**.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.
On dit alors que les vecteurs de cette famille sont **linéairement dépendants**.

$$\exists(\lambda_i)_{i=1\text{ à }p}\in\mathbb{K}^p,\ (\lambda_i)_{i=1\text{ à }p}\neq(0,0,\ldots,0)\ \wedge\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=0_E$$

Remarque : Ne pas confondre *non tous nuls* et *tous non nuls*.

Propriétés :
1- Toute famille extraite d'une famille libre est une famille libre.
2- Toute famille contenant une famille liée est liée.
3- Toute famille contenant 0_E est liée.
4- Dans une famille liée, il existe (au moins) un vecteur qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

6- Familles génératrices

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\{v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. La famille $\{v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ est **génératrice** si par définition tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille.

$$\forall v \in E,\ \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p / v=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$$

Remarques : 1- La famille $\{v_1, v_2,\ldots,v_p\}$ est génératrice de E si et seulement si $E=\mathrm{Vect}(\{v_1,v_2,\ldots,v_p\})$.

2- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E avec $F=\mathrm{Vect}(\{u_1,u_2,\ldots,u_p\})$ et $G=\mathrm{Vect}(\{v_1,v_2,\ldots,v_q\})$.
Alors, $F+G=\mathrm{Vect}(\{u_1,u_2,\ldots,u_p,v_1,v_2,\ldots,v_q\})$.
Autrement dit, la réunion d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G est une famille génératrice de F+G.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.
Si E possède une famille génératrice finie, alors on peut extraire de cette famille une famille génératrice et libre.

7- Bases

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **base** de E est une famille libre et génératrice.

Applications : 1- Reprendre l'exemple du paragraphe 2 et déterminer une base de P et une base de D.

2- Soit $E=\mathbb{R}^3$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit F défini par $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 8x - y - z = 0 \end{cases}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base de F.

8- Dimension

Définition : Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, distinct de $\{0_E\}$, de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre d'élément. Ce nombre est la **dimension** de E, notée Dim(E).

Convention : $\mathrm{Dim}(\{0_E\})=0$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

- F est de dimension finie et $\mathrm{Dim}(F) \leq \mathrm{Dim}(E)$.

- Dim(F)=Dim(E) si et seulement si E=F.

9- Caractérisation d'une base en dimension finie

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1- Toute famille libre de E possède **au plus** n éléments
2- Toute famille génératrice de E possède **au moins** n éléments
3- Toute famille libre de E à n éléments est une base de E
4- Toute famille génératrice de E à n éléments est une base de E.

En pratique, les points 3 et 4 du théorème s'utilisent ainsi :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- $\mathcal{F}$ est une base de E
2- $\mathcal{F}$ est une famille libre de n vecteurs
3- $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de n vecteurs

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

$$\forall u \in E,\ \exists!(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n / u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$(x_1,\ldots,x_n)$ sont les **composantes** de u dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème de la base incomplète :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nul, de base $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$.
Soit $\mathcal{S}=\{u_1,\ldots,u_p\}$ une famille libre de p vecteurs. $(p \leq n)$.
$\mathcal{S}$ peut être complétée par (n-p) vecteurs de la base $\mathcal{B}$ pour former une base de E.

Exemple : Soit $E=\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). On considère les vecteurs $w_1(1, 2, 0, 0)$ et $w_2=(-1, 1, 0, 0)$. $\{w_1,w_2\}$ est un système libre.
Complétons le en une base de $\mathbb{R}^4$.
$\{w_1,w_2,e_1\}$ est lié.
$\{w_1,w_2,e_2\}$ est lié.
$\{w_1,w_2,e_3\}$ est libre.
$\{w_1,w_2,e_3,e_4\}$ est libre, donc est une base de $\mathbb{R}^4$.

Théorème Formule de Grassmann : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
Alors, $\mathrm{Dim}(F+G)=\mathrm{Dim}(F) + \mathrm{Dim}(G) - \mathrm{Dim}(F\cap G)$.

Preuve :

1- Si $F\cap G=\{0_E\}$:

Soit $(f_i)_{i=1 \text{ à } n}$ une base de F et $(g_j)_{j=1 \text{ à } m}$ une base de G.
Alors, $F+G=\mathrm{Vect}\{f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m\}$.
Montrons que $\{f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m\}$ est une famille libre.

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{m}\beta_i g_i = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i = -\sum_{i=1}^{m}\beta_i g_i \in F\cap G$. Donc, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i = -\sum_{i=1}^{m}\beta_i g_i = 0_E$.

On en déduit que pour i=1 à n, $\alpha_i=0$ et pour i=1 à m, $\beta_i=0$. D'où le résultat.

2- Si $F\cap G \neq \{0_E\}$:

Soit $(e_i)_{i=1 \text{ à } n}$ une base de $F\cap G$, complétée (cf. Théorème de la base incomplète) en une base $(e_1,\ldots,e_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q)$ de F et $(e_1,\ldots,e_n,\nu_1,\ldots,\nu_p)$ de G.

Soit H le sous-espace vectoriel de E de base $(\nu_1,\ldots,\nu_p)$.

Montrons que $F\cap H=\{0_E\}$ (afin d'utiliser 1-).

Soit u élément de $F\cap H$.

$\exists(\alpha_i)_{i=1 \text{ à } n} \in \mathbb{K}^n$ $\exists(\beta_i)_{i=1 \text{ à } q} \in \mathbb{K}^q$/ $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{q}\beta_i \varepsilon_i$ (1) et $\exists(\gamma_i)_{i=1 \text{à} p}$ / $u = \sum_{i=1}^{p}\gamma_i \nu_i$ (2).

Donc, u est élément de G (comme combinaison linéaire d'élément de G par exemple) et de F.

Donc, $\exists(\lambda_i)_{i=1\text{à}n} \in \mathbb{K}^n$: $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ (3).

En égalisant (1) et (3), on en déduit : $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \lambda_i)e_i + \sum_{i=1}^{q}\beta_i\varepsilon_i = 0_E$.

Comme $(e_1,\ldots,e_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q)$ est une base de F (donc libre), on a : pour tout i=1 à q, $\beta_i=0$.

(1) devient : $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ (4).

En égalisant (4) et (2), on en déduit : $\sum_{i=1}^{p}\gamma_i \nu_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i = 0_E$.

Comme $(e_1,\ldots,e_n,\nu_1,\ldots,\nu_p)$ est une base de G (donc libre), on a : pour tout i=1 à n, $\alpha_i=0$ et pour tout i=1 à p, $\gamma_i=0$.

Donc, $u=0_E$.

On obtient donc: Dim(F+H)=DimF + Dim H.

Or, F+H=F+G (famille génératrice égale).

Donc, Dim(F+G)=n+q+p=(n+q)+(p+n)-n=DimF + DimG – Dim($F\cap G$).

D'où le résultat.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- $E=F\oplus G$
2- E=F+G et Dim(E)=Dim(F) + Dim(G)
3- $F\cap G=\{0_E\}$ et Dim(E) = Dim(F) + Dim(G)

10- Rang d'une famille de vecteurs

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $\mathcal{F}=\{v_1,\ldots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E.

Le **rang** de $\mathcal{F}$ est la dimension de Vect($\{v_1,\ldots,v_p\}$).

Notation : rg($\mathcal{F}$).

Remarque : $rg(\mathcal{F}) \leq p$.

Propriété : $rg(\mathcal{F})=p$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.

Conséquence : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{F}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

$$rg(\mathcal{F})=n \text{ si et seulement si } \mathcal{F} \text{ est une base de E}$$

Méthode des zéros échelonnés

Propriétés :

1- $rg(\{v_1,\ldots,v_p\})=rg(\{\lambda_1 v_1,\ldots,v_p\})$ avec λ_1 élément de $\mathbb{K}^*$

2- $rg(\{v_1,\ldots,v_p\})=rg\left(\left\{v_1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i v_i,\ v_2,\ \ldots,\ v_p\right\}\right)$ avec $\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ éléments de $\mathbb{K}$

3- $rg(\{v_1,\ldots,v_p\})=rg(\{v_1,\ldots,v_p,0_E\})$

4- Le rang d'une famille de vecteurs ne dépend pas de l'ordre des vecteurs.

Applications :

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i,j,k).

1- Soient u=(0,1,1), v=(1,1,1), w=(-1,1,2) et n=(1,2,0).

Montrer que rg({u,v,w,n}) est 3. En déduire une base de E formée à l'aide des vecteurs u, v, w, n.

2- Soient a=(1,1,0), b=(1,2,1), c=(5,8,3) et d=(-1,-4,-3).

Soit F=vect({a,b,c,d}).

Déterminer une base de F formée à l'aide des vecteurs a,b,c,d.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les deux lois de composition suivantes :

$\forall\ ((x,y)\ ,(x',y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ (x,y)+(x',y')=(x+x'\ ,y+y')$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\qquad \lambda\bullet(x,y)=(\lambda^2x,\lambda^2y)$

$(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les deux lois de composition suivantes :

$\forall\ ((x,y),\ (x',y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\qquad \lambda\square(x,y)=(\lambda x,0)$

$(\mathbb{R}^2, +, \square)$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 3. Dans $E=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, on définit les deux lois de composition suivantes :

$\forall\ ((x,y),\ (x',y'))\in E^2,\ (x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\qquad \lambda\square(x,y)=(x^\lambda,\lambda y)$

$(E, \oplus, \square)$ est-il un espace vectoriel réel ?

Exercice 4. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, .)$?

1- $F_1=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=0\}$

2- $F_2=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x<0\}$

3- $F_3=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=1\}$

4- $F_4=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y \text{ et } y=2z\}$.

Exercice 5. Les sous -ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1- $F_1=\{\ P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P(0)=0\}$

2- $F_2=\{\ P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P=0 \text{ ou } \deg(P)\leq\ 2\}$

3- $F_3=\{\ P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P(0)=P(1)\}$

4- $F_4=\{\ P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P+P'=1\}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $V=(1,2,3)$ appartient-il au sous-espace vectoriel F_1 engendré par : $V_1=(0,1,0)$ et $V_2=(1,1,1)$?
Même question avec F_2 engendré par $V_3=(-1,-1,0)$ et $V_4=(0,1,3)$?

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $F_1=\{(x,x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$ et $F_2=\{(x,-x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes suivants sont-ils libres ? générateurs de $\mathbb{R}^3$? des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$S_1 = \{(1,0,0)\ (0,1,0)\},\ S_2 = \{(0,0,0)\ ;\ (1,0,0)\ ;\ (0,1,0)\ ;\ (0,0,1)\},\ S_3 = \{(1,2,3)\},$$
$$S_4 = \{(1,1,0)\ ;\ (0,1,1)\ ;\ (1,0,1)\}.$$

Exercice 9. Dans $\mathcal{F}$ ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les systèmes suivants sont-ils libres ou liés ?

$$F_1 = \{\cos, \sin\},\ F_2 = \left\{\exp, \frac{1}{\exp}\right\},\ F_3 = \left\{\exp, \frac{1}{\exp}, \text{ ch}\right\}$$

Exercice 10. 1- Déterminer $\dim(\mathbb{R}_4[X])$.

2- Déterminer $\dim(E)$ avec $E = \{a\cos + b\sin \ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = y = 2z\}$.

EXERCICES

Exercice 1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $\oplus$ et $\circ$ définies ci-dessous est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

1. $(x\,;\,y) \oplus (x'\,;\,y') = (y + y'\,;\,x + x')$ et $\alpha \circ (x\,;\,y) = (\alpha y\,;\,\alpha x)$.
2. $(x\,;\,y) \oplus (x'\,;\,y') = (x + x'\,;\,y + y')$ et $\alpha \circ (x\,;\,y) = (\alpha x\,;\,\alpha y)$.
3. $(x\,;\,y) \oplus (x'\,;\,y') = (x + x'\,;\,y + y')$ et $\alpha \circ (x\,;\,y) = (\alpha x\,;\,0)$.

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous espaces vectoriels ?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 0\}$ $\quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 1\}$ $\quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ $\quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$ $\quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\}$

Exercice 3. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}[X]$ suivants, préciser ceux qui en sont des sous-espaces vectoriels :

$G_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = 3\}$ $\quad G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 3\} \cup \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

$G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = P(1) = 0\}$ $\quad G_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(2) = 2P(1)\}$

Exercice 4. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet que $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Indiquer les sous-ensembles de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ci-dessous qui sont des sous-espaces vectoriels.

$F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ $\quad F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$

$F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$ $\quad F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$

Exercice 5.

Les sous-ensembles suivants de l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$?

$F_1 = \{ f \in \mathcal{F} / f(1) + f(-1) = 0 \}$

$F_2 = \{ f \in \mathcal{F} / f(1) + f(-1) = 1 \}$

$F_3 = \{ f \in \mathcal{F} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x) \}$

$F_4 = \{ f \in \mathcal{F} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x-1) = f(x) - f(1) \}$

Exercice 6. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$$E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(1) = 1\}$$

$$F = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(1) = 0\}$$
$$G = \{f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R} \;/\; \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ f(x) = \alpha e^x + \beta \ln(x)\}$$

Exercice 7. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E donné.

a- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $F = F_1 \cup F_2$ soit un sous-espace vectoriel de E.

b- Dans le cas général, montrer que $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F.

Exercice 8. E_1, E_2, E_3 sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que : $(E_1 \subset E_3) \Rightarrow [E_1 + (E_2 \cap E_3) = (E_1 + E_2) \cap E_3]$.

Exercice 9. E_1, E_2, E_3 sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E vérifiant :
$$E_1 + E_3 = E_2 + E_3 ; E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 ; E_1 \subset E_2$$
Montrer que $E_1 = E_2$.

Eléments de réponse :
Il suffit de montrer que E_2 est inclus dans E_1.
Soit x un élément de E_2.
Donc, x est élément de E_2+E_3.
Donc, x est élément de E_1+E_3.
Il existe alors x_1 élément de E_1 et x_3 élément de E_3 tels que $x=x_1+x_3$.
Comme x_1 est élément de E_1, il est élément de E_2.
Donc, $x_3=x-x_1$ est élément de E_2.
De plus, x_3 est élément de $E_2 \cap E_3$, donc de $E_1 \cap E_3$.
Donc, x_3 est élément de E_1.
Comme $x=x_1+x_3$, x est élément de E_1.
D'où le résultat.

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

a- $\{3, 5\}$ est-elle une famille libre ? génératrice ?

b- $\{1, \sqrt{2}\}$ est-elle une famille libre ? génératrice ?

c- $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est-elle une famille libre ?

Exercice 11. Parmi les familles suivantes d'éléments de E, préciser celles qui sont libres, génératrices, bases :

1. $E = \mathbb{R}^2$ — $A = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ — $B = \{1,(X-2),(X-3)^2,(X-4)^3\}$
3. $E = C^\infty(\mathbb{R})$ — $C = \{f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \cos(2x), f_3 : x \mapsto \cos(3x)\}$

Exercice 12. Soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1- Démontrer que si les vecteurs v_1 et v_2 de E sont linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs $v_1 + v_2$ et $v_1 - v_2$.

2- Démontrer que si les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants, il en est de même de $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 - v_2 + v_3$ et $v_1 + v_2 - v_3$.

3- Soit $E=\mathbb{C}_3[X]$. Montrer que $\{1, X - 1, X^3 + X^2 - 1, (X^2 - 1)(X - 1)\}$ est une base de E.

Exercice 13. $\mathbb{C}$ étant considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et z étant un élément de $\mathbb{C}$, à quelle condition $(z,\overline{z})$ est-elle une base de $\mathbb{C}$?

Ecrire $u = x + iy$ (avec x et y réels) dans une telle base (avec $z = \alpha + i\beta$).

Exercice 14. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,1,1) ;\ v_2 = (-1,2,3) ;\ v_3 = (7,-8,-13)$$

1- Déterminer le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$. Donner une combinaison linéaire nulle, à coefficients non tous nuls, de ces vecteurs.

2- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1,v_2,v_3\}$. Déterminer une base de F.

3- Soit $G = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x - 4y + 3z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de G.

4- Montrer que F et G sont égaux.

Exercice 15. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sont trois réels distincts 2 à 2, la famille des applications $x \mapsto e^{\lambda_1 x}$, $x \mapsto e^{\lambda_2 x}$, $x \mapsto e^{\lambda_3 x}$ est libre.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs :

a=(1,2,0,1), b=(2,1,3,1), c=(2,4,0,2), t=(1,2,1,0), u=(-1,1,1,1), v=(2,-1,0,1), w=(2,2,2,2)

F est le sous-espace engendré par a, b et c. G est le sous-espace engendré par t, u, v et w.

Trouver une base de F, une base de G, une base de F+G et une base de $F\cap G$.

Exercice 17. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère :

$V_1 = (1,2,0,1)$; $V_2 = (1,0,2,1)$; $V_3 = (2,0,4,2)$; $W_1 = (1,2,1,0)$; $W_2 = (-1,1,1,1)$

$W_3 = (2,-1,0,1)$; $W_4 = (2,2,2,2)$.

1- Démontrer que les familles suivantes sont libres: $\{V_1,V_2\}$; $\{W_1,W_2,W_3\}$; $\{V_1,V_2,W_1,W_2\}$.

2- Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{V_1,V_2,V_3\}$.

a- Déterminer une base de E.

b- Déterminer un supplémentaire de E.

3- Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{W_1,W_2,W_3,W_4\}$. Déterminer une base de F.

4- Déterminer E + F.

5- a- Montrer que $V_1 + V_2 \in E\cap F$.

b- Déterminer une base de $E \cap F$.

Exercice 18. Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y+z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x-y=0 \wedge x+z=0\}$.

1- F et G sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

2- Sont-ils des sous espaces vectoriels supplémentaires ?

Exercice 19.

1- Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E_1 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ a = 2b-c \text{ et } d = a+b+c\}$$

2- On note $E_2 = \text{Vect}\{(3,1,0,3),(-1,1,1,0)\}$.

Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ déterminé par :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel. Quelle est la dimension de E ? Déterminer une base de E.

Exercice 21. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout entier n, le degré de P_n est n. Montrer que pour tout entier n, $\{P_i\}_{i=0 \text{ à } n}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 22.

1- Démontrer que la famille $\mathcal{B} = ((0,1,2),(-1,0,1),(3,2,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2- Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (0,2,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (0,2,1)$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 23. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (n+1) réels deux à deux distincts ($n \in \mathbb{N}^*$).

On pose pour k entier compris entre 0 et n : $P_k = \prod_{\substack{i=0 \text{ à } n \\ i \neq k}} (X - \alpha_i)$.

a- Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b- Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

Exercice 24. E est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a- Soit $G = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.\sin(x).\cos(x)\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension.

b- Soit $H = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a.\cos(2x) + b.\sin(2x) + c.\sin(2x).\cos(2x)\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension.

Quelle est la dimension de $(G \cap H)$?

c- Déterminer la dimension, puis une base de $(G + H)$.

Exercice 25. E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des suites de nombres complexes.

Soient p et q deux nombres complexes non simultanément nuls. On appelle S l'ensemble des suites $(u_n)_n$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + p.u_{n+1} + q.u_n = 0$$

a- Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.

b- Si $p^2 - 4q \neq 0$, trouver deux suites de S linéairement indépendantes dont le terme général est de la forme s^n . Pour $(u_n)_n$ élément de S, exprimer u_n en fonction de u_0, u_1, p, q, n.

c- Si $p^2-4q = 0$, il existe une seule suite non nulle de S de terme général de la forme s^n. Déterminer s. Montrer que les suites v et w de terme général s^n et ns^n sont éléments de S. Déterminer une base de S et donnez la forme générale d'un élément de S.

Exercice 26. Déterminer le rang de la famille $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^5$ rapporté à sa base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ avec :

$$\begin{cases} a_1 = 2e_1 + 3e_2 - 3e_3 + 4e_4 + 2e_5 \\ a_2 = 3e_1 + 6e_2 - 2e_3 + 5e_4 + 9e_5 \\ a_3 = 7e_1 + 18e_2 - 2e_3 + 7e_4 + 7e_5 \\ a_4 = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3 + 3e_4 + e_5 \end{cases}$$

Exercice 27. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, vérifier que les vecteurs :

$$a = (1,2,-1,-2)\ ;\ b = (2,3,0,-1)\ ;\ c = (1,3,-1,0)\ ;\ d = (1,2,1,4)$$

forment une famille libre. En déduire que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer les coordonnées du vecteur u, de coordonnées (7,14,-1,2) dans la base canonique, dans la base (a,b,c,d).

Exercice 28. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, on considère les vecteurs suivants :

$V_1 = (0,1,0,1)$; $V_2 = (1,0,1,0)$; $V_3 = (2,0,-1,1)$; $V_4 = (-3,3,3,1)$; $V_5 = (7,-4,-2,-1)$.

a- Déterminer le rang de la famille $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$.

b- Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = a \\ x_1 + 3x_4 - 4x_5 = 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs du paramètre réel a, ce système a-t-il des solutions ?

Quelques exercices corrigés

Exercice 29.

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit une loi d'addition et une loi de multiplication par un réel de la façon suivante :

$$(a\ ;\ b) + (c\ ;\ d) = (a + c\ ;\ b + d) \text{ et } \lambda.(a\ ;\ b) = (\lambda^2 a\ ;\ \lambda^2 b)$$

A-t-on une structure de $\mathbb{R}$–espace vectoriel ?

Corrigé : Rappelons tout d'abord la définition d'un espace vectoriel :
(E ;+ ;.) est un K-espace vectoriel si et seulement si, on a :

$(E,+)$ groupe commutatif (1)

$\cdot : K\times E \to E\ (2)$

$$\forall(\lambda,\mu,x,y)\in K^2\times E^2\ \begin{cases}(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x\,(3)\\ \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y\,(4)\\ (\lambda.\mu).x=\lambda.(\mu.x)\,(5)\\ 1.x=x\,(6)\end{cases}$$

Pour démontrer qu'un ensemble est un K-espace vectoriel, il faut évidemment vérifier toutes les propriétés. Par contre, pour démontrer que l'on n'a pas un K-espace vectoriel, il suffit de démontrer que l'une des propriétés n'est pas vérifiée. En particulier, il suffit même de donner un contre exemple.

D'autre part, pour montrer que l'on a un sous K-espace vectoriel, il suffit de vérifier que l'espace est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :

$(F,+,.)$ sous Kev de $(E,+,.) \Leftrightarrow \forall(\lambda,x,y)\in K\times F^2\ \lambda.x+y\in F$

Dans la suite, si on ne le précise pas, λ et μ seront des éléments de K.

Dans l'exercice :

Prenons $\lambda=2$ et $\mu=1$.

Alors on a $(\lambda+\mu)(a,b)=3(a,b)=(9a,9b)$ et

$\lambda(a,b)+\mu(a,b)=2(a,b)+1(a,b)=(4a,4b)+(a,b)=(5a,5b)$.

Il est donc clair que (3) n'est pas vérifiée, et ainsi que l'on n'a pas une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 30.

Soit $E = \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$.

On définit une addition dans E et une loi de multiplication par un réel de la façon suivante :

$$(a\ ;\ b) + (c\ ;\ d) = (ac\ ;\ b + d) \qquad \text{et} \qquad \lambda\,(a\ ;\ b) = (a^{\lambda}\ ;\ \lambda\, b)$$

A-t-on une structure de $\mathbb{R}$–espace vectoriel ?

Corrigé : Vérifions tout d'abord que $(E,+)$ est un groupe commutatif.

Commençons par chercher l'élément neutre noté e :

Par définition de l'élément neutre, on a $\forall\alpha=(a,b)\in E\ e+\alpha=\alpha$.

Donc cela nous donne $(e_1,e_2)+(a,b)=(a,b)\Leftrightarrow(e_1a,e_2+b)=(a,b)\Leftrightarrow e=(1,0)$.

Soit alors $\alpha=(a,b)\in E$, il est clair que $\beta=\left(\frac{1}{a},-b\right)\in E$ est l'inverse de $\alpha=(a,b)\in E$ pour la loi +.

En effet, on a $\alpha+\beta=(a,b)+\left(\frac{1}{a},-b\right)=\left(\frac{a}{a},b-b\right)=e$.

Enfin il est clair que $\forall(\alpha,\beta)\in E^2,\ \alpha+\beta\in E$.

La commutativité découle de la commutativité du produit et de l'addition dans $\mathbb{R}$.

(1) est donc vérifiée.

(2) est elle aussi clairement vérifiée.

Les propriétés restantes ne sont pas immédiates mais de rapides calculs nous montre qu'elles sont aussi vraies et qu'ainsi on a bien une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$(\lambda+\mu).x=(\lambda+\mu).(x_1,x_2)=\left(x_1^{\lambda+\mu},(\lambda+\mu)x_2\right)=\left(x_1^{\lambda}x_1^{\mu},\lambda x_2+\mu x_2\right)=\left(x_1^{\lambda},\lambda x_2\right)+\left(x_1^{\mu},\mu x_2\right)=\lambda x+\mu x$$

$$\lambda.(x+y)=\lambda.(x_1y_1,x_2+y_2)=\left((x_1y_1)^{\lambda},\lambda(x_2+y_2)\right)=\left(x_1^{\lambda}y_1^{\lambda},\lambda x_2+\lambda y_2\right)=\left(x_1^{\lambda},\lambda x_2\right)+\left(y_1^{\lambda},\lambda y_2\right)=\lambda x+\lambda y$$

$$(\lambda.\mu).x=\left(x_1^{\lambda.\mu},(\lambda.\mu)x_2\right)=\left(\left(x_1^{\mu}\right)^{\lambda},\lambda(\mu x_2)\right)=\lambda.\left(x_1^{\mu},\mu x_2\right)=\lambda.(\mu x)$$

$$1.x=\left(x_1^{1},1x_2\right)=x$$

Exercice 31.

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}[X]$ suivants, préciser ceux qui en sont des sous-espaces vectoriels :

$A=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(0)=1\}$ $\qquad$ $B=\{P\in\mathbb{R}[X],\ \deg(P)\geq 8\}$

$C=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P+P'+P''=0\}$ $\qquad$ $D=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(1)=P(2)\}$

Corrigé : Tout d'abord remarquons que $\forall(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}[X])^2,\ \lambda P+Q\in\mathbb{R}[X]$.

- Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times A^2$. Alors $(\lambda P+Q)(0)=\lambda P(0)+Q(0)=\lambda+1$

Or pour $\lambda=2$, $(\lambda P+Q)(0)=3\neq 1$ donc A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $\left(\lambda=1,P=X^8,Q=-X^8\right)\in\mathbb{R}\times B^2$. Alors $\lambda P+Q$ est le polynôme nul donc $(\lambda P+Q)\notin B$, donc B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times C^2$. Alors

$$(\lambda P+Q)+(\lambda P+Q)'+(\lambda P+Q)''=\lambda P+\lambda P'+\lambda P''+Q+Q'+Q''=\lambda(P+P'+P'')=0.$$

Donc C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times D^2$. Alors $(\lambda P+Q)(1)=\lambda P(1)+Q(1)=\lambda P(2)+Q(2)=(\lambda P+Q)(2)$.

Donc D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 32.

1- Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, déterminer ceux qui en sont des sous-espaces vectoriels :

$P_1 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3, z = 0)\}$ $P_2 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3, z = 1)\}$

$P_3 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3, x - y \geq 0)\}$ $P_4 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3, x = 0)\}$

2- Déterminer $P_1 \cup P_4$, $P_1 \cap P_4$, $P_1 + P_4$, un supplémentaire de P_1 dans $\mathbb{R}^3$, un supplémentaire de $P_1 \cap P_4$ dans P_1, puis dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé : 1-

- Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in P_1$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in P_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

$\lambda\alpha + \beta = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, 0) + (\beta_1, \beta_2, 0) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, 0) + (\beta_1, \beta_2, 0) = (\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, 0) \in P_1$.

Donc P_1 est un sous-espace vectoriel.

- Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in P_2$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in P_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$\lambda\alpha + \beta = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, 1) + (\beta_1, \beta_2, 1) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda) + (\beta_1, \beta_2, 1) = (\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \lambda + 1)$.

Or pour $\lambda = -1$, $(\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \lambda + 1) \notin P_2$ et P_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.

- Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in P_3$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in P_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$\lambda\alpha + \beta = (\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \lambda\alpha_3 + \beta_3)$.

Or, $\lambda\alpha_1 + \beta_1 - (\lambda\alpha_2 + \beta_2) = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)$.

Prenons alors : $\alpha = (2,1,0) \in P_3$, $\beta = (1,1,0) \in P_3$ et $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$.

On obtiens $\lambda\alpha_1 + \beta_1 - (\lambda\alpha_2 + \beta_2) = -1 < 0$ et ainsi $\lambda\alpha + \beta \notin P_3$.

Donc P_3 n'est pas un sous-espace vectoriel.

- Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in P_4$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in P_4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$\lambda\alpha + \beta = \lambda(0, \alpha_2, \alpha_3) + (0, \beta_2, \beta_3) = (0, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) + (0, \beta_2, \beta_3) = (0, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \lambda\alpha_3 + \beta_3) \in P_4$.

Donc P_4 est un sous-espace vectoriel.

2- On a

$P_4 \bigcup P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=0 \vee z=0\}$

$P_4 \bigcap P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=0 \wedge y=0\} = \{(0,y,0) / y \in \mathbb{R}\}$.

Et de plus,

$P_4 + P_1 = \{X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \exists A \in P_1,\ \exists B \in P_4,\ X=A+B\}$

$= \{(a_1, a_2 + b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 / (a_1, a_2, 0) \in P_1,\ (0, b_2, b_3) \in P_4\}$

$= \{(a_1, a_2 + b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 / (a_1, a_2, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}^3$.

Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x=0 \wedge y=0\} = \{(0,0,z)\}$.

Alors $K \bigcap P_1 = \{(0,0,0)\}$ et

K+P_1={ $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\exists A\in P_1,\ \exists B\in X$,
X=A+B}={ $(a_1,a_2,b_3)\in\mathbb{R}^3/(a_1,a_2,0)\in P_1,\ (0,0,b_3)\in X$ }=$\mathbb{R}^3$.

On en déduit que K est un supplémentaire de P_1 dans $\mathbb{R}^3$.

On a vu que $P_4\bigcap P_1=\{(0,y,0)\in\mathbb{R}^3\}$.
Soit E={ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ y=0\wedge z=0$ }=$\{(x,0,0)\}$.
Alors $E\bigcap P_4\bigcap P_1=\{(0,0,0)\}$ et
$E+P_4\bigcap P_1$={ $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\exists A\in P_4\bigcap P_1,\ \exists B\in E$, X=A+B}
={ $(b_1,a_2,0)\in\mathbb{R}^3/(0,a_2,0)\in P_4\bigcap P,\ (b_1,0,0)\in E$ }={ $(x,y,0)\in\mathbb{R}^3$}=P_1.

On en déduit donc que E est un supplémentaire de $P_4\bigcap P_1$ dans P_1.

Enfin, soit F={ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$/y=0}.
On vérifie facilement que F est un supplémentaire de $P_4\bigcap P_1$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 33.
Soit $E=\mathbb{R}^3$. On considère : $E_1=\{(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3\ /\ a=b=c\}$ et $E_2=\{(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3\ /\ a=0\}$.
Montrer que : $E=E_1\oplus E_2$.

Corrigé : On commence par vérifier que E_1 et E_2 sont bien des sous-espaces vectoriels de E.
Soient $A=(a,a,a)\in E_1$, $B=(b,b,b)\in E_1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a :
$\lambda A+B=\lambda(a,a,a)+(b,b,b)=(\lambda a+b,\lambda a+b,\lambda a+b)\in E_1$, donc E_1 est un sous-espace vectoriel.
De même, soient $A=(0,a_1,a_2)\in E_2$, $B=(0,b_1,b_2)\in E_2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a :
$\lambda A+B=\lambda(0,a_1,a_2)+(0,b_1,b_2)=(0,\lambda a_1+b_1,\lambda a_2+b_2)\in E_2$, donc E_2 est un sous-espace vectoriel.

Maintenant, on démontre que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
Tout d'abord, on a :
$E_1\bigcap E_2=\{(a,b,c)/a=b=c \text{ et } a=0\}=\{(a,b,c)/a=b=c=0\}=\{(0,0,0)\}$.
D'autre part,
$E_1+E_2=\{X=(x,y,z)/X=A+B \text{ avec } A\in E_1,\ B\in E_2\}$
={ $(a,a+b_2,a+b_3)\in\mathbb{R}^3/(a,a,a)\in E_1,\ (0,b_2,b_3)\in E_2$ }
={ $(a,a+b_2,a+b_3)\in\mathbb{R}^3/(a,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$}.
Il y a essentiellement deux méthodes pour montrer que $E_1+E_2=\mathbb{R}^3$.
La première solution consiste à vérifier que le changement de variable suivant est bijectif, c'est-à-dire à vérifier que l'on peut exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles de manière unique et réciproquement :

$$\begin{cases} x = a \\ y = a + b_2 \\ z = a + b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b_2 = y - x \\ b_3 = z - x \end{cases}$$

Cela revient à montrer directement que $\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$.

La seconde solution consiste à écrire cette somme sous la forme d'un espace vectoriel engendré par trois vecteurs libres : $E_1 + E_2 = \text{Vect}\left((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\right)$.

Finalement, on en conclut que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 34.

Parmi les familles suivantes d'éléments de E, préciser celles qui sont libres, génératrices, bases :

1- $E = \mathbb{R}^3$

$A = \{(1 ; 0 ; 1) ; (-1 ; 1 ; 2) ; (-2 ; 1 ; 2)\}$

$B = \{(1 ; 0 ; 1) ; (2 ; 0 ; 3) ; (-1 ; 1 ; 1) ; (0 ; 0 ; 1)\}$

2- $E = \mathbb{R}_2[X]$

$C = \{1 ; X - \alpha ; (X - \alpha)^2\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$D = \{X^2 + 3X - 1 ; X^2 - X + 5 ; -7X^2 + 9X - 17\}$

3- $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$F = \{f_1 : x \mapsto x^2 ; f_2 : x \mapsto e^x ; f_3 : x \mapsto \sin x\}$

Corrigé : 1- Soient α, β, γ tels que :

$$\alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-2,1,2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre.

$\mathbb{R}^3$ étant un espace vectoriel de dimension 3, on en déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc en particulier, elle est génératrice.

$\mathbb{R}^3$ étant un espace vectoriel de dimension 3, il ne peut pas exister quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ libres. Donc la famille B est liée.

Il est facile de vérifier que la famille $B' = \left((1,0,1),(2,0,3),(0,0,1)\right)$ est libre donc c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Mais on a $\text{Vect}(B') \subset \text{Vect}(B) \subset \mathbb{R}^3$ donc B est une famille génératrice.

2- Soient a,b,c tels Soit a,b,c tels que :

$a + b(X - \alpha) + c(X - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow a - \alpha b + \alpha^2 c + (b - 2c\alpha)X + cX^2 = 0$.

Par identification, cela implique que $a = b = c = 0$ donc la famille est libre.

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, on en déduit que C est une base de E et donc que cette famille est génératrice.

Soient a, b, c tels que $a\left(X^2 + 3X - 1\right) + b\left(X^2 - X + 5\right) + c\left(-7X^2 + 9X - 17\right) = 0$.

Cela est équivalent à :

$(a+b-7c)X^2+(3a-b+9c)X-a+5b-17c=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b-7c)=0\\(3a-b+9c)=0\\-a+5b-17c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-b+7c\\-3b+21c-b+9c=0\\b-7c+5b-17c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-b+7c\\-4b+30c=0\\6b-24c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-b+7c\\-4b+30c=0\\b=4c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

On en déduit que la famille D est libre.
Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, on en déduit que D est une base de E et donc que cette famille est génératrice.

3- Soient a, b, c tels que $af_1+bf_2+cf_3=0$.
Cela signifie que pour tout x réel, on a $ax^2+be^x+c\sin x=0$.
Pour déterminer les valeurs de a, b et c, on doit obtenir au moins trois équations non liées (si cela est possible !) à partir de la relation $ax^2+be^x+c\sin x=0$. Pour cela la méthode la plus simple consiste à choisir des valeurs particulières pour x mais on peut aussi dans certains cas « dériver » la relation afin d'obtenir des équations plus simples.
Par exemple ici, dérivons une première fois la relation, on obtient : $2ax+be^x+c\cos x=0\ (1)$.
Si on dérive une nouvelle fois, on récupère : $2a+be^x-c\sin x=0\ (2)$.
Si on dérive une troisième fois cela nous donne : $be^x-c\cos x=0\ (3)$.
Prenons alors x=0 dans les trois équations précédentes, on obtient le système :

$$\begin{cases}b+c=0\ (1)\\2a+b=0\ (2)\\b-c=0\ (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

On en déduit donc que cette famille est libre.
Ici, ce n'est pas la méthode la plus simple mais il faut la retenir car elle peut s'avérer utile dans certains cas.
On repart de la relation initiale : $ax^2+be^x+c\sin x=0$.
En prenant $x=0$, on récupère $b=0$, puis $x=\pi$, nous donne $c=0$, et enfin $x=\frac{\pi}{2}$, nous donne $a=0$.
Par contre, il faut encore étudier le caractère générateur de cette famille. Ici, on voit facilement que cette dernière n'est pas génératrice. En effet, si cela était le cas notre espace serait de dimension 3 mais on sait que E = $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de E de dimension infinie et donc la famille ne peut pas être génératrice.

Exercice 35.
Calculer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^4$:
1- $u_1 = (1 ; 2 ; -4 ; 3)$; $u_2 = (2 ; 5 ; -3 ; 4)$; $u_3 = (6 ; 17 ; -7 ; 10)$; $u_4 = (1 ; 3 ; -3 ; 2)$
2- $u_1 = (1 ; 2 ; 6 ; -1)$; $u_2 = (3 ; 6 ; 5 ; -6)$; $u_3 = (2 ; 4 ; -1 ; -2)$
3- $u_1 = (a ; 1 ; 1 ; 0)$; $u_2 = (1 ; a ; 1 ; 0)$; $u_3 = (1 ; 1 ; a ; 0)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Corrigé : 1-

$$\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&2&6&1\\2&5&17&3\\-4&-3&-7&-3\\3&4&10&2\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&0&0&0\\2&1&5&1\\-3&5&17&1\\4&-2&-8&-1\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-3&5&-8&-4\\4&-2&2&1\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-3&5&-8&0\\4&-2&2&0\end{Bmatrix}$$

Donc la famille est de rang 3.

$$2\text{- }\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&3&2\\2&6&4\\6&5&-1\\-1&-6&-2\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-13&-13\\-1&-3&0\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-13&0\\-1&-3&3\end{Bmatrix}$$

Donc la famille est de rang 3.

$$3-\ \mathrm{rg}\begin{Bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\\0&0&0\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{Bmatrix}\underset{C_i\leftarrow aC_i-C_1}{=}\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\1&a^2-1&a-1\\1&a-1&a^2-1\end{Bmatrix}$$

$$\underset{C_3\leftarrow(a+1)C_i-C_2}{=}\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\1&a^2-1&0\\1&a-1&\left(a^2-1\right)\left(a+1\right)-\left(a-1\right)\end{Bmatrix}$$

$$=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\1&a^2-1&0\\1&a-1&a\left(a-1\right)\left(a+2\right)\end{Bmatrix}$$

Remarquons que le calcul précédent est valable uniquement si d'une part $a\neq 0\left(C_i\leftarrow aC_i-C_1\right)$, et d'autre part si $a\neq -1\left(C_3\leftarrow\left(a+1\right)C_3-C_2\right)$.

On doit donc distinguer différents cas en fonction de la valeur de a :

- a=0 :

$$\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{Bmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2-C_1}{=}\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\\0&1&1\end{Bmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3+C_2}{=}\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&-1&0\\0&1&2\end{Bmatrix}$$

On en déduit que la famille est de rang 3.

- a=-1 :

$$\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\\0&0&0\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\1&a^2-1&a-1\\1&a-1&a^2-1\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\1&0&-2\\1&-2&0\end{Bmatrix}=\mathrm{rg}\begin{Bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\1&-2&0\\1&0&-2\end{Bmatrix}$$

On en déduit que la famille est aussi de rang 3.

- $a\notin\{0,-1\}$:

Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}a\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\a\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}0\\a\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\a^2-1\\a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\a(a-1)(a+2)\end{pmatrix}\right\}$$

On doit donc résoudre : $a(a-1)(a+2)=0$, et $a^2-1=0$.

$a(a-1)(a+2)=0 \Leftrightarrow a\in\{0,1,-2\}$, et $a^2-1=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,1\}$.

Il nous reste donc à traiter les cas $a=1$ et $a=-2$.

- Si $a=1$, on a :

$$\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}a\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\a\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Donc la famille est de rang 1.

- Si $a=-2$, on a :

$$\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}a\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\a\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{rg}\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\3\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Donc la famille est de rang 2.

Dans tous les autre cas, la famille est de rang 3.

Chapitre 20

APPLICATIONS LINEAIRES

0- Présentation historique

Cayley Arthur (anglais, 1821-1895) est avocat d'origine. Il sera professeur de mathématiques à l'université de Cambridge et membre de la Royal Society of London (l'Académie des Sciences anglaise) auprès de laquelle il publiera grand nombre de ses travaux notamment sur les géométries non euclidiennes.

Mais l'oeuvre maîtresse de Cayley sera le développement (dès 1843) d'une nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre linéaire et ses transformations, nées de l'étude des systèmes d'équations linéaires.

1- Applications linéaires

Définition : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application f de E dans F est dite **linéaire** si par définition elle vérifie les deux conditions suivantes :

1- $\forall(u,v)\in E^2,\ f(u+v)=f(u)+f(v)$ (où + est la loi interne)

2- $\forall k\in\mathbb{K},\ \forall u\in E,\ f(k.u)=k.f(u)$ (où . désigne la loi externe).

Notation : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarque : Une application linéaire est aussi appelée morphisme d'espaces vectoriels.

Cas particuliers :
- Lorsque f est bijectif, f est un **isomorphisme** de E dans F.
- Lorsque E = F, f est un **endomorphisme**.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté End(E) ou $\mathcal{L}(E)$.
- Lorsque E = F et f est bijectif, f est un **automorphisme** de E.
- Lorsque F = $\mathbb{K}$, f est une **forme linéaire**.

Propriétés : Soit f une application linéaire de E dans F.

1- $f(0_E)=0_F$

2- $\forall(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{K}^n,\ \forall(u_1,\dots,u_n)\in E^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n}k_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_if(u_i)$

2- Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Théorème : Soit f un élément de $\mathscr{L}$(E,F) et soit G un sous-espace vectoriel de E.
Alors, $f(G)=\{f(u)/u\in G\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Définition : Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et H une partie de F.
L'image réciproque de H par f est $f^{-1}(H)=\{x\in E/f(x)\in H\}$.

Théorème : Soient f un élément de $\mathscr{L}$(E,F) et H un sous-espace vectoriel de F.
Alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3- Image et noyau d'une application linéaire

Définition : Soit f un élément de $\mathscr{L}$(E,F). **L'image de f** est par définition f(E). On la note Im(f).

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(u)/u\in E\}$$

Théorème : Avec les notations ci-dessus, Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.

Définition : Soit f un élément de $\mathscr{L}$(E,F). **Le noyau de f** est par définition $f^{-1}(\{0_F\})$. On le note Ker(f).

$$u\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow f(u)=0_F$$

Théorème : Avec les notations ci-dessus, Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : f(a,b,c,d)=(x,y,z) avec

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = b + d \\ z = a + c - d \end{cases}$$

Déterminer Im(f) et Ker(f).

Théorème : Soit f un élément de $\mathscr{L}$(E,F).

1- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$
2- f est surjective si et seulement si Im(f)=F.

4- Cas où E est de dimension finie

Théorème : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, E de dimension finie n élément de $\mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Soit f un élément de $\mathcal{L}$(E,F).
f est entièrement déterminé par les n vecteurs $f(e_1)$, …, $f(e_n)$.

Théorème : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, E de dimension finie n élément de $\mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Soit f un élément de $\mathcal{L}$(E,F).
Alors, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\})$.

Définition : Soit f un élément de $\mathcal{L}$(E,F). **Le rang de f**, noté rg(f), est la dimension de Im(f).

Théorème du rang : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, E de dimension finie n élément de $\mathbb{N}^*$. Soit f un élément de $\mathcal{L}$(E,F).

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{Dim}(E)$$
$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Dim}(E)$$

Théorème : Soient E et F deux espaces vectoriels tels que E soit de dimension finie.
Soit f de E dans F une application linéaire.
1-f injective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une famille libre de F.
$\Leftrightarrow$ il existe une base B de E qui a pour image par f une famille libre de F.
2-f surjective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une famille génératrice de F
$\Leftrightarrow$il existe une base B de E qui a pour image par f une famille génératrice de F.
3-f bijective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une base de F
$\Leftrightarrow$ il existe une base B de E qui a pour image par f une base de F.

Théorème : Caractérisation analytique d'une application linéaire
On suppose que E et F sont tous les deux de dimensions finies p et n respectivement.
Soient $B_1 = (e_1,\ldots,e_p)$ une base de E, et $B_2 = (f_1,\ldots, f_n)$ une base de F.
On note $\left(a_{1j},\ldots,a_{nj}\right)$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_2 : $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$.

Soit u un vecteur de E de coordonnées $(x_1,\ldots,x_p)$ dans la base B_1 : $u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ les coordonnées de f(u) dans la base B_2 : $f(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$.

Alors on a : $\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p \\ & \vdots & & & & & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p \end{cases}$.

5- Cas d'un endomorphisme avec E de dimension finie

Théorème : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n élément de $\mathbb{N}$.
Soit f un élément de End(E).
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1- f est injective
2- f est surjective
3- f est bijective.

6- Etude de $\mathscr{L}$(E,F)

Théorème : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels. Notons + la loi de composition interne de $\mathscr{L}$(E,F) et . la loi externe.
($\mathscr{L}$(E,F),+) est un groupe commutatif.
($\mathscr{L}$(E,F),+,.) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

7- Composition d'applications linéaires

Théorème : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriels.
Soient f un élément de $\mathscr{L}$(E,F) et g un élément de $\mathscr{L}$(F,G).
Alors, $g \circ f$ est un élément de $\mathscr{L}$(E,G).

Preuve : Soient f un élément de $\mathscr{L}$(E,F) et g un élément de $\mathscr{L}$(F,G).
Soient x et y deux vecteurs de E et λ un scalaire.

$$(f \circ g)(x+\lambda y) = f\left(g(x+\lambda y)\right) \underset{\text{par linéarité de g}}{=} f\left(g(x)+\lambda g(y)\right)$$

$$\underset{\text{par linéarité de f}}{=} f\left(g(x)\right)+\lambda f\left(g(y)\right) = (f \circ g)(x)+\lambda (f \circ g)(y)$$

8- Projecteurs et involutions

Définition : Projection et symétrie parallèlement à un sous-espace vectoriel.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).
On a donc : $\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \,/\, x = x_F + x_G$
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application p de E dans E définie par : $p(x)=x_F$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s de E dans E définie par : $s(x) = x_F - x_G$.

Proposition :

1- Les projections et les symétries sont des endomorphismes de E.
2- Une projection p vérifie $p \circ p = p$ et une symétrie s vérifie $s \circ s = Id_E$.
3- $F = \operatorname{Im} p = \{x \in E / p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(Id_E - p)$ et $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(Id_E - p)$.
4- $F = \operatorname{Ker}(s - Id_E) = \operatorname{Im}(s + Id_E)$ et $G = \operatorname{Im}(s - Id_E) = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$

Proposition :

1- Soit p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
p est un projecteur. On note $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$.
On a alors $E = F \oplus G$ et p est la projection sur F parallèlement à G.

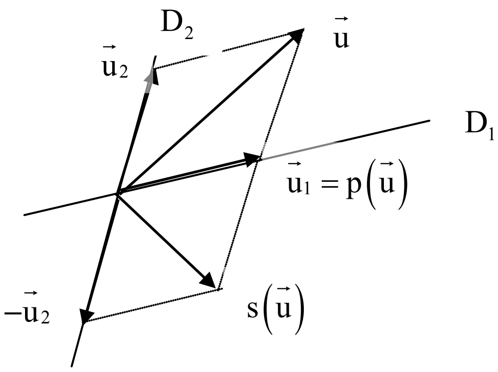
2- Soit s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = Id_E$. s est une involution.
On note $F=\operatorname{Ker}(s-Id_E)$ et $G=\operatorname{Ker}(s + Id_E)$.
On a alors $E = F \oplus G$ et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

ANNEXE
PROJECTIONS ET SYMETRIE VECTORIELLES

1. Projections et symétries vectorielles dans le plan P

Définition : Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

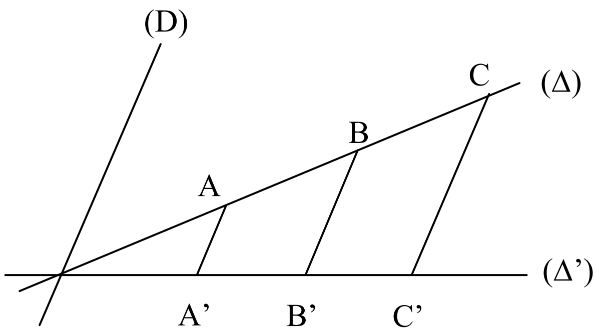
Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\vec{i}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ colinéaire à $\vec{j}$: $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$.



La projection p sur D_1 parallèlement à D_2 est alors définie par : $p(\vec{u})=\overrightarrow{u_1}$.

La symétrie s par rapport à D_1 parallèlement à D_2 est alors définie par : $s(\vec{u})=\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}$.

Illustration : p projection sur (Δ') parallèlement à (D).



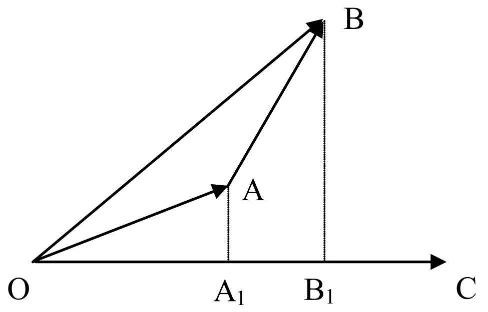
Propriétés : 1- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$p(\vec{u}+\vec{v})=p(\vec{u})+p(\vec{v}) \text{ et } p(k\vec{u})=k\,p(\vec{u})$$

2- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$s(\vec{u}+\vec{v})=s(\vec{u})+s(\vec{v}) \text{ et } s(k\vec{u})=k\,s(\vec{u})$$

Illustration : Avec p projection orthogonale sur la droite (OC) avec $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $p(\vec{u})=\overrightarrow{OA_1}$ et $p(\vec{v})=\overrightarrow{A_1B_1}$



Propriété : $p\circ p=p$ et $s\circ s=id$ où id désigne l'application identité du plan.

Remarque : Les éléments caractéristiques de p et de s, D_1 et D_2, sont définis par :

- $D_1=\{\vec{u}\in P\ /\ p(\vec{u})=\vec{u}\}$ et $D_2=\{\vec{u}\in P\ /\ p(\vec{u})=\vec{0}\}$
- $D_1=\{\vec{u}\in P\ /\ s(\vec{u})=\vec{u}\}$ et $D_2=\{\vec{u}\in P\ /\ s(\vec{u})=-\vec{u}\}$

2. Projections et symétries vectorielles dans l'espace E

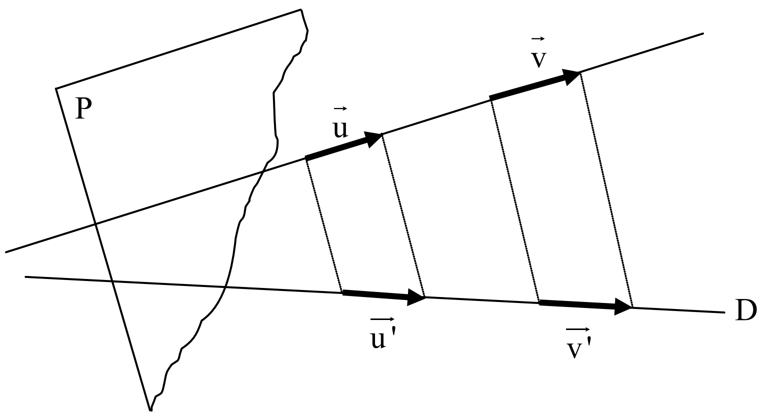
Définition : Soient P un plan de base $(\vec{i},\vec{j})$ et D une droite non incluse dans P de vecteur directeur $\vec{k}$, c'est-à-dire $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ non coplanaires.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ coplanéaire à $(\vec{i},\vec{j})$ et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ colinéaire à $\vec{k}$: $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$.

La projection p_1 sur D parallèlement à P est alors définie par : $p_1(\vec{u})=\overrightarrow{u_2}$.

La symétrie s_1 par rapport à D parallèlement à P est alors définie par : $s_1(\vec{u})=\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_1}$.

Illustration : p projection sur D parallèlement à P.



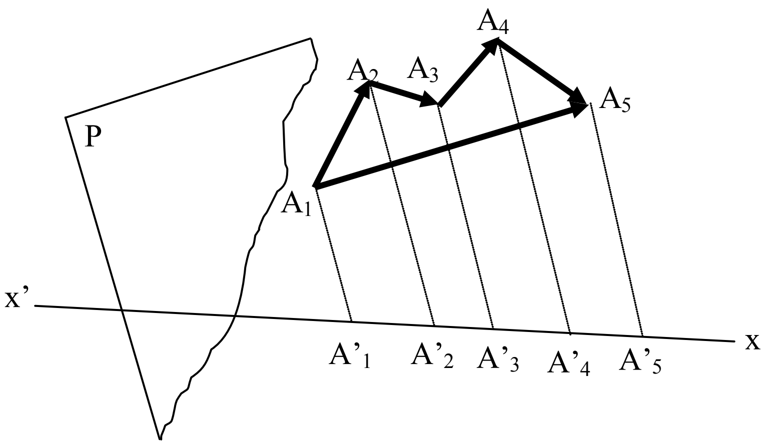
Propriétés : 1- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$p_1(\vec{u}+\vec{v})=p_1(\vec{u})+p_1(\vec{v}) \text{ et } p_1(k\vec{u})=k\,p_1(\vec{u})$$

2- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$s_1\left(\vec{u}+\vec{v}\right)= s_1\left(\vec{u}\right)+ s_1\left(\vec{v}\right) \text{ et } s_1\left(k\vec{u}\right)=k\, s_1\left(\vec{u}\right)$$

Illustration : p projection sur la droite (xx') parallèlement au plan P.



Propriété : $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $s_1 \circ s_1 = id$ où id désigne l'application identité de l'espace.

Remarque : Les éléments caractéristiques de p_1 et de s_1, P et D, sont définis par :

- $D=\left\{\vec{u}\in E \,/\, p_1\left(\vec{u}\right)=\vec{u}\right\}$ et $P=\left\{\vec{u}\in E \,/\, p_1\left(\vec{u}\right)=\vec{0}\right\}$
- $D=\left\{\vec{u}\in E \,/\, s_1\left(\vec{u}\right)=\vec{u}\right\}$ et $P=\left\{\vec{u}\in E \,/\, s_1\left(\vec{u}\right)=-\vec{u}\right\}$

La projection p_2 sur P parallèlement à D est alors définie par : $p_2\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{u_1}$.

La symétrie s_2 par rapport à P parallèlement à D est alors définie par : $s_2\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}$.

Propriétés : 1- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$p_2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)= p_2\left(\vec{u}\right)+ p_2\left(\vec{v}\right) \text{ et } p_2\left(k\vec{u}\right)=k\, p_2\left(\vec{u}\right)$$

2- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel k,

$$s_2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)= s_2\left(\vec{u}\right)+ s_2\left(\vec{v}\right) \text{ et } s_2\left(k\vec{u}\right)=k\, s_2\left(\vec{u}\right)$$

Propriété : $p_2 \circ p_2 = p_2$ et $s_2 \circ s_2 = id$ où id désigne l'application identité de l'espace.

Remarque : Les éléments caractéristiques de p_2 et de s_2, P et D, sont définis par :

- $P=\left\{\vec{u}\in E \,/\, p_2\left(\vec{u}\right)=\vec{u}\right\}$ et $D=\left\{\vec{u}\in E \,/\, p_2\left(\vec{u}\right)=\vec{0}\right\}$
- $P=\left\{\vec{u}\in E \,/\, s_2\left(\vec{u}\right)=\vec{u}\right\}$ et $D=\left\{\vec{u}\in E \,/\, s_2\left(\vec{u}\right)=-\vec{u}\right\}$

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Parmi celles qui le sont, préciser éventuellement s'il s'agit de formes linéaires ou d'endomorphismes.

$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x+2y$ $\quad$ $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto xy$ $\quad$ $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+2y, x-y)$ $\quad$ $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z, z+x)$

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$f_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto 2P+P'$ $\quad$ $f_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto XP+P''$ $\quad$ $f_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P^2$

Exercice 3. Dans E espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit f endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3$; $f(e_2) = e_1 + e_2 - 2e_3$; $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.
Déterminer les coordonnées de f(V) pour $V = x\, e_1 + ye_2 + ze_3$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (3x+2y, y-z)$.
Déterminer l'image de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en fonction de la base canonique $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Déterminer l'image et le noyau de f_1 et f_3 de l'exercice 1.

Exercice 6. Déterminer l'image et le noyau pour f et g :

$f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$, $P \mapsto P'$ $\quad$ $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto XP'+P$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $(x,y,z) \mapsto (x-y+2z, x+y+z, 0)$.
Démontrer que : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
A-t-on $f \circ f = f$?

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x=y=z\}$.

1- Démontrer que ($V_1 = (-1,1,0)$, $V_2 = (-1,0,1)$) est une base de E_1.

2- Démontrer que ($V_3 = (1,1,1)$) est une base de E_2.

3- Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose d'une manière unique sous la forme de la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 et en déduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

4- Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Calculer p(x,y,z).

5- Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Calculer s(x,y,z).

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. f_1 forme linéaire, f_2 non linéaire, f_3 linéaire, f_4 endomorphisme.

Exercice 2. f_1 linéaire, f_2 linéaire, f_3 non linéaire.

Exercice 3. $f(V) = (2x+y+z)e_1+(-x+y+z)e_2 +(x-2y+z)e_3$.

Exercice 4. $f(e_1) = 3\varepsilon_1$; $f(e_2) = 2\varepsilon_1+ \varepsilon_2$; $f(e_3) = -\varepsilon_2$.

Exercice 5. $\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Ker}(f_1) = \{ (-2y, y, z) / (y,z) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\mathrm{Im}(f_3) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}(f_3) = \{ (0,0,z) / z \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 6. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{$ fonctions constantes $\}$

$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathrm{Ker}(g) = \{$ fonction nulle $\}$.

Exercice 7. $f\circ f \neq f$.

Exercice 8. $p(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z,\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z,\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\right)$

$s(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z,\ -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z,\ -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z\right)$.

EXERCICES

Exercice 1.

1- Les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même sont-elles linéaires ? Pour celles qui le sont, déterminer leur noyau et leur image et préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

a- $f((x,y,z))=(x,0,z)$
b- $g((x,y,z))=(y+z,x+z,x+y)$
c- $h((x,y,z))=(x,xy,x+z)$

2 - Mêmes questions avec les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

a- $f((x,y))=(x+1,y+1,x+2)$
b- $g((x,y))=(x,x-y,x+y)$
c- $h((x,y))=(2x-y,6x-3y,4x-2y)$

3 - Mêmes questions avec les applications suivantes de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

a- $f(P)=PP'$
b- $g(P)=X^2P$
c- $h(P)=3P'' + 2P' + P$

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.
Pour celles qui le sont, préciser leur noyau et leur image et en donner une base.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x,y,z) \mapsto (e^x, 2y, x-z)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, 2x+y-3z)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (4x-6y, -6x+9y)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y,z) \mapsto (x-y+z^2, 2x-z)$
5. $f_5 : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $P \mapsto 2P''$
6. $f_6 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(1+P)$
7. $f_7 :$ $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $f \mapsto f^2 - e^f$

Exercice 3. Dans E espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ soit f endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_1-e_2+e_3$; $f(e_2) = e_1+e_2-2e_3$; $f(e_3) = e_1+e_2+e_3$.
Déterminer les coordonnées de f(V) pour $V = x\, e_1+ye_2+ze_3$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y,z) \mapsto (3x+2y, y-z)$.
Déterminer l'image de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en fonction de la base canonique $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x',y',z') \quad \text{avec} \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - z \\ z' = -x + z \end{cases}$$

a- f est-elle linéaire ?
b- Déterminer une base de Ker(f) et de Im(f).

Exercice 6. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(e_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ f(e_3) = \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \\ f(e_4) = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer Ker(f) et Im(f). (Vous donnerez une base et une équation de ces espaces).

Exercice 7. Soit u : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (5x + 2y - z, -8x - 3y + 2z, 3x - y - 5z)$.

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Montrer que V=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-5y=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer u(V), image de V par u et donner une base de cet espace.

Exercice 8. Soit T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant T(1,1)=3 et T(0,1)=-2.

1. La famille B={(1,1), (0,1)} constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Soit t de coordonnées (x, y) dans la base B. Exprimer T(t).
3. Donner le noyau et l'image de T.

Exercice 9. Soit E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

Exercice 10. Soit E = $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(1,X,X^2,X^3)$.
On pose $E_0 = \{P \in E / P(0) = 0\}$ et $E_1 = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

1- Soit λ un réel. Montrer que l'application $\phi_\lambda : P \mapsto P(\lambda)$ est une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{R}$. En déduire que E_0, E_1 et $E_0 \cap E_1$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Quelle est la dimension de E_0 ?

2- Soit u : $E \to \mathbb{R}_1[X]$ défini par u(P) =P(0)X + P(1).

2-1- Montrer que u est linéaire. Déterminer le rang de u. u est-elle surjective ?

2-2- Montrer que Ker u = $E_0 \cap E_1$. Appliquer le théorème du rang à u pour déterminer dim Ker u. Montrer que Ker u est l'ensemble des multiples d'un polynôme que l'on déterminera, puis donner une base de Ker u.

3- En vous aidant des dimensions, montrer que E = $E_0 + E_1$. La somme est-elle directe ?

Exercice 11. Soient E et F deux espaces vectoriels tels que E soit de dimension finie.
Soit f de E dans F une application linéaire. Montrer les propriétés suivantes :

1-f injective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une famille libre de F

$\Leftrightarrow$ il existe une base B de E qui a pour image par f une famille libre de F.

2-f surjective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une famille génératrice de F

$\Leftrightarrow$ il existe une base B de E qui a pour image par f une famille génératrice de F.

3-f bijective $\Leftrightarrow$ f transforme toute base de E en une base de F

$\Leftrightarrow$ il existe une base B de E qui a pour image par f une base de F.

Exercice 12. Soient u et v deux endomorphismes de l'espace vectoriel E.

1- a- Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$.

b- Montrer que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow [\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}]$.

2- a- Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

b- Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

Indication: pour $\Rightarrow$, vous montrerez que pour tout vecteur x de E, il existe un élément y de E tel que $x = u(y) + [x - u(y)]$ avec $(x - u(y))$ élément de Ker(v).

3- a- Montrer que $(u \circ u = u) \Rightarrow E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

b- Montrer que la réciproque est fausse en considérant l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$u(e_1) = (0,0) \ ; \ u(e_2) = a.e_2 \ \text{ où a est un réel fixé distinct de 0 et 1}$$

Exercice 13. E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un projecteur de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $u \circ u = u$).

a- Montrer que (Id - u) est un projecteur.

b- Montrer que $\mathrm{Im}(Id - u) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(Id - u) = \mathrm{Im}(u)$.

c- Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.

d- Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$. Définir l'unique projecteur u tel que $F = \mathrm{Ker}(u)$ et $G = \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14. Un endomorphisme v est dit involutif si $v \circ v = Id$.

Soit u un projecteur de E. On considère $v = 2u - Id$.

Montrer que v est involutif. Etudier la réciproque.

Donner une interprétation géométrique de ce résultat dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. 1- Soit p l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$p(x,y,z) = \left(x, x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \right)$$

Montrer que p est une projection vectorielle. Déterminer les éléments caractéristiques de p.

2- Soit s l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$s(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}(5x + 2y - 4z), y, \frac{1}{3}(4x + 4y - 5z) \right)$$

Montrer que s est une symétrie vectorielle. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Exercice 16. a- Construire un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3$ ne soit pas la somme directe de Im(f) et de Ker(f).

b- Construire un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et tel que g ne soit pas un projecteur.

Quelques exercices corrigés

Exercice 17.

1- Les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même sont-elles linéaires ? Pour celles qui le sont, déterminer leur noyau et leur image.

F (x ; y ; z) = (x ; 0 ; z)
G (x ; y ; z) = (y + z ; x + z ; x + y)
H (x ; y ; z) = (x ; xy ; x + z)

2- Mêmes questions avec les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

F (x ; y) = (x + 1 ; y + 1 ; x + y + 2)
G (x ; y) = (x ; x – y ; x + y)
H (x ; y) = (2x – y ; 6x – 3y ; 4x – 2y)

3- Mêmes questions avec les applications suivantes de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même :

F (P) = P P'
G (P) = X 2 P
H (P) = 3 P'' + 2 P' + P

Corrigé : On rappelle qu'une application linéaire f est une application qui vérifie :

$$\forall(X,Y,\lambda)\in E\times E\times\mathbb{R},\ f(X+\lambda Y)=f(X)+\lambda f(Y)$$

On omettra parfois dans la suite les quantificateurs (afin d'alléger le texte…).

1- F (x ; y ; z) = (x ; 0 ; z)

$$F\big((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\big)=F(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)=(x_1+\lambda x_2,0,z_1+\lambda z_2)$$
$$=(x_1,0,z_1)+\lambda(x_2,0,z_2)=F(x_1,y_1,z_1)+\lambda F(x_2,y_2,z_2)$$

Donc F est une application linéaire.

On a :

$$\operatorname{Ker}F=\{(x,y,z)/F(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y,z)/(x,0,z)=(0,0,0)\}=\{(0,y,0)\}=\operatorname{Vect}\{(0,1,0)\}$$

Et ImF={ $F(x,y,z)/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$} $=\{(x,0,z)\}=\operatorname{Vect}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

G (x ; y ; z) = (y + z ; x + z ; x + y)

$$G\big((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\big)=G(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$=(y_1+\lambda y_2+z_1+\lambda z_2,x_1+\lambda x_2+z_1+\lambda z_2,x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2)$$
$$=(y_1+z_1,x_1+z_1,x_1+y_1)+\lambda(y_2+z_2,x_2+z_2,x_2+y_2)=G(x_1,y_1,z_1)+\lambda G(x_2,y_2,z_2)$$

Donc G est une application linéaire.

$$\operatorname{Ker}G=\{(x,y,z)/G(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y,z)/(y+z,x+z,x+y)=(0,0,0)\}$$
$$=\{(x,y,z)/y=-z,\ x=-z,\ 2x=0\}=\{(0,0,0)\}$$

D'après le théorème du noyau, on a $\operatorname{rang}G=\dim\operatorname{Im}G=\dim E-\dim\operatorname{Ker}G=3-0=3$.

$\operatorname{Im}G$ étant un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\operatorname{Im}G=\mathbb{R}^3$.

On pouvait aussi voir que : $\operatorname{Im}G=\operatorname{Vect}\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$

H (x ; y ; z) = (x ; xy ; x + z)

$$H\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right)=H(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$=\left(x_1+\lambda x_2,(x_1+\lambda x_2)(y_1+\lambda y_2),x_1+\lambda x_2+z_1+\lambda z_2\right)$$
$$=\left(x_1+\lambda x_2,x_1y_1+\lambda(x_1y_2+x_2y_1)+\lambda^2x_2y_2,x_1+\lambda x_2+z_1+\lambda z_2\right)$$
Et, $H(x_1,y_1,z_1)+\lambda H(x_2,y_2,z_2)=(x_1,y_1x_1,z_1+x_1)+\lambda(x_2,y_2x_2,z_2+x_2)$
$$=\left(x_1+\lambda x_2,x_1y_1+\lambda x_2y_2,x_1+z_1+\lambda(x_2+z_2)\right)$$
Donc H n'est pas une application linéaire à priori.
Pour le prouver, il suffit donner un contre exemple :
$H(1,1,0)+H(1,2,0)=(1,1,1)+(1,2,1)=(2,3,2)\neq(2,6,2)=H(2,3,0)$.

2- F (x ; y) = (x + 1 ; y + 1 ; x + y + 2)
$$F\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right)=F(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$=\left(x_1+\lambda x_2+1,y_1+\lambda y_2+1,x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2+2\right)$$
Or, $F(x_1,y_1,z_1)+\lambda F(x_2,y_2,z_2)=(x_1+1,y_1+1,x_1+y_1+2)+\lambda(x_2+1,y_2+1,x_2+y_2+2)$
$$=\left(x_1+\lambda x_2+1+\lambda,y_1+\lambda y_2+1+\lambda,x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2+2+2\lambda\right)$$
Et en particulier, on a :
$F\left((0,0,0)+1\times(1,1,1)\right)=F(1,1,1)=(2,2,4)\neq F(0,0,0)+F(1,1,1)=(1,1,2)+(2,2,4)$.
Donc F n'est pas une application linéaire.

G (x ; y) = (x ; x – y ; x + y)
$$G\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right)=G(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$=\left(x_1+\lambda x_2,x_1+\lambda x_2-y_1-\lambda y_2,x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2\right)$$
$$=(x_1,x_1-y_1,x_1+y_1)+\lambda(x_2,x_2-y_2,x_2+y_2)$$
$$=G(x_1,y_1,z_1)+\lambda G(x_2,y_2,z_2)$$
Donc G est une application linéaire.
On a : $\operatorname{Ker} G=\{(x,y)/G(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y)/(x,x-y,x+y)=(0,0,0)\}$
$$=\{(x,y)/x=0,\ x=y,\ x=-y\}$$
$$=\{(0,0,0)\}$$
D'autre part, on a ImG={ $(x,x-y,x+y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2$ }= $\operatorname{Vect}\{(1,1,1),(0,-1,1)\}$.

H (x ; y) = (2x – y ; 6x – 3y ; 4x – 2y)
$$H\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right)=H(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$=\left(2x_1+2\lambda x_2-y_1-\lambda y_2,6x_1+6\lambda x_2-3y_1-3\lambda y_2,4x_1+4\lambda x_2-2y_1-2\lambda y_2\right)$$
$$=(2x_1-y_1,6x_1-3y_1,4x_1-2y_1)+\lambda(2x_2-y_2,6x_2-3y_2,4x_2-2y_2)$$
$$=H(x_1,y_1,z_1)+\lambda H(x_2,y_2,z_2)$$
Donc H est une application linéaire.
On a : $\operatorname{Ker} H=\{(x,y)/H(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\{(x,y)/(2x-y,6x-3y,4x-2y)=(0,0,0)\}$
$$=\{(x,y)/2x=y,6x=3y,4x=2y\}=\{(x,y)/2x=y\}$$

Ker H est donc la droite d'équation $2x = y$.
D'autre part, on a : ImH={
$\left(2x-y, 6x-3y, 4x-2y\right)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}= = \mathrm{Vect}\left\{\left(2,6,4\right),\left(-1,-3,-2\right)\right\}$.
Il est facile de voir que la famille $\left\{\left(2,6,4\right),\left(-1,-3,-2\right)\right\}$ est liée et ainsi
$\mathrm{Im}\,H = \mathrm{Vect}\left\{\left(2,6,4\right)\right\}$.

3- $F\left(P_1+\lambda P_2\right) = \left(P_1+\lambda P_2\right)\left(P_1+\lambda P_2\right)' = \left(P_1+\lambda P_2\right)\left(P_1'+\lambda P_2'\right) = P_1P_1' + \lambda^2 P_2P_2' + \lambda\left(P_1P_2' + P_2P_1'\right)$
En particulier, $F\left(X+\lambda\times 1\right) = \left(X+\lambda\right)\left(1\right) = X+\lambda$, et $F\left(X\right)+\lambda F\left(1\right) = X+\lambda\times 0 = X$.
Donc F n'est pas une application linéaire.

G (P) = X^2P.
$G\left(P_1+\lambda P_2\right) = X^2\left(P_1+\lambda P_2\right) = X^2P_1 + \lambda X^2 P_2 = G\left(P_1\right)+\lambda G\left(P_2\right)$
Donc G est une application linéaire.
On a : $\mathrm{Ker}\,G = \left\{P / G\left(P\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}\right\} = \left\{P / X^2P = 0_{\mathbb{R}[X]}\right\} = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.
D'autre part, on a : ImG={$X^2P/P\in\mathbb{R}[X]$}=$X^2\mathbb{R}[X]$.

H (P) = 3 P'' + 2 P' + P
On peut directement dire que H est linéaire car on sait que la dérivation est linéaire, que la multiplication par un scalaire d'une application linéaire est linéaire et que la somme d'applications linéaires est linéaire.
On a : $\mathrm{Ker}\,H = \left\{P / H\left(P\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}\right\} = \left\{P / 3P''+2P'+P = 0\right\}$.
Pour déterminer le noyau de cette application, nous devons trouver les applications polynomiales solutions de l'équation différentielle : $3y''+2y'+y=0$ $\left(E\right)$.
Remarquons tout d'abord que le polynôme nul est solution de cette équation.
Soit P un polynôme de degré $n\geq 0$, on a $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n\neq 0$.
Ainsi, P vérifie (E) si et seulement si :

$$3\sum_{k=2}^{n} k\left(k-1\right)a_k X^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-2} 3\left(k+2\right)\left(k+1\right)a_{k+2}X^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\left(k+1\right)a_{k+1}X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-2}\left(3\left(k+2\right)\left(k+1\right)a_{k+2} + 2\left(k+1\right)a_{k+1} + a_k\right)X^k + \left(2na_n + a_{n-1}\right)X^{n-1} + a_n X^n = 0$$

Par identification, on obtient en particulier $a_n = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.
On en déduit que le polynôme nul est l'unique solution.
On pouvait trouver ce résultat plus rapidement en raisonnant sur le degré du po lynôme $3P''+2P'+P$.
En effet, $\deg\left(3P''+2P'+P\right) = \deg P$ donc P vérifie (E) si et seulement si P=0.
On a donc $\mathrm{Ker}\,H = \left\{0\right\}$.
D'autre part, on a : ImH={ $3P''+2P'+P / P\in\mathbb{R}[X]$}.

Ici, on peut se douter que $\operatorname{Im} H = \mathbb{R}[X]$. Nous allons démontrer ce résultat.

On sait que $\mathbb{R}[X]$ est engendré par la famille $\{X^n / n \in \mathbb{N}\}$. Sachant de plus, que $\operatorname{Im} H \subset \mathbb{R}[X]$, il nous suffit de démontrer que tout élément de la famille $\{X^n / n \in \mathbb{N}\}$ appartient aussi à Im H.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que $X^n \in \operatorname{Im} H$, il faut montrer que : $\exists P \in \mathbb{R}[X],\ X^n = 3P'' + 2P' + P$.

Supposons qu'il existe un tel élément P. Puisque $\deg\left(3P'' + 2P' + P\right) = \deg P$, on doit nécessairement avoir $\deg P = \deg X^n = n$, soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

D'après ce qui précède, on a vu que si P est de cette forme alors :

$$3P'' + 2P' + P = \sum_{k=0}^{n-2}\left(3(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+1)a_{k+1} + a_k\right)X^k + \left(2na_n + a_{n-1}\right)X^{n-1} + a_n X^n .$$

Donc par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ 2na_n + a_{n-1} = 0 \\ 3(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+1)a_{k+1} + a_k = 0 \text{ pour } k \in [\![0, n-2]\!] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ a_{n-1} = -2n \\ a_k = -3(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k+1)a_{k+1} = 0 \text{ pour } k \in [\![0, n-2]\!] \end{cases}$$

Les coefficients du polynôme P sont donc bien définis de manière unique.

Réciproquement, en prenant un polynôme P dont les coefficients vérifient le système précédent, on obtient un polynôme qui satisfait à $3P'' + 2P' + P = X^n$.

Finalement, on en conclut que $\operatorname{Im} H = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 18. On considère E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. On pose : $D(f) = f''$.

Montrer que D est une application linéaire de E dans E. Préciser Ker (D) et Im (D).

Corrigé : Tout d'abord, on peut remarquer que D est bien définie de E dans E puisque la dérivée d'une fonction de classe C^∞ est encore C^∞.

La linéarité découle ici de la linéarité de la dérivation et du fait que la composée de deux fonctions linéaires est encore linéaire.

On peut aussi vérifier la linéarité de D en montrant que : $D(f + \lambda g) = D(f) + \lambda D(g)$.

On a par définition $\operatorname{Ker} D = \left\{f \in E / D(f) = 0_E\right\} = \left\{f / f'' = 0\right\} = \{f / \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 0\}$.

Il est facile de voir que :

KerD=' $f / f' = a,\ a \in \mathbb{R}\}$=$\{f / f(x) = ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$=$\{x \mapsto ax + b / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

C'est un espace vectoriel de dimension 2.

D'autre part, $\operatorname{Im} D = \left\{f'' / f \in E\right\}$

On sait tout d'abord que Im D est un sous espace vectoriel de E.

On a même en fait $\operatorname{Im} D = E$.

En effet, soit $g \in E$. Posons $f(x)=\int_0^x\left(\int_0^t g(u)\,du\right)dt$.

g étant de classe C^∞, il est clair que f est bien définie et appartient à E.

De plus, $f'(x)=\left[\int_0^t g(u)\,du\right]_{t=x}=\int_0^x g(u)\,du$ et $f''(x)=\int_0^x g(u)\,du=g(x)$, soit $f''=g$.

On vient donc de montrer que $\operatorname{Im} D \supset E$ d'où $\operatorname{Im} D = E$.

Exercice 19. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1)=\varepsilon_1 \\ f(e_2)=-\varepsilon_1 \\ f(e_3)=\varepsilon_2 \\ f(e_4)=-\varepsilon_2 \end{cases}$$

où (e_1,e_2,e_3,e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$

Corrigé : Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ alors :

$$f(u)=f(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)=x\varepsilon_1-y\varepsilon_1+z\varepsilon_2-t\varepsilon_2$$
$$=(x-y)\varepsilon_1+(z-t)\varepsilon_2=(x-y,z-t,0)$$

On a par définition : $\operatorname{Ker} f=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t)=0\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x=y, z=t\}$.

C'est un espace de dimension 2, et on a même :

$\operatorname{Ker} f=\{(x,x,z,z)\in\mathbb{R}^4\}=\operatorname{Vect}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

D'autre part, $\operatorname{Im} f=\{(x-y,z-t,0)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\}$

$=\operatorname{Vect}\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)\}=\operatorname{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

1- Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   - i- $u\circ v=u$ et $v\circ u=v$
   - ii- u et v sont deux projecteurs et Ker (u) = Ker (v)

2- En déduire l'équivalence des propriétés suivantes :
   - i- $u\circ v=v$ et $v\circ u=u$
   - ii- u et v sont deux projecteurs et Im (u) = Im (v).

Corrigé : Montrons d'abord : $i \Rightarrow ii$.

$u\circ u=(u\circ v)\circ u=u\circ(v\circ u)=u\circ v=u$ donc u est un projecteur.

De même, $v\circ v=(v\circ u)\circ u=v\circ(u\circ u)=v\circ u=v$ donc v est un projecteur.

Soit $x\in\operatorname{Ker} u$ alors $v(x)=(v\circ u)(x)=v(u(x))=v(0)=0$ donc $x\in\operatorname{Ker} v$.

D'autre part, si $x\in\operatorname{Ker} v$ alors $u(x)=(u\circ v)(x)=u(v(x))=u(0)=0$ donc $x\in\operatorname{Ker} u$.

On en déduit donc que $\operatorname{Ker} u=\operatorname{Ker} v$.

Montrons maintenant : $ii \Rightarrow i$.

On a : $v(v(x)-x)=0$ donc $v(x)-x\in\operatorname{Ker} v=\operatorname{Ker} u$.

Ainsi, $u(v(x)-x)=0$ et cela signifie que $u\circ v=v$.

De même, on a $u\left(u\left(x\right)-x\right)=0$ donc $u\left(x\right)-x\in \operatorname{Ker}u=\operatorname{Ker}v$.
Ainsi, $v\left(u\left(x\right)-x\right)=0$ et cela signifie que $v\circ u=u$.

Finalement, on en conclut que : $i\Leftrightarrow ii$.

2- Ici, on a deux possibilités : soit on démontre le résultat directement, soit on utilise le résultat suivant vu dans un exercice en TD : Pour un projecteur u, on a Im (u) = Ker (Id – u).
Posons $\tilde{u}=Id-u$ et $\tilde{v}=Id-v$.
On a donc $\tilde{u}\circ\tilde{v}=\left(Id-u\right)\circ\left(Id-v\right)=Id-u-v+u\circ v=\tilde{u}-v+u\circ v$,
et de même, $\tilde{v}\circ\tilde{u}=Id-v-u+v\circ u=\tilde{v}-u+v\circ u$.
On en déduit que : $\left(u\circ v=v\right)\wedge\left(v\circ u=u\right)\Leftrightarrow\left(\tilde{u}\circ\tilde{v}=\tilde{u}\right)\wedge\left(\tilde{v}\circ\tilde{u}=\tilde{v}\right)$.
On reconnaît alors les hypothèses de la première question, ce qui nous permet d'en déduire que :
$\left(u\circ v=v\right)\wedge\left(v\circ u=u\right)\Leftrightarrow\left(\tilde{u}\circ\tilde{v}=\tilde{u}\right)\wedge\left(\tilde{v}\circ\tilde{u}=\tilde{v}\right)\Leftrightarrow\left(\tilde{u},\tilde{v}\text{ sont deux projecteurs}\right)\wedge\left(\operatorname{Ker}\tilde{u}=\operatorname{Ker}\tilde{v}\right)$
D'après l'exercice vu en TD, on a $\operatorname{Ker}\tilde{u}=\operatorname{Im}u$ et $\operatorname{Ker}\tilde{v}=\operatorname{Im}v$, donc :
$\left(u\circ v=v\right)\wedge\left(v\circ u=u\right)\Leftrightarrow\left(\tilde{u},\tilde{v}\text{ sont deux projecteurs}\right)\wedge\left(\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}v\right)$

Enfin, on a vu que si u est projecteur alors $Id-u$ en est un aussi, et il est facile de vérifier qu'il s'agit même d'une équivalence : $u\circ u=u\Leftrightarrow\left(Id-u\right)\circ\left(Id-u\right)=Id-u$.

Finalement, on en conclut que :
$$\begin{aligned}\left(u\circ v=v\right)\wedge\left(v\circ u=u\right)&\Leftrightarrow\left(Id-\tilde{u},Id-\tilde{v}\text{ sont deux projecteurs}\right)\wedge\left(\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}v\right)\\&\Leftrightarrow\left(u,v\text{ sont deux projecteurs}\right)\wedge\left(\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}v\right)\end{aligned}$$
Remarque :
Dans cet exercice, la démonstration directe est plus rapide que la solution proposée. Cependant, il est intéressant de voir que les liens que l'on peut trouver entre différentes propriétés, surtout dans le cas où les démonstrations directes sont compliquées.

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x\in E\ \left(x,f\left(x\right)\right)$ est liée.
Montrer que si f est non nulle, $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\forall x\in E$, $f\left(x\right)=\lambda x$ (On dit que f est une homothétie).

Corrigé : Supposons que f est non nulle alors cela signifie que : $\exists x_0\in E/f\left(x_0\right)\neq 0$.
En particulier, x_0 est non nul lui aussi car f étant une application linéaire $f\left(0_E\right)=0_E$.
Cela signifie donc qu'il existe $\lambda_0\in\mathbb{K}^*$ tel que $f\left(x_0\right)=\lambda_0x_0$.
Considérons alors $y\in E$, on a deux possibilités :

- La famille $\{x_0,y\}$ est liée :

Dans ce cas, $\exists\alpha\in\mathbb{K}/\ y=\alpha x_0$
Donc par linéarité, on a : $f\left(y\right)=\alpha f\left(x_0\right)=\alpha\lambda_0x_0=\lambda_0y$.

- La famille $\{x_0,y\}$ est libre :

Par hypothèse, $f(x_0+y)$ et x_0+y sont liés, c'est-à-dire il existe $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f(x_0+y)=\lambda_1(x_0+y)=\lambda_1 x_0+\lambda_1 y$$

Or, par linéarité, on a : $f(x_0+y)=f(x_0)+f(y)=\lambda_0 x_0+f(y)$.

En utilisant encore l'hypothèse faite sur f, on sait que $f(y)$ et y sont liés, c'est-à-dire il existe $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tel que : $f(y)=\lambda_2 y$.

Donc, on a : $f(x_0+y)=\lambda_0 x_0+\lambda_2 y$.

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\lambda_1 x_0+\lambda_1 y=\lambda_0 x_0+\lambda_2 y \Leftrightarrow (\lambda_0-\lambda_1)x_0+(\lambda_2-\lambda_1)y=0$$

La famille $\{x_0, y\}$ étant libre, cela implique que : $\begin{cases}\lambda_0-\lambda_1=0\\ \lambda_2-\lambda_1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_0=\lambda_1\\ \lambda_2=\lambda_1\end{cases}$.

On en déduit donc que : $f(y)=\lambda_0 y$.

Finalement dans tous les cas, on voit que : $f(y)=\lambda_0 y$, ce qui signifie bien que f est une homothétie de rapport λ_0. On en conclut que f est soit nulle, soit c'est une homothétie.

Chapitre 21

MATRICES

0- Présentation historique

Sylvester

Parallèlement aux travaux de **Grassmann**, **Cayley** dégage la notion d'espace vectoriel de dimension n, introduit, avec **Sylvester James Joseph (anglais, 1814-1897)**, la notion de matrice (le terme sera introduit par ce dernier en 1850) et en expose l'usage en faisant emploi des déterminants (dont l'initiateur fut **Cauchy**) dans une théorie plus large dite *des invariants* (1858) : on entend là des propriétés matricielles invariantes par transformation linéaire comme, par exemple, le déterminant, la trace (somme des éléments diagonaux).

1- Matrices

Définition : Soit $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une **matrice M de type (n,p)** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de np éléments de $\mathbb{K}$ du type :

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}=(a_{i,j})_{i,j}$$

Notation : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Le coefficient $a_{i,j}$ est aussi noté a^i_j.

Cas particuliers :

- Matrices **carrées** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Matrices **diagonales** : $D=(a_{i,j})_{i=1 \text{ à } n \text{ et } j=1 \text{ à } n}$ est diagonale si et seulement si pour tout i et j de 1 à n, i distinct de j, $a_{ij}=0$.
- Matrice identité ou unité :

On pose : $\delta_{i,j}=1$ pour i=j, 0 si $i\neq j$.
I_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $\delta_{i,j}$ c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1.

2- Etude de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1- Egalité de deux matrices

2- Addition de deux matrices

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe commutatif.

3- Multiplication d'une matrice par un scalaire

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4- Base et dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathrm{Dim}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=np$.

3- Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : Soit $A=(a_{i,j})_{i,j}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$ est la matrice $B=(b_{j,i})_{j,i}$ définie par : $b_{i,j}=a_{j,i}$.

Remarque : Avec les notations ci-dessus, B est élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriétés : Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit k un élément de $\mathbb{K}$.

$$ {}^t(A+B)={}^tA + {}^tB \text{ et } {}^t(kA)=k\,{}^tA $$

Dans la suite de ce paragraphe, nous travaillons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **symétrique** si par définition ${}^tA=A$. Elle est dite **antisymétrique** si par définition ${}^tA=-A$.

Notations : L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Propriété : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4- Produit matriciel

Définition : Soient A un élément de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et B un élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Le **produit A.B** est la matrice C élément de $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i = 1 \text{ à } m,\ \forall j = 1 \text{ à } p,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque : En résumé, on dit que le produit de deux matrices s'effectue "ligne par colonne".

$$\begin{array}{ccc} & & j^{\text{ème}} \text{ colonne de B} \\ & & \downarrow \\ & & \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{qj} \end{pmatrix} \\ i^{\text{ème}} \text{ ligne de A} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriétés :

- **Distributivité :** $\forall A_1 \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall A_2 \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A_1+A_2).B=A_1.B+A_2.B.$
  $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B_1 \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall B_2 \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A.(B_1+B_2)=A.B_1+A.B_2.$
- **Associativité :** $\forall A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A.B).C=A.(B.C).$
- **Transposition :** $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ {}^t(A.B)={}^tB.{}^tA$
- **Non intégrité :** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **Non commutativité**
- **Produit et puissance :** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $A^0 = I_n$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $A^{p+1} = A(A^p) = (A^p)A$.

L'associativité de la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ entraîne :

pour tous naturels p et q : $A^{p+q} = A^p A^q$ et $(A^p)^q = A^{pq}$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, vérifient $AB = BA$, alors $(AB)^p = A^p B^p$ et

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k B^k A^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$$

Formule du binôme de Newton

5- Etude de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème : $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.)$ est un anneau unitaire.

Définition : A élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** si par définition il existe B élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $A.B=B.A=I_n$ où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, on note $B=A^{-1}$.

Remarque : Si $A.B=I_n$, alors $BA=I_n$. Et alors $B=A^{-1}$.
De même, si $BA=I_n$, alors $A.B=I_n$. Et alors $B=A^{-1}$.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Déterminer les matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A+B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Vérifier l'associativité du produit matriciel en calculant A(BC) et (AB)C pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^2\text{-}5A + 4I = 0$.

En déduire que $A\left(-\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I\right) = I$, puis la matrice A^{-1}.

Exercice 4. Soit a un réel fixé. Calculer A^2, A^3 puis par récurrence A^n pour $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a) & \mathrm{sh}(a) \\ \mathrm{sh}(a) & \mathrm{ch}(a) \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ prouver que $A^2 = A + 2I$ puis par récurrence que :

$A^n = a_nA + b_nI$

Donner les relations liant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n.

Exercice 6. Vérifier la formule donnant la transposée d'un produit de 2 matrices A et B sur les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Calculer $A\,{}^tA$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour une matrice A quelconque, le produit $A\,{}^tA$ est une matrice symétrique.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4/3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2/3 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. $A^n = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(na) & \mathrm{sh}(na) \\ \mathrm{sh}(na) & \mathrm{ch}(na) \end{pmatrix}$.

EXERCICES

Exercice 1. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels de la forme :

$$M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & -3b+3c & a-3c \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des réels.

a- Trouver trois matrices I, J, K de E, indépendantes de a, b, c telles que toute matrice de E s'écrive sous la forme M(a;b;c) = aI + bJ + cK.

b- Montrer que E muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

c- Calculer J^2, J.K, K.J, K^2.

Exercice 2. Calculer les produits A.B et B.A lorsqu'ils existent dans les cas suivants :

a- $A = (1\ 2\ {-1}\ 3)$ et $B = {}^t(-1\ 0\ 2\ 1)$

b- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

CalculerA^3-A. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 5. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - I_3$.

a- Calculer B^n pour tout entier n.

b- En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 6. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $N = M - I_4$.

a- Calculer N^n pour tout entier n.

b- En déduire M^n pour tout entier n.

Exercice 7. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{100}.

Exercice 8. On considère les matrices M(a,b) et A suivantes :

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ où a et b sont deux réels}$$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse. (On pourra calculer A^2-A)
2. Soit E l'ensemble des matrices de la forme M(a,b).
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.
3. Montrer que le produit de deux éléments de E est encore dans E.
4. Déterminer toutes les matrices M de E telles que :
   a) $M^2 = M$ b) $M^2 = I$ c) $M^2 = 0$

Quelques exercices corrigés

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1- Calculer A^2 et A^3.

2- En déduire les puissances successives de A.

3- A est-elle inversible ?

Corrigé : 1- On a $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On remarque donc que : $A^3 = A$.

2- Soit n un entier naturel. D'après ce qui précède, pour $n \geq 3$, on a :

$$A^n = A^{n-3} \times A^3 = A^{n-2}$$

Par une récurrence immédiate, on voit alors que : $A^n = A^{n-2p}$ tant que $n - 2p \geq 1$.

On distingue donc deux cas :

- n pair :

Dans ce cas, il existe p tel que $n = 2p + 2$ et ainsi on a : $A^n = A^{n-2p} = A^2$.

- n impair :

Dans ce cas, il existe p tel que $n = 2p + 1$ et ainsi on a : $A^n = A^{n-2p} = A$.

3- D'après la question 1, on a : $A^3 = A$ c'est-à-dire : $A\left(A^2 - I\right) = 0$.

Supposons alors que A est inversible, cela signifie qu'il existe une matrice B telle que : $AB = BA = I$.

En multipliant à gauche la relation précédente par B, on obtient alors :

$$BA\left(A^2 - I\right) = 0 \Leftrightarrow A^2 - I = 0 \Leftrightarrow A^2 = I$$

Or ceci est absurde.

On en conclut que A n'est pas inversible.

Exercice 10. 1- Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que : $A^2 - 4A + I_2 = 0$.

En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2- Plus généralement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, et une expression de A^{-1} dans ce cas.

Corrigé : 1- $A^2 - 4A + I_2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-12+1 & 8-8+0 \\ 4-4+0 & 3-4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, on a :

$A^2 - 4A + I_2 = 0 \Leftrightarrow -A^2 + 4A = I_2 \Leftrightarrow A\left(-A + 4I_2\right) = \left(-A + 4I_2\right)A = I_2$.

Ceci permet de conclure que A est inversible et que son inverse est $\left(-A + 4I_2\right)$.

2- On a : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+cd \\ ac+bd & d^2+bc \end{pmatrix}$ donc :

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+cd \\ ac+bd & d^2+bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc-a(a+d)+(ad-bc) & ab+bd-b(a+d) \\ ac+cd-c(a+d) & d^2+bc-d(a+d)+(ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le résultat demandé.

D'après ce qui précède, on a :

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0 \Leftrightarrow -A^2+(a+d)A=(ad-bc)I_2 \Leftrightarrow A(-A+(a+d)I_2)=(ad-bc)I_2$$

Supposons que $ad-bc\neq 0$ alors d'après la relation précédente, on en déduit que A est inversible et d'inverse $\dfrac{1}{ad-bc}\left(-A+(a+d)I_2\right)$.

Réciproquement, supposons que A est inversible.
Cela signifie qu'il existe B tel que $AB=I(=BA)$.
Ainsi on a : $BA(-A+(a+d)I_2)=(ad-bc)B \Leftrightarrow -A+(a+d)I_2=(ad-bc)B$.
Supposons maintenant que $ad-bc=0$, cela implique que : $A=(a+d)I_2=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a+d=a \\ b=0 \\ c=0 \\ a+d=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$ soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or, A étant inversible, ceci est absurde (la matrice nulle n'étant pas inversible). Donc $ad-bc\neq 0$.

Finalement, on en conclut que A est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$.

Chapitre 22

MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

1- Matrices et vecteurs

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n élément de $\mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
Soit u un vecteur de E.

Il existe un unique n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que : $u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

On pose $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $X=\text{mat}(u,\mathcal{B})$.

Remarque : Ne pas confondre matrice et composante d'un vecteur.

Propriété : Il existe un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2- Matrices et applications linéaires

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}_1=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}_2=(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F.

Soit ϕ une application linéaire de E dans F.

Posons $\phi(e_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$ pour j=1 à n.

Posons $M=(a_{i,j})_{i=1 \text{ à } p \text{ et } j=1 \text{ à } n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$M=\text{mat}(\phi,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

Remarque :
$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phi(e_1) & \cdots & \phi(e_j) & \cdots & \phi(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}_1=(e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}_2=(f_1,\ldots,f_p)$ une base fixée de F.

L'application T de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui à un élément ϕ de $\mathscr{L}(E,F)$ associe l'élément $M=\text{mat}(\phi,\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

Conséquence : Dim $\mathscr{L}(E,F)$=Dim $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$=pn=DimE.DimF.

Exemple : Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$(x,y,z) \mapsto \phi(x,y,z)=(a,b)$ avec $\begin{cases} a = x + y \\ b = x + y - z \end{cases}$.

Soient $\mathscr{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer $M_1=\text{mat}(\phi,\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$.

Soient u=(1,1,0), v=(1,-1,0) et w=(0,1,1). $\mathscr{B}_1$'=(u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $e_1=(1,1)$ et $e_2=(1,-1)$. $\mathscr{B}_2$'=(e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer $M_2=\text{mat}(\phi,\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2')$.

3- Image d'un vecteur par une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}_1=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}_2=(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F.

Soit ϕ une application linéaire de E dans F de matrice $M=\text{mat}(\phi,\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$.

Soit u un vecteur de E ; $u=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et soit $X=\text{mat}(u,\mathscr{B}_1)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Posons $v=\phi(u)$. v est un élément de F. $v=\sum_{i=1}^{p} y_i f_i$ et soit $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. $Y=\text{mat}(v,\mathscr{B}_2)$.

Alors,

$$Y=MX$$

Exemple : Avec les données de l'exemple du paragraphe précédent, calculer dans la base

$\mathcal{B}_2$' les coordonnées de l'image par ϕ du vecteur x de coordonnées (1,2,3) dans $\mathcal{B}_1$'.

4- Composition d'applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}_1=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}_2=(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F.
Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}_3=(g_1,\ldots,g_q)$ une base de G.
Soient $\phi_1 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\phi_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $\phi_3=\phi_2 \circ \phi_1 \in \mathcal{L}(E,G)$.

$$E \xrightarrow{\phi_1} F \xrightarrow{\phi_2} G$$

Soient $M_1=\text{mat}(\phi_1,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, $M_2=\text{mat}(\phi_2,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, $M_3=\text{mat}(\phi_3,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$.
Alors,

$$M_3=M_2.M_1$$

5- Formules de changement de bases

Notation : $M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ ou $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est la matrice de l'application linéaire f de E muni de la base $\mathcal{B}_1$ dans F muni de la base $\mathcal{B}_2$.

1- Sur les coordonnées d'un vecteur:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$'.
Soit P la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est formée avec les coordonnées de a'_i dans la base $\mathcal{B}$.
P s'appelle la matrice de passage de $\mathcal{B}$ (ancienne base) vers $\mathcal{B}$' (nouvelle base).
On a alors $P=M(id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ et $P^{-1}=M(id_E,\mathcal{B},\mathcal{B}')$ les colonnes de P^{-1} étant formées avec les coordonnées des a_i dans $\mathcal{B}$'.
Soit u un élément de E, X la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ ($X=\text{mat}(u,\mathcal{B})$)et X' la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$' ($X'=\text{mat}(u,\mathcal{B}')$).
On a alors:

$$\mathbf{X'=P^{-1}X \text{ et } X=PX'}$$

2- Sur la matrice d'une application linéaire:

Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1$'.
Soit F un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_2$'.
Soit f une application linéaire de E vers F.
On pose $A=M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ et $A'=M(f,\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2')$.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_1$'.
Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_2$'.

On a alors :

$$\mathbf{A'=Q^{-1}AP \text{ et } A=QA'P^{-1}}$$

A et A' sont alors dites **équivalentes**.

<u>Cas particulier:</u>
E=F, $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1'=\mathcal{B}_2'$ et f endomorphisme de E.
A=M(f,$\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_1$), A'=M(f,$\mathcal{B}_1'$,$\mathcal{B}_1'$) et P matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_1'$.
On a alors :

$$\mathbf{A'=P^{-1}AP \text{ et } A=PA'P^{-1}}$$

A et A' sont alors dites **semblables**.

Exemples :

1- Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : f(x,y,z)=(a,b) et

$$\begin{cases} a = x + y + z \\ b = x - y - z \end{cases}$$

Soient $\mathcal{B}_1$=(i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soient i', j' et k' définis par : $\begin{cases} i' = 2i + j \\ j' = i + j \\ k' = i + k \end{cases}$

et e_1', e_2' définis par : $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 \\ e_2' = e_1 - e_2 \end{cases}$.

Posons $\mathcal{B}_1'$=(i',j',k') et $\mathcal{B}_2'=(e_1',e_2')$. $\mathcal{B}_1'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

a- Déterminer M=mat(f,$\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$).
b- Déterminer M'=mat(f,$\mathcal{B}_1'$,$\mathcal{B}_2'$).

2- Soit E=$\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$=(i,j,k).

On considère P défini par : x+y+z=0 et D défini par : $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$.

Soit p la projection sur P parallèlement à D.
Déterminer M=mat(p,$\mathcal{B}$).

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soit E espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ et soit $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ avec $e'_1 = e_1$, $e'_2=e_1+e_2$, $e'_3= e_1+e_2+e_3$.

1- Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et écrire P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2- Déterminer P^{-1} en cherchant une matrice $Q = (b_{ij})$ telle que $PQ = I$.

3- Déterminer P^{-1} en calculant e_1,e_2,e_3 en fonction de e'_1,e'_2,e'_3 et en écrivant que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICES

Exercice 1. Soient f et g deux applications linéaires définies par :

$$f\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x-y,2x)\end{cases} \text{ et } g\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-z,x+y+z)\end{cases}$$

1- Déterminer la matrice $Mat_{B,C}(f)$ dans chacun des cas suivants :

(a) B et C sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(b) $B=((1,1),(1,-1))$ et C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) $B=((1,1),(1,-1))$ et $C=((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$.

2- Déterminer l'expression de $f\circ g$ A l'aide de leurs expressions, puis retrouver ce résultat à l'aide de leurs matrices.

3- Même question pour $g\circ f$.

Exercice 2. On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \ f_1(x)=e^{2x} \text{ et } f_2(x)=xe^{2x}$$

Soit $E=\{\alpha f_1+\beta f_2,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$.

1- Montrer que E est un espace vectoriel réel de base $B=(f_1,f_2)$.

2- Soit ϕ l'application définie par $\phi(f)=f'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E, puis déterminer sa matrice M dans la base B.

3- En écrivant $A=2I_2+B$, calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4- En déduire la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction : $f\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (3x+1)e^{2x}\end{cases}$

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$F=\begin{pmatrix}17 & -45\\ 6 & -16\end{pmatrix}$$

On pose g=f-2Id et h=f+Id.

1. Déterminer les matrices associées aux endomorphismes g et h.
2. Déterminer le noyau de g et celui de h. On déterminera une base de chacun de ces espaces.
3. A l'aide de la question précédente, déterminer deux vecteurs v_1 et v_2 (non nuls) tels que :
$$f(v_1)=2v_1 \text{ et } f(v_2)=-v_2.$$
4. Démontrer que la famille $\{v_1,v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base.
5. Calculer P^{-1} puis $P^{-1}FP$. Que représente ce produit ?

Exercice 4. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (0,1,1), \varepsilon_2 = (1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer $f(\varepsilon_1)$ et $f(\varepsilon_2)$ dans la base $\mathscr{B}'$ et vérifier que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$.
3. En déduire la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

On pose g=f+Id, h=f+2Id et k=f-Id.

1. Déterminer les matrices associées aux endomorphismes g, h et k.
2. Déterminer les noyaux de g, h et k.
3. A l'aide de la question précédente, déterminer trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 (non nuls) tels que :
$$f(v_1)=-v_1,\ f(v_2)=-2v_2 \text{ et } f(v_3)=v_3$$
4. Démontrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice F' de f dans cette base. Que constatez-vous ?

Exercice 6. E est un espace vectoriel de dimension n.

1- On définit la trace d'une matrice M carrée d'ordre n (notée Tr(M)) comme la somme des termes diagonaux de cette matrice.
Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, on admet que Tr(AB) = Tr(BA).
Montrer que les traces des matrices d'un endomorphisme f par rapport aux diverses bases de E sont égales. On définit ainsi la trace de l'endomorphisme f.

2- Soit f un projecteur de $\mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont respectivement des bases de Im(f) et Ker(f), justifier que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
Donner la matrice associée à f dans cette base. Montrer que la trace de f est égale au rang de f.

Exercice 7. E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 5 et du polynôme nul.

1- Soit f l'application définie sur E par :

Pour tout P(X) élément de E , f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)

1-1- Montrer que f est un endomorphisme de E.

1-2- Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E.

1-3- Déterminer Im(f), rg(f), Ker(f).

2- Soit $F = \{P(X) \in E \ / \ P(0) = P'(0) = 0\}$.

2-1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Trouver une base de F.

2-2- On note g la restriction de f à F, c'est-à-dire $g: F \to E$; $P(X) \mapsto f(P(X))$. Déterminer Im(g), rg(g), Ker(g).

Exercice 8. On se place dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$.

a- Montrer que pour tout P élément de $\mathbb{C}_4[X]$, P(1+X)-P(1-X) est divisible par X.

b- On considère l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P) = \dfrac{P(1+X)-P(1-X)}{2X}$. Montrez que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$.

c- Déterminer la matrice de φ dans la base $\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)$.

d- Déterminer une base de Ker(φ), ainsi qu'une base de Im(φ).

Exercice 9. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$, on considère les applications suivantes :

$$\phi(P(X))=P(X+1) \text{ et } \Psi(P(X))=P(X-1)$$

a- Montrer que ϕ et ψ sont des automorphismes de $\mathbb{R}_4[X]$.

b- Déterminer la matrice M de $\dfrac{\phi+\psi}{2}$ dans la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$.

c- Montrer que M est inversible. En déduire que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_4[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(X+1) + P(X-1) = 2Q(X)$$

d- Soit P_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ tel que $P_n(X+1) + P_n(X-1) = 2X^n$. Montrer que pour n élément de $\{0;1;2;3;4\}$, $P_n' = nP_{n-1}$.

e- Déterminer P_n pour n élément de $\{0,1,2,3,4\}$ et déduisez en M^{-1}.

Exercice 10. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de sa base canonique $\mathscr{B}$ égale à $\{X^k / 0 \le k \le n\}$. Pour k compris entre 0 et n, notons E_k le polynôme :

$$E_k(X) = C_n^k X^k.(1-X)^{n-k}$$

a- Montrer que l'ensemble des E_k est une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

b- Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et expliciter P^{-1}.

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base orthonormée canonique B=(i,j,k).

1- Quelle est l'application linéaire dont la matrice par rapport à B est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

2- Soit P le plan d'équation "x - y + z = 0". Soit s la symétrie orthogonale par rapport à P.

a- Déterminer un élément e_1 de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à P par ses composantes dans B.

b- Déterminer une base B' de $\mathbb{R}^3$ telle que s admette A comme matrice dans B'.

3- a- Déterminer la matrice de s dans B.

b- Déterminer la matrice mat(s,B',B).

Problème récapitulatif

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On note id l'endomorphisme identité de E et 0 l'endomorphisme nul.

1- f est un endomorphisme de E, a et b deux réels distincts.

On note $g = f - a.id$, $h = f - b.id$, $F = Ker(g)$, $G = Ker(g \circ g)$, $H = Ker(h)$.

1- 1- Montrer que $G \cap H = \{0_E\}$.

(On utilisera $g = f - a.id$ et $h = f - b.id$)

1- 2- On suppose que $g \circ g \circ h = 0$ et $g \circ h \neq 0$. Montrer que $F \subset G$ et que l'inclusion est stricte.

1- 3- On suppose de plus que $F \neq \{0_E\}$ et $H \neq \{0_E\}$. En utilisant les dimensions de F, G, H, montrer que G et H sont supplémentaires dans E et préciser les dimensions de F, G et H.

1- 4- Soit v un vecteur de G n'appartenant pas à F; montrer que g(v) et v sont linéairement indépendants et constituent une base de G.

1- 5- u étant un vecteur non nul de H, montrer que (g(v),v,u) est une base de E. Ecrire la matrice M de f dans cette base.

(On utilisera $f = g + a.id$ et $f = h + b.id$).

2- On suppose maintenant que, relativement à une base B donnée de E, l'endomorphisme f a comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2- 1- Calculer les produits matriciels :

$$(A - 4I).(A - 2I) \text{ et } (A - 4I)^2.(A - 2I)$$

et en déduire les deux nombres réels a et b pour lesquels les hypothèses de la question 1-2- sont vérifiées.

2-2- Déterminer un vecteur de base de F de première coordonnée 1 dans la base B. Déterminer un vecteur v de G n'appartenant pas à F, dont les deux premières coordonnées soient 1 dans la base B. Déterminer un vecteur de base, u, de H, de première coordonnée 1 dans B. Ecrire la matrice M de f dans la base B'= (g(v),v,u).

2- 3- P étant la matrice de passage de B à B', calculer P, P^{-1}, M^n pour n entier naturel non nul. Exprimer A^n en fonction des matrices précédentes ; le calcul explicite n'est pas demandé.

Quelques exercices corrigés

Exercice 12. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et l'application f définie par f(P)=P'–P.

1- Montrer que f est un endomorphisme de E.

2- Déterminer Ker f et Im f.

3- Quelle est la matrice M de f dans la base canonique de E ?

4- Démontrer que M est inversible.

Corrigé : 1- f est une application linéaire par linéarité de la dérivée et de la somme.
D'autre part, on a $\deg(P') \le \deg(P)$ et $\deg(A-B) \le \max(\deg(A), \deg(B))$ donc on en déduit que $\deg(f(P)) \le \deg(P) \le 3$ et donc que $f(P) \in E$.
On en conclut donc que f est un endomorphisme de E.

2- On a par définition : $\operatorname{Ker} f = \{P \in E / f(P) = 0\}$.
Soit alors $P \in \operatorname{Ker} f$ et supposons que $P \neq 0$.
On a donc $\deg(f(P)) = \deg(P) \ge 0$, mais étant donné que $f(P) = 0$, cela est absurde, donc P=0.
On en conclut que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
D'autre part, d'après le théorème du rang, on a : $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$, donc d'après ce qui précède, cela implique que $\dim E = \operatorname{rg} f$, et ainsi que $\operatorname{Im} f = E$.
On aurait pu aussi utiliser le raisonnement suivant : comme $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, f est injectif. f étant un endomorphisme injectif, on en déduit que f est bijectif et donc $\operatorname{Im} f = E$.

3- La base canonique de E est $\{1, X, X^2, X^3\}$, et la matrice M de f dans cette base est obtenue en écrivant les images des éléments de la base en ligne et ceux de la base en colonne :

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{matrix}$$

4- Pour démontrer que M est inversible, on pourrait vérifier en résolvant un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues qu'il existe une matrice N telle que $MN = I$.
Cependant, ici, on peut simplement remarquer que f est une bijection (voir question 2-).
f étant bijective, elle est inversible et donc la matrice M, associée à f, est aussi inversible.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1 ; e_2 ; e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1- Déterminer une base de Ker f et de Im f.

2- On pose $u = e_1 + e_2$. Montrer que $B' = (u ; f(u) ; f^2(u))$ est une base de E.

4- Quelle est la matrice T de f dans cette base ?

5- Calculer T^2 et T^3. En déduire M^n pour tout entier naturel n non nul.

Corrigé : On a par définition :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow MX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-y+2z\\-2x+y-3z\\-x+y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}x-y+2z=0\\-2x+y-3z=0\\-x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x-y+2z=0\\-2x+y-3z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y-2z\\-2y+4z+y-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=y-2z\\y=z\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\y=z\end{cases}$$

Posons $v=-e_1+e_2+e_3$. On en déduit donc que $\mathrm{Ker} f=\mathrm{Vect}(\{v\})$, c'est un espace vectoriel de dimension 1.
D'autre part, on a par définition :

$$\mathrm{Im} f=\left\{x'e_1+y'e_2+z'e_3 \,/\, \begin{cases}x'=x-y+2z\\y'=-2x+y-3z\\z'=-x+y-2z\end{cases}\right\}.$$ Posons $w_1=e_1-2e_2-e_3$ et $w_2=2e_1-3e_2-2e_3$.

Alors, $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(\{w_1,w_2\})$.
C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est (w_1,w_2).
Nous aurions pu aussi utiliser les zéros échelonnés…
2- f étant une application linéaire, on a : $f(u)=f(e_1+e_2)=f(e_1)+f(e_2)$.
Connaissant la matrice de f dans la base B, on a : $f(u)=-e_2$.
On en déduit alors que $f^2(u)=f(f(u))=f(-e_2)=-f(e_2)=e_1-e_2-e_3$.
Pour montrer que B' est une base de E, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
Soient alors $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $\lambda_1u+\lambda_2f(u)+\lambda_3f^2(u)=0$.

$$\lambda_1u+\lambda_2f(u)+\lambda_3f^2(u)=0 \Leftrightarrow \lambda_1(e_1+e_2)-\lambda_2e_2+\lambda_3(e_1-e_2-e_3)=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_3)e_1+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)e_2-\lambda_3e_3=0$$

Par liberté de la famille $(e_1,\ e_2,\ e_3)$, on en déduit :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}$$

Donc la famille B' est libre, et c'est une base de E.
3- Pour exprimer la matrice T de f dans cette base, il faut calculer $f^3(u)$:
$f^3(u)=f(f^2(u))=f(e_1-e_2-e_3)=0$.
On en conclut donc que :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f^2(u) & f^3(u) \end{array} & \\ T=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}u\\f(u)\\f^2(u)\end{array}\end{array}$$

4- On a $T^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, et $T^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

B' et B étant deux bases de E, on sait qu'il existe une matrice inversible permettant de passer d'une base à l'autre. Notons alors P la matrice de passage de la base B à la base B' :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u & f(u) & f^2(u) \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

On a donc $M = PTP^{-1}$.

Il est facile de voir par une récurrence immédiate que : $M^n = PT^nP^{-1}$.

Pour calculer M^n, il suffit donc de calculer T^n.

D'après ce qui précède on a $T^n = 0$ dès que $n \geq 3$, d'où $M^n = 0$ dès que $n \geq 3$.

Il ne reste plus qu'à calculer M²qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarquons qu'ici il n'était pas nécessaire de déterminer explicitement la matrice P.

Exercice 14. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par f(x ; y) = (x ; x + y ; x).

1- Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques B_1 et B_2 de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

2- Soit B'_1 = ((2 , 3) ; (-1 , 7)). Montrer que B'_1 est une base de $\mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice de passage P de B_1 à B'_1.

3- Soit B'_2 = ((2 , 0 , 1) ; (1 , 1 , 1) ; (2 , 1 , 0)). Montrer que B'_2 est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de passage Q de B_2 à B'_2.

3- Calculer Q^{-1}. En déduire la matrice N de f relativement aux bases B'_1 et B'_2.

Corrigé : La base canonique B_1 de $\mathbb{R}^2$ est ((1,0), (0,1)), et on a :

$$f(1,0) = (1,1,1) \text{ et } f(0,1) = (0,1,0)$$

On en déduit donc que la matrice de f relativement aux bases B_1 et B_2 est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2- Soit B'_1 = ((2 ; 3) ; (-1 ; 7)).

Pour montrer que B'_1 est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que la famille est libre.

Soient alors λ, μ deux réels tels que : $\lambda(2,3) + \mu(-1,7) = 0$.

$$\lambda(2,3) + \mu(-1,7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ 3\lambda + 7\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = \mu \\ 17\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que la famille est libre, et donc que c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

P est la matrice de passage de la base B_1 à B'_1 ; on a :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

3- De la même manière que précédemment, pour montrer que l'on a une base, il suffit de montrer que la famille est libre.

Soient alors λ, μ, ν trois réels tels que : $\lambda(2,0,1)+\mu(1,1,1)+\nu(2,1,0)=0$.

$$\lambda(2,0,1)+\mu(1,1,1)+\nu(2,1,0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu+2\nu=0 \\ \mu+\nu=0 \\ \lambda+\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\mu=0 \\ \nu=-\mu \\ \lambda=-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \nu=0 \end{cases}$$

On en déduit donc que la famille est libre, et donc que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q est la matrice de passage de B_2 à B'_2 ; on a :

$$Q=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4- Pour calculer Q^{-1}, il faut écrire Y=QX et exprimer X en fonction de Y, c'est à dire que l'on doit résoudre le système suivant d'inconnue X :

$$QX=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1+x_2+2x_3 \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ =y_2 \\ y_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=y_1 \\ x_2+x_3=y_2 \\ x_1+x_2=y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(y_3-x_2)+x_2+2(y_2-x_2)=y_1 \\ x_3=y_2-x_2 \\ x_1=y_3-x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2=y_1-2y_2-2y_3 \\ x_3=y_2-x_2 \\ x_1=y_3-x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{1}{3}(-y_1+2y_2+2y_3) \\ x_3=\frac{1}{3}(y_1+y_2-2y_3) \\ x_1=\frac{1}{3}(y_1-2y_2+y_3) \end{cases}$$

On en conclut alors que l'inverse de Q est la matrice :

$$Q^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice N de f relativement aux bases B'_1 et B'_2 est : $N=Q^{-1}MP$.

Cela nous donne donc :

$$N=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & -14 \\ 12 & 11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Montrer que les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à des bases différentes.

Corrigé : Dire que les matrices représentent le même endomorphisme dans des bases différentes signifie que A et B sont semblables c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que l'on ait :

$$A=P^{-1}BP$$

Ce qui est encore équivalent à : $PA=BP$.

Remarquons que la deuxième relation nous donnera un système plus facilement puisque l'on n'a pas à inverser de matrice.
Tout le problème revient donc à prouver l'existence d'une matrice P vérifiant la relation énoncée ci-dessus.

On pose : $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$PA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & a+2b \\ 2c+d & c+2d \end{pmatrix} \text{ et } BP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$PA=BP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & a+2b \\ 2c+d & c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=a \\ a+2b=b \\ 2c+d=3c \\ c+2d=3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b=0 \\ -c+d=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=d \end{cases}$$

La matrice étant inversible, on a aussi la condition supplémentaire suivante : $\det P \neq 0$.
Or, $\det P \neq 0 \Leftrightarrow ad-bc \neq 0$.

D'où : $\begin{cases} PA=BP \\ \det P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=d \\ 2ac \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=d \\ a \neq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$.

Une solution du système est par exemple la matrice : $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en conclut que les matrices A et B représentent bien la même application dans des bases différentes.

Chapitre 23

DETERMINANTS

1- Forme n-linéaire alternée

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.

Une application ϕ de E^n dans $\mathbb{K}$ est une **forme n-linéaire** si par définition ϕ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Une forme n-linéaire est **alternée** si par définition elle change de signe lorsque l'on permute 2 de ses variables :

$$\phi(\dots,u_i,\dots,u_j,\dots) = -\phi(\dots,u_j,\dots,u_i,\dots)$$

Remarques :

1- Une forme n-linéaire alternée s'annule lorsque deux de ses variables sont égales.
2- Une forme n-linéaire alternée s'annule lorsqu'une des variables est une combinaison linéaire des autres variables.

2- Expression d'une forme n-linéaire alternée relativement à une base

1- En dimension 2 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et ϕ une forme n-linéaire alternée sur E.

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ une base de E.

On considère deux vecteurs u et v de E de coordonnées respectives dans $\mathscr{B}$ (x,y) et (x',y').

Alors, $\phi(u,v)=(xy'-yx')\phi(e_1,e_2)$.

2- En dimension 3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et ϕ une forme n-linéaire alternée sur E.

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E.

On considère trois vecteurs u, v et w de E de coordonnées respectives dans $\mathscr{B}$ (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'').

Alors, $\phi(u,v,w)=(xy'z''+yz'x''+zx'y''-xz'y''-yx'z''-zy'x'')\phi(e_1,e_2,e_3)$.

3- En dimension n entier naturel non nul

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et ϕ une forme n-linéaire alternée sur E.

Alors, ϕ est entièrement déterminée par sa valeur sur une base de E.

3- Déterminant de n vecteurs dans une base fixée

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.
Le **déterminant** dans la base $\mathscr{B}$ est l'unique forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur $\mathscr{B}$. On le note $\det_{\mathscr{B}}$.

Remarque : $\det_{\mathscr{B}}(e_1,\ldots,e_n)=1$.

a- Etude du déterminant en dimension 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ une base de E.

On considère deux vecteurs u et v de E de matrices de coordonnées respectives dans $\mathscr{B}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Alors, $\det_{\mathscr{B}}(u,v)=xy'-yx'=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

b- Etude du déterminant en dimension 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E.
On considère trois vecteurs u, v et w de E de matrices de coordonnées respectives dans $\mathscr{B}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$.

Alors, $\det_{\mathscr{B}}(u,v,w)=xy'z''+yz'x''+zx'y''-xz'y''-yx'z''-zy'x''=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Remarque : Règle de Sarrus (français, 1798-1861)
Procédé mnémotechnique : on écrit à droite du déterminant les deux premières colonnes (ou en dessous les deux dernières lignes). Pour obtenir la valeur de D, on somme les produits de trois termes diagonaux p1 + p2 + p3, comme indiqué, et on soustrait la somme p4 + p5 + p6.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & p_4 & p_5 & p_6 \\
x & x' & x'' & x & x' & \\
y & y' & y'' & y & y' & \\
z & z' & z'' & z & z' & \\
 & & & p_1 & p_2 & p_3
\end{array}
$$

ATTENTION : cette règle n'est valable que pour un espace vectoriel de dimension 3. Elle n'a pas de généralisation pour un espace vectoriel de dimension strictement supérieur à 3.

c- Expression d'une forme n-linéaire alternée relativement à une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.
Soit ϕ une forme n-linéaire alternée sur E.
$\forall (u_1,\ldots,u_n)\in E^n$, $\phi(u_1,\ldots,u_n)=\det_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n).\phi(e_1,\ldots,e_n)$.

d- Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.
Soient $u_1,\ldots,u_n$ n vecteurs de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a- $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est une base de E
b- $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n)\neq 0$

4- Déterminant d'une matrice

Définition : Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1 \text{ à } n\\ j=1 \text{ à } n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.

On pose pour tout j=1 à n, $u_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, c'est-à-dire $\text{mat}(u_j,\mathscr{B})=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}$.

Par définition, $\det(A)=\det_{\mathscr{B}}(u_1,\ldots,u_n)$.

Remarques : 1- Ce nombre, det(A), ne dépend pas de la base choisie car seules les coordonnées des vecteurs interviennent.

2- $\det(I_n)=1$.

Notation : det(A)=$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Propriété : Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Démonstration :
(Faire un calcul direct pour n = 2 ou 3)
Considérons A et B deux matrices $n \times n$.
On peut les considérer comme les matrices de deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$, f et g.
On note $\mathcal{B}$=(e_1, ..., e_n) la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est égale à f(e_j) ; celle de B est égale à g(e_j) ; celle de AB est égale à $f \circ g(e_j)$.
La fonction définie par :

$$\Phi(V_1, ..., V_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(V_1), ..., f(V_n))$$

est une forme n-linéaire alternée.
Elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}(V_1, ..., V_n)$, le coefficient de proportionnalité étant $\Phi(e_1,...,e_n)$.
On a donc :

$$\Phi(V_1, ..., V_n) = \Phi(e_1, ..., e_n).\det_{\mathcal{B}}(V_1, ..., V_n)$$
$$\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), ..., f(e_n)).\det(V_1, ..., V_n)$$

Or $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), ..., f(e_n))$ n'est autre que det(A).
Ainsi :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det_{\mathcal{B}}(A).\det(V_1, ..., V_n).$$

Prenons maintenant $V_i = g(e_i)$. On obtient :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det_{\mathcal{B}}(A).\det(g(e_1), ..., g(e_n))$$

Or $\det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det(AB)$ et $\det_{\mathcal{B}}(g(e_1), ..., g(e_n)) = \det(B)$
Ainsi :

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Conséquence : Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et m un entier naturel.

$$\det\left(A^m\right) = \det(A)^m$$

Remarque : Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En général,

$$\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$$

Théorème : Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas, $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(A)}$.

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit v_j le vecteur de E tel que $\mathrm{mat}(v_j,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour j=1 à n. Posons $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- $\det(A) \neq 0$

2- $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base de E

5- Calcul pratique

Propriété : Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(A)=\det\left({}^tA\right)$.

Définition : Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Soit $\Delta_{i_0j_0}$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre (n-1) obtenu en supprimant la ligne i_0 et la colonne j_0 de det(A). $\Delta_{i_0j_0}$ est le **mineur** du coefficient $a_{i_0j_0}$ et $(-1)^{i_0+j_0}\Delta_{i_0j_0}$ est le **cofacteur** du coefficient $a_{i_0j_0}$.

Développement d'un déterminant à l'aide des cofacteurs :

Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout i_0 et j_0 compris entre 1 et n :

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0j}\Delta_{i_0j} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{ij_0}\Delta_{ij_0}$$

6- Propriétés des déterminants

Propriétés :

1- Un déterminant est nul si une ligne (respectivement une colonne) est une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes).

2- Un déterminant change de signe si on permute 2 lignes (ou 2 colonnes).

3- Mise en facteur via la n-linéarité

Ainsi, pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

4- Le déterminant est inchangé si on ajoute à 1 ligne (respectivement 1 colonne) une combinaison linéaire des **autres** lignes (respectivement colonnes).

5- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

7- Inverse d'une matrice

Propriété : Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}\left(\mathrm{com}A\right)$ où comA est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en remplaçant chaque terme a_{ij} par son cofacteur $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.
comA est appelée comatrice de A (ou matrices des cofacteurs).

8- Rang d'une matrice

Propriété : Soit A un élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, noté rg(A), le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Cas particulier : si A est élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. rg(A)=n si et seulement si $\det(A)\neq 0$.

9- Déterminant d'un endomorphisme

Définition : Soit f un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le déterminant de f est le déterminant d'une matrice de f dans une base donnée (même base au départ qu'à l'arrivée).

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul, et soit f un endomorphisme de E de matrice A dans une base de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- f est un automorphisme
2- $\det(f)\neq 0$
3- $\det(A)\neq 0$
4- A est inversible

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Calculer le déterminant $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ en le développant par rapport à la $2^{\text{ème}}$ colonne, puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$ ligne.

Exercice 2. Montrer, sans le développer, que le déterminant $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ est nul.

Exercice 3. Transformer $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ en un déterminant d'une matrice triangulaire. En déduire la valeur de Δ_3.

Exercice 4. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Calculer les déterminants : $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & b & 0 & \gamma \\ \delta & \eta & c & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

EXERCICES

Exercice 1. a- Trouver deux matrices A et B telles que :

$$\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$$

b- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Démontrer que l'ensemble des matrices B vérifiant $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 2×2. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 2. Quelles sont les valeurs possibles pour le déterminant de la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans les cas suivants ?

a- A diagonale

b- A triangulaire

c- A nilpotente (c.à.d. $\exists p \in \mathbb{N} / A^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$)

d- A idempotente (c.à.d. $A^2 = A$)

e- A involutive (c.à.d. $A^2 = I$)

f- A antisymétrique d'ordre impair

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ -3 & -20 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$$

Exercice 4. Soit $E=\mathbb{R}^3$ et soient trois vecteurs de E :

$$V_1 = (1,2,m), V_2 = (2,1,m), V_3 = (3m,0,1)$$

Pour quelles valeurs de m ces vecteurs sont-ils liés ?

Exercice 5. Soient $u_1 = (1,1,a,0)$, $u_2 = (1,a,1,0)$, $u_3 = (a,1,1,0)$, $u_4 = (0,1,1,a)$.

Pour quelles valeurs de a la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ?

Exercice 6. Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \end{vmatrix}$.

1- Désignons par K_1, K_2, K_3 et K_4 les vecteurs colonnes de Δ. Expliciter, à l'aide de Δ, le déterminant $\delta=\det(K_1+K_3, K_2, K_3-K_1, K_4)$.

2- Calculer δ.

3- En déduire la valeur de Δ.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$. Calculer A^tA. En déduire $\det(A)$.

Exercice 8. Calculer le déterminant suivant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 9. Soit x un paramètre réel et soit D(x) le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 5-x & 1 & -1 \\ 2 & 4-x & -2 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

1- Calculer D(0).
2- Montrer que D(x) est un polynôme de degré 3.
3- Calculer D(x). (Indication : remplacer par exemple C_1 par C_1+C_2) et déterminer pour quelles valeurs de x il s'annule.

Exercice 10. Soit $B = \begin{pmatrix} m^2 & -9 & -4 \\ 2m & -3 & -4 \\ 8 & 3m & -8 \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de m cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 11. Soit n un entier naturel non nul. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe Q(P) quotient de sa division par X, et R(P) reste de sa division par X^n.
Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : f(P)=Q(P) + X.R(P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner la matrice M de f dans la base canonique.
M est-elle inversible ?

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et soit $m \in \mathbb{R}$.
Soient $V_1 = e_1 + 2e_2 + me_3$, $V_2 = 2e_1 + e_2 + me_3$ et $V_3 = 3me_1 + e_3$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m ces vecteurs forment-ils une famille liée ?

Exercice 13. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse à l'aide de la comatrice :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} m+1 & 3 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ avec } j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Exercice 14. Calculer quand c'est possible l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

1- A est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1}.
2- Déterminer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de A.

Quelques exercices corrigés

Exercice 16. Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 6\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1- Calculer le déterminant de A.

2- Calculer le déterminant de B de trois manières différentes :

a- par la règle de Sarrus.

b- en développant selon la $1^{\text{ère}}$ colonne.

c- en développant selon la $1^{\text{ère}}$ ligne.

Corrigé : 1- On a $\det(A)=-3\times1-4\times2=-11$.

2- a- par la règle de Sarrus.

D'après la règle de Sarrus, on a :

$$\det B=3\times1\times0+2\times(-1)\times(-3)+0\times0\times6-0\times1\times(-3)-2\times0\times0-(-1)\times6\times3$$
$$=6+18=24$$

2-b- En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\det B=(-1)^{1+1}\times3\times\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\times2\times\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\times0\times\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 6\end{vmatrix}$$
$$=3\times6-2\times(-3)=18+6=24$$

2-c- En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det B=(-1)^{1+1}\times3\times\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times0\times\begin{vmatrix}2 & 6\\ 0 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-3)\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$
$$=3\times6+(-3)\times(-2)=18+6=24$$

Exercice 17. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z)=(x+y,-x+y-z,-x-y+z)$$

On note A sa matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1- Déterminer A.

2- Calculer det(A). Que peut-on en déduire pour f ?

3- Déterminer $f^{-1}(x,y,z)$.

Corrigé : 1- $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2- En utilisant la règle de Sarrus, on a :

$$\det(A)=1\times1\times1+(-1)\times(-1)\times0+(-1)\times1\times(-1)-(-1)\times1\times0-(-1)\times(-1)\times1-1\times(-1)\times1$$
$$=1+1-1+1=+2$$

On en déduit que l'application f est bijective.

3- Pour déterminer l'application réciproque de f, il faut déterminer l'inverse de la matrice A.

On a : $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Donc on obtient : $f^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{2}(-y-z;2x+y+z;2x+2z)$.

Exercice 18. Soit n un élément de $\mathbb{N}\backslash\{0,1]$ et $a_1,a_2,...,a_n$ des éléments d'un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Le but de cet exercice est de calculer le déterminant suivant, dit de Vandermonde :

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

1- On définit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$P_n(X)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\\ 1 & X & X^2 & \cdots & \cdots & X^{n-1}\end{vmatrix}$$

Démontrer que P_n est un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont le coefficient dominant est V_{n-1}.

(On pourra pour cela développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.)

2- Expliquer pourquoi les éléments a_i pour $i\in[\![1;n-1]\!]$ sont les racines du po lynôme P_n.

3- Déduire des questions précédentes une expression factorisée de P_n.

4- Calculer $P_n(a_n)$, et en déduire une relation entre V_{n-1} et V_n.

5- A l'aide des questions précédentes, démontrer que : $V_n=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$.

Corrigé : Développons le déterminant $P_n(X)$ par rapport à la dernière ligne :

$$P_n\left(X\right)=(-1)^{n+1}\times 1\times\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}+(-1)^{n+2}\times X\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}+(-1)^{n+}\times X^2\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}+\ldots$$

$$+(-1)^{n+n}\times X^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}$$

Les déterminants qui apparaissent sont des éléments du corps $\mathbb{K}$, et on obtient donc bien un polynôme de degré au plus (n-1).
D'autre part, cette relation nous permet de voir que le coefficient dominant de P_n est :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=V_{n-1}$$

2- En remplaçant X par a_i pour $i\in[\![1;n-1]\!]$ dans $P_n\left(X\right)$, il est clair que l'on va avoir deux lignes identiques donc liées.
Or on sait que si deux lignes (ou deux colonnes) sont liées dans un déterminant alors ce déterminant est nul.
Cela implique que $P_n\left(a_i\right)=0$, ce qui signifie justement que les éléments a_i pour $i\in[\![1;n-1]\!]$ sont des racines de P_n. Grâce au degré de ce polynôme, nous pouvons affirmer que nous obtenons ainsi toutes les racines de ce polynôme.

3- Par hypothèse les éléments a_i pour $i\in[\![1;n-1]\!]$ sont tous distincts, le polynôme P_n possède donc d'après la question 2, (n-1) racines distinctes, on peut donc le factoriser sous la forme :

$P_n\left(X\right)=\alpha\prod_{i=1}^{n-1}\left(X-a_i\right)$ où α est le coefficient dominant de P_n.

D'après la question 3, on en conclut que: $P_n\left(X\right)=V_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(X-a_i\right)$.

4- Par définition de P_n, on a : $P_n\left(a_n\right)=V_n$.

D'après la question précédente, on en déduit que : $V_n=V_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\left(a_n-a_i\right)$.

5- On va faire une démonstration par récurrence. On note $H\left(n\right)$ la propriété :

$$V_n=\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)$$

Fondation : Pour n=2, on a $V_2=\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$ et de plus, $\prod_{1\le i<j\le 2}\left(a_j-a_i\right)=a_2-a_1$.

Donc, H(2) est vérifiée.
Hérédité : Soit n un entier naturel supérieur à 2. Supposons $H\left(n\right)$.

D'après la question précédente, on a : $V_n = V_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, cela nous donne :

$$V_n = \prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j - a_i)\times\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) = \prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j - a_i)\times\prod_{1\le i\le n}(a_n - a_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i).$$

Donc, H(n+1) est vérifiée.

On en conclut par récurrence que pour tout entier naturel $n \ge 2$, on a :

$$V_n = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$$

Chapitre 24

SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

1- Définition et interprétations

Définition : (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$

Interprétation vectorielle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit v_j le vecteur de E tel que $\text{mat}(v_j,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour j=1 à p.

Soit b le vecteur de E tel que $\text{mat}(b,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

(S) a des solutions si et seulement si b est une combinaison linéaire des v_j avec j=1 à p.

Interprétation matricielle

Soient $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Alors, (S) $\Leftrightarrow$ AX=B

Interprétation avec les applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni de la base $\mathscr{B}$.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de la base $\mathscr{B}$'.

Soit f un élément de $\mathcal{L}$(E,F) de matrice A=mat(f,$\mathcal{B}$,$\mathcal{B}$')= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Soit b l'élément de F de matrice B=mat(b,$\mathcal{B}$')= $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

(S) a des solutions si et seulement si b est un élément de Im(f).

Définitions : Si (S) admet au moins une solution, on dit que (S) est **compatible.**
Sinon, on dit que (S) est **incompatible**.
Lorsque les coefficients $b_1,\ldots,b_n$ sont nuls, on dit par définition que (S) est **homogène**.

Propriété : L'ensemble des solutions d'un système homogène est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Le **rang** du système (S) est le rang de la matrice A= $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$.

2- Système de Cramer

Cramer Gabriel (suisse, 1704-1752), professeur de mathématiques et de philosophie à Genève, ami de son compatriote **Jean Bernoulli**. Ses travaux portent principalement sur les courbes algébriques et sur la résolution des systèmes linéaires : "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" (1750).

Définition : Soit (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$.

(Nombre d'équations = nombre d'inconnues)

Soit A==$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1 \text{ à } n \\ j=1 \text{ à } n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Le système (S) est dit de **Cramer** si A est inversible.

En revenant à l'interprétation vectorielle,

$$x_j=\frac{\det(v_1,\ldots,v_{j-1},b,v_{j+1},\ldots,v_n)}{\det(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_n)} \text{ pour } j=1 \text{ à } n$$

Formules de Cramer

3- Méthode de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss est une méthode de résolution systématique d'un système linéaire (S) de type (n, p). Elle permet une discussion sur l'existence éventuelle d'une solution, suivie, dans le cas où l'existence est établie, d'un calcul de sa forme générale. La méthode se décompose en deux étapes : une première étape dite d'élimination, suivie (éventuellement) d'une seconde étape dite de remontée.

Étape d'élimination

Cette première étape vise à écrire un système triangulaire équivalent au système (S) sous une forme échelonnée en utilisant les opérations élémentaires suivantes :

– multiplication d'une équation par un scalaire non nul,
– addition d'un multiple d'une équation à une autre équation,
– échange d'équations et/ou échange de colonnes.

Si lors de cette étape, nous obtenons une équation incompatible, le système (S) est incompatible.

Étape de remontée

Le système obtenu à l'issue de l'étape d'élimination est un système triangulaire supérieur dont la résolution s'effectue en partant de la dernière équation, puis en remontant jusqu'à la première équation. Pour cela, nous utiliserons éventuellemnt des paramètres.

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Soit le système d'équations : $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$. Montrer que c'est un système de Cramer.
Le résoudre par les formules de Cramer.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x-y-z+2t=1 \\ x+2y-z-t=1 \end{cases}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ x+2y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z+2t=4 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$.

EXERCICES

Exercice 1. a- Calculer l'inverse de la matrice A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b- Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x - y = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3y + 4z = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases}$$

Exercice 5.
Résoudre les systèmes suivants par les formules de Cramer :

$(S_1) \begin{cases} 3x + 7y = 14 \\ 5x + 3y = 8 \end{cases}$, $(S_2) \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$, $(S_3) \begin{cases} x - my = a \\ mx + y = b \end{cases}$

Exercice 6. Résoudre les systèmes suivants à l'aide des formules de Cramer :

a. $\begin{cases} 4x + y - 9z = -7 \\ 2x - 3y + \frac{1}{4}z = -2 \\ 4y + 6z = -4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x - y + z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 10x + 3y - 10z = 2 \end{cases}$

Exercice 7. A l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b - c - d + e = 0 \\ 2a + b - 4c + 4e = 0 \\ a + 2b - 3c + d - e = 0 \end{cases}$$

On donnera une base de l'ensemble des solutions.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} x - y + z - t = 6 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \\ -x - 3z - 3t = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 3t = -4 \end{cases}$.

Exercice 9. Soient a et b deux réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\begin{cases} x + y + z + 2at = a \\ x + by + z + t = 2b \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 \end{cases}$$

Exercice 10. Discuter le système linéaire à deux paramètres m et n :

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + mz = n \end{cases}$$

Exercice 11. Discuter suivant les valeurs du paramètre λ le système :

$$\begin{cases} 2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda+4 \\ (4\lambda-1)x + (\lambda+1)y + (2\lambda-1)z = 2\lambda+4 \\ (5\lambda-4)x + (\lambda+1)y + (3\lambda-4)z = \lambda-1 \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre et discuter le système à quatre inconnues x, y, z, t, sur le corps des complexes (h, λ paramètres) :

$$\begin{cases} hx + y + z + t = 1 \\ x + hy + z + t = \lambda \\ x + y + hz + t = \lambda^2 \\ x + y + z + ht = \lambda^3 \end{cases}$$

Vous poserez s=x+y+z+t et vous calculerez les solutions, lorsqu'elles existent, en fonction de s, dont vous aurez préalablement précisé la valeur.

Exercice 13. Soit (S) le système suivant d'inconnues x, y, z et de paramètre λ :

$$(S)\begin{cases} 2x & + & \lambda y & - & z & = & 5 \\ (\lambda-5)x & + & 3y & + & 7z & = & 7 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \end{cases}$$

1- Déterminer λ pour que (S) soit un système de Cramer.
2- Lorsque (S) est de Cramer, déterminer l'inconnue y.
3- Résoudre (S) lorsque le système n'est pas de Cramer.

Quelques exercices corrigés

Exercice 14. Discuter et résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x & + & \lambda y & - & z & = 5 \\ (\lambda-5)x & + & 3y & + & 7z & = 7 \\ x & + & 3y & + & 2z & = 4 \end{cases}$$

On commencera par déterminer pour quelles valeurs de λ le système est de Cramer.

Corrigé : Avant de se lancer dans la détermination des solutions, il faut commencer par étudier le déterminant du système pour déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système ne sera pas de Cramer (s'il en existe).
Le déterminant du système est :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 12+7\lambda-3(\lambda-5)+3-42-2\lambda(\lambda-5) = -2\lambda^2+\lambda(7-3+10)-27+15$$

$$= -2\lambda^2+14\lambda-12 = -2\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)$$

On doit donc résoudre l'équation $\lambda^2-7\lambda+6=0$.
Il y a deux solutions : $\lambda_1 = \dfrac{7+\sqrt{25}}{2} = 6$ et $\lambda_2 = \dfrac{7-\sqrt{25}}{2} = 1$.
Finalement, il faut distinguer trois cas :

Cas 1 : $\lambda = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=5 \\ -4x+3y+7z=7 \\ x+3y+2z=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 5y+5z=17 \\ 5y+5z=3 \end{cases}$$

Il est clair que ce système est incompatible, donc dans ce cas on a l'ensemble des solutions égal à $\varnothing$.

Cas 2 : $\lambda = 6$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ x+3y+7z=7 \\ x+3y+2z=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow 2L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ 15z=9 \\ 5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3t+\dfrac{14}{5} \\ y=t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

<u>Cas 3 :</u> $\lambda \notin \{1;6\}$

Dans ce cas, le système est de Cramer, donc on sait qu'il y a une unique solution.
Sachant que le système est de Cramer, on a deux méthodes pour le résoudre.
La première consiste à reprendre le système de départ, et à le résoudre de manière usuelle (par la méthode du pivot de Gauss, par substitution,…).
L'autre solution consiste à utiliser les formules de Cramer. Cela est bien plus rapide puisque l'on directement la forme de la solution. Cependant, pour obtenir la solution sous forme explicite, il faut calculer autant de déterminants qu'il y a d'inconnues, et plus il y a d'inconnues et plus la taille des déterminants est importante …

Première méthode : Résolution directe

Ici, on va encore utiliser la méthode de Gauss mais contrairement aux cas précédents, on va commencer par éliminer z car les coefficients sur z sont constants et indépendants de λ.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda y-z=5 \\ (\lambda-5)x+3y+7z=7 \\ x+3y+2z=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ (\lambda-5+14)x+(3+7\lambda)y=7+35 \\ 5x+(3+2\lambda)y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ (\lambda+9)x+(3+7\lambda)y=42 \\ 5x+(3+2\lambda)y=14 \end{cases}$$

Maintenant, on peut procéder par substitution pour résoudre les deux dernières équations :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ (\lambda+9)x+(3+7\lambda)y=42 \\ x=\frac{1}{5}\left(-(3+2\lambda)y+14\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ \frac{(\lambda+9)}{5}\left(-(3+2\lambda)y+14\right)+(3+7\lambda)y=42 \\ x=\frac{1}{5}\left(-(3+2\lambda)y+14\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ y\left(-\frac{(\lambda+9)(3+2\lambda)}{5}+(3+7\lambda)\right)y=42-\frac{14(\lambda+9)}{5} \\ x=\frac{1}{5}\left(-(3+2\lambda)y+14\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y-z=5 \\ \frac{-2}{5}\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)y=42-\frac{14(\lambda+9)}{5}... \\ x=\frac{1}{5}\left(-(3+2\lambda)y+14\right) \end{cases}$$

(à finir…)

On obtient finalement la solution du système en fonction du paramètre λ.

Deuxième méthode : Formules de Cramer

On utilise directement les formules de Cramer :

$$x=\frac{1}{\det(S)}\begin{vmatrix} 5 & \lambda & -1 \\ 7 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad y=\frac{1}{\det(S)}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ \lambda-5 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad z=\frac{1}{\det(S)}\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 5 \\ \lambda-5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Il reste encore trois déterminants à calculer. Ces derniers étant de taille 3×3, on peut les calculer directement à l'aide de la règle de Sarrus. (On rappelle que $\det(S)=-2\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)$).

On obtient finalement :

$$x=\frac{14\lambda-84}{-2\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)}=-\frac{7\lambda-42}{\lambda^2-7\lambda+6}$$

$$y=-\frac{14\lambda-84}{-2\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)}=\frac{7\lambda-42}{\lambda^2-7\lambda+6}$$

$$z=-\frac{4\lambda^2-42\lambda+108}{-2\left(\lambda^2-7\lambda+6\right)}=\frac{2\lambda^2-21\lambda+54}{\lambda^2-7\lambda+6}$$

Nous pouvons voir dans cet exemple l'avantage d'utiliser les formules de Cramer.

Chapitre 25

REDUCTION DES MATRICES CARREES

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul, $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, f un endomorphisme de E de matrice A dans B.

1- Définitions

1- Valeur propre et vecteur propre

x est un **vecteur propre** associé à f pour la valeur propre λ élément de $\mathbb{K}$ si par définition x est non nul et $f(x)=\lambda x$.
On dit alors que λ est la **valeur propre** associé à x.

Propriété : λ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(f-\lambda Id)=0$
si et seulement si $\det(A-\lambda I)=0$.

2- Polynôme caractéristique

Le **polynôme caractéristique** de f (respectivement A) est le polynôme P_f (respectivement P_A) défini par $P_f(\lambda)=\det(f-\lambda Id)$ (respectivement $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$).

Propriété : Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A.

2- Sous-espace propre

Définition : Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.
Le **sous-espace propre** de E associé à la valeur propre λ est par définition $E_\lambda=\mathrm{Ker}(f-\lambda Id)$.

Remarque : E_λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ union $\{0_E\}$.

Propriété : Avec les notations ci-dessus, E_λ est un sous-espace vectoriel de E et $1\le \mathrm{Dim}(E_\lambda)\le n$.

Exemple : Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous espaces propres de A.

3- Diagonalisation

Définition : f est **diagonalisable** si par définition il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Propriété : Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f, alors :

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}$$

Cas particulier : Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Exemple : M=$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème : Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de f $(p \leq n)$.

f est diagonalisable si et seulement si E=$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

4- Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition : L'**ordre de multiplicité** d'une valeur propre de f est l'ordre de multiplicité de cette valeur considérée comme racine du polynôme caractéristique de f.

Propriété : Soit λ_0 une valeur propre de f de multiplicité α. Alors, $1 \leq \mathrm{Dim}(E_{\lambda_0}) \leq \alpha$.

Théorème : E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n entier naturel non nul, f un endomorphisme de E.
f est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1- Le polynôme caractéristique de f, P_f, est scindé c'est-à-dire P_f admet n racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{K}$.

2- La dimension de chaque sous-espace propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Exemple : Reprendre la matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et étudier sa diagonalisation.

Interprétation géométrique : Soit $E=\mathbb{R}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $B=(i, j)$.

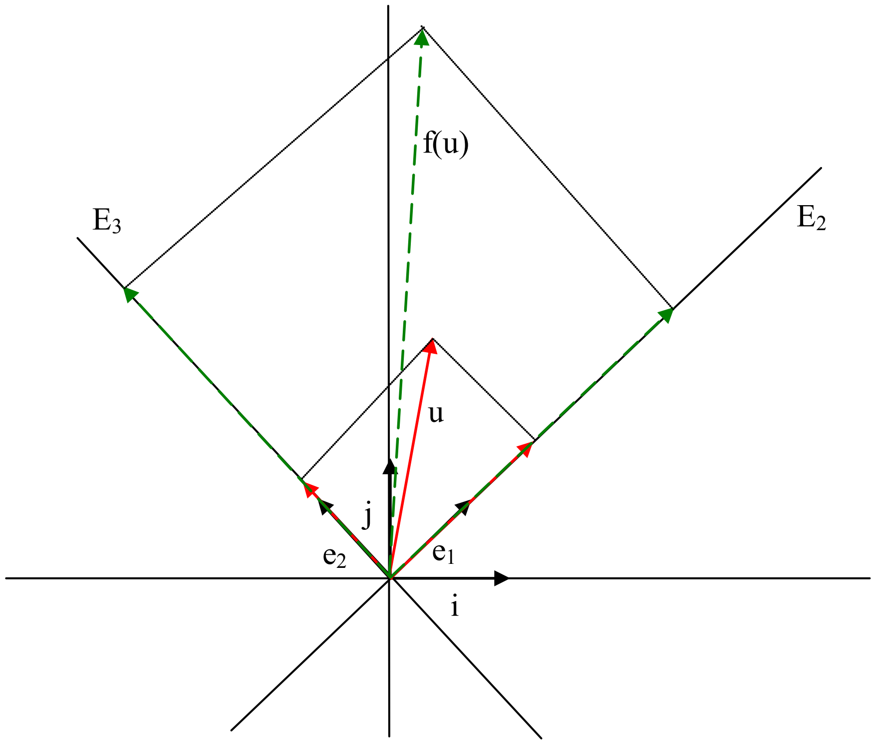
Soit f l'endomorphisme de E définie par sa matrice : $A=\text{mat}(f,B)=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

f est diagonalisable.
Nous pouvons choisir : $e_1=i+j$, $e_2=-i+j$.
Alors, $B'=(e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et dans cette base, la matrice de f est :

$$D=\text{mat}(f,B')=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Avec $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, nous avons : $D=P^{-1}AP$.

Quelle interprétation géométrique pouvons nous faire sur f ?
Soit E_2 (resp. E_3) la droite de base e_1 (resp. e_2).
Soit u un vecteur. Construisons géométriquement f(u).
On décompose u en : $u=u_1+u_2$ avec u_1 élément de E_2 et u_2 élément de E_3.
Nous obtenons : $f(u)= f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)=2u_1+3u_2$ car f restreint à E_2 (resp. E_3) est une homothétie de rapport 2 (resp. 3).



5- Applications

1- Reconnaitre la nature d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme de matrice A par rapport à une base B de E.
On suppose que A est diagonalisable et semblable à une matrice D. On suppose, de plus, que la structure de D permet de reconnaître un type d'endomorphisme particulier : par exemple une symétrie vectorielle ou une projection vectorielle ou une composée de symétries ou projections avec une homothétie vectorielle. On peut alors en déduire la nature de f.

2- Puissance m$^{\text{ième}}$ d'une matrice

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Alors pour tout entier m positif : $A^m = PD^mP^{-1}$.
Comme D est diagonale, D^m se calcule facilement et il ne reste plus que 2 produits de matrices à faire pour calculer A^m.

Exemple : Calculer A^m pour m entier naturel avec $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3- Système d'équation différentiel linéaire

Exemple : Résoudre le système d'équation différentielle $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$

6- Complément : trigonalisation

EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Déterminer dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Déterminer une base de vecteurs propres pour les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 24 & -24 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2})$, $u_0=1$ et $u_1=2$.

1- Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

2- Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^{n-1}.

3- En déduire : $u_n = \frac{1}{3}\left(5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ puis $\lim u_n = \frac{5}{3}$.

ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE NIVEAU 1

Exercice 1. Pour A : $\lambda_1 = 5$, $E_5 = \text{vect}(\ V=(1,2))$
$\lambda_2 = 2$, $E_2 = \text{vect}(\ V=(1,-1))$.
Pour B : $\lambda_1 = 2$, $E_2 = \text{vect}(\ V=(1,1,1))$
$\lambda_2 = -1$, $E_{-1} = \text{vect}(\ (1,-1,0), (1,0,-1)\ )$.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}$, $\lambda_1 = 1$, $E_1 = \text{vect}(\ V=(1,1,0))$
Sur $\mathbb{C}$, $\lambda_1=1$ et $\lambda_2 = j$, $E_j = \text{vect}(\ (j,1,j^2)\ ,\ (j^2,1,j))$.

Exercice 3. A oui, B non.

Exercice 4. Pour A : $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Pour B : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^{n+1}+2(-1)^{n+1} & 2^n+(-1)^n 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICES
APPLICATIONS DU COURS

Exercice 1. On considère dans un espace vectoriel E de dimension n un endomorphisme f diagonalisable possédant seulement deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de sous-espaces propres associés E_1 et E_2.
On appelle φ_1 le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2
φ_2 le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.
Pourquoi φ_1 et φ_2 sont-ils bien définis ?
Déterminer $\varphi_1 + \varphi_2$; $\varphi_1 \circ \varphi_2$; $\varphi_2 \circ \varphi_1$; $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$.

Exercice 2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
- λ valeur propre de u $\Rightarrow \lambda^2$ valeur propre de $u^2 = u \circ u$.
- x vecteur propre de u $\Rightarrow$ x vecteur propre de u^2.
- u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ et que f est diagonalisable. Déterminer l'application f, et en déduire la matrice de f dans n'importe quelle base.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe k tel que $A^k = I_n$.

1 - Quelles sont les valeurs propres possibles de A dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?

2 - Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, montrer que A est la matrice d'une symétrie.

Exercice 5. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où les matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner une base de vecteurs propres.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Donner une matrice D diagonale semblable à A ainsi que P matrice inversible telle que $D=P^{-1}AP$. Déterminer P^{-1}.

Exercice 7. Soit A= $\begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Donner une matrice D diagonale semblable à A ainsi que P matrice inversible telle que D=P^{-1}AP.

Exercice 8.

1. Montrer que les vecteurs $u=(3,0,1), v=(-2,-1,-1)$ et $w=(1,0,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   a. Déterminer f(u), f(v) et f(w). En déduire la matrice M de f dans la base (u,v,w).
   b. Vérifier que 1 est valeur propre triple de M et prouver que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 9. Discuter les possibilités de diagonaliser M = $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Exercice 10. La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Soit M= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est M et par id l'identité de $\mathbb{R}^6$.

1- Déterminer Ker(u+id). En donner une base ε ainsi que sa dimension.
2- En déduire que (-1) est valeur propre de u, d'ordre au moins 5.
3- Calculer la $6^{\text{ième}}$ valeur propre de u. Déterminer le sous espace propre associé dont on donnera une base η. u est-il diagonalisable ? Dire pourquoi $\varepsilon \cup \eta$ est une base B' de $\mathbb{R}^6$.

4- Ecrire la matrice M' de u dans la base B'. Calculer det(u) et en déduire que u est inversible.
5- Montrer que $u \circ u = 5id + 4u$. En déduire la matrice M^{-1}.

Exercice 12. La matrice suivante est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer, sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, M^n où n est un entier naturel non nul.

Exercice 13. Trouver une solution de l'équation $X^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour n fixé dans $\mathbb{N}$ et X inconnue dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14. a- Montrer que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel non nul E, alors X est un vecteur propre de toute puissance u^n de u où n est un entier naturel non nul.

b- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E de matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base donnée $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E.

1- La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres de u.

2- La matrice M^n, où n est un entier naturel non nul, est-elle diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres de u^n.

Exercice 15. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + 9z \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 4y - 9z \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + 3y - 8z \end{cases}$$

Exercice 16. Soit la suite "double" définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -10u_n - 28v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 16v_n \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les valeurs propres de f. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 18. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les valeurs propres de f sont -1 et 2, et déterminer la multiplicité de chaque valeur.
2. Démontrer que f n'est pas diagonalisable.
3. On pose u=(-1,0,1) et v=(-2,-1,1). Vérifier que $E_{-1}=\mathrm{Vect}(\{u\})$ et que $E_2=\mathrm{Vect}(\{v\})$.
4. Soit $H=\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2$.
   Vérifier que $v\in H$ puis déterminer une base {v,w} de H contenant le vecteur v.
5. Vérifier que la famille {u,v,w} est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base. Que constatez-vous ?

Exercice 19. Montrer que la matrice M=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice T=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20. Montrer que la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice T=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 21. On considère la matrice A associée à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1- Montrer que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de A.

2- Déterminer l'espace propre E_λ en en donnant une base. A est-elle diagonalisable ?

3- Soit $B = (e_1, e_2)$ une base de E_λ telle que $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0,1, -1)$.

a- Compléter B en une base (e_1, e_2 , e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f s'écrit :

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b- On prendra $e_3 = (0, -1, 0)$. Calculer A^n pour $n \geq 0$ (en utilisant A' et une démonstration par récurrence).

PROBLEME DE SYNTHESE

Problème Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On note Id l'endomorphisme identité.

1- On suppose que u n'est pas diagonalisable, mais possède une valeur propre double λ_1. Montrer que le sous espace propre E_{λ_1} est de dimension 1. Soit $B=(e_1,e_2)$ une base de E telle que e_1 appartienne à E_{λ_1}. Montrer que $M_B(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ avec μ non nul. Soit $B'=(\mu e_1,e_2)$. Donner $M_{B'}(u)$.

2- On suppose maintenant que u ne possède pas de valeurs propres (réelles). Soit $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ la matrice de u dans une base. On rappelle que la trace de A, notée Tr(A), est $\alpha+\delta$. On pose $a=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A)$, et $v=u-a\,\mathrm{id}$. Montrer que $\mathrm{tr}(A-aI)=0$, que v ne possède pas de valeurs propres et que son polynôme caractéristique $P(\lambda)$ s'écrit :

$$P(\lambda)=\lambda^2+b^2 \text{ avec b non nul}$$

Montrer que si $Q(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de v^2, on a $Q(\lambda^2)=P(\lambda)P(-\lambda)$ et que $Q(\lambda)=(\lambda+b^2)^2$. Soit x un vecteur propre de v^2 pour la valeur propre $-b^2$. Montrer que $B=\left(x,\dfrac{v(x)}{b}\right)$ est une base de E. Donner $M_B(v)$ et $M_B(u)$.

3- Déduire de ce qui précède que pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, il existe une base B de E telle que $M_B(u)$ soit ou bien diagonale, ou bien de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$, ou bien de la forme $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec b non nul.

Solution abregée

1- On a $1 \leq \dim E_{\lambda_1} < 2$. Donc, $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

$u(e_1)=\lambda_1 e_1$, d'où la 1ère colonne.

Le 2ème λ_1 de la diagonale provient du fait que λ_1 est une valeur propre double (et de la trace …)

μ est non nul car u est non diagonalisable.

On obtient : $M_{B'}(u)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

2- $tr(A-aI)=tr(A) - a tr(I)=0$.

λ_2 valeur propre de v si et seulement si $\lambda_2 + a$ valeur propre de u : Absurde.

Il n'y a pas de terme en λ dans $P(\lambda)$ car la trace est nulle.

Comme il n'y a pas de valeur propre réelle, le terme constant est strictement positif ; on peut donc l'écrire b^2 avec b non nul.

$Q(\lambda^2) = \det(v^2 - \lambda^2 id) = \det(v - \lambda id).\det(v + \lambda id) = P(\lambda).P(-\lambda) = (\lambda^2+b^2)^2$.

On travaille dans le corps $\mathbb{R}$, donc $Q(\lambda)=(\lambda + b^2)^2$.

Si $\left\{x, \frac{v(x)}{b}\right\}$ est une famille liée, x serait un vecteur propre. Absurde. D'où le résultat.

On a $v(x)=b\frac{v(x)}{b}$ et $v\left(\frac{v(x)}{b}\right)=\frac{1}{b}v^2(x)=\frac{1}{b}(-b^2x)=-bx$.

Donc, $M_B(v)=\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

On a $u(x)=(v+aid)(x)=v(x)+ax=ax+b\frac{v(x)}{b}$

et $u\left(\frac{v(x)}{b}\right)=(v+aid)\left(\frac{v(x)}{b}\right)=\frac{v^2(x)}{b}+a\frac{v(x)}{b}=-bx+a\frac{v(x)}{b}$.

Donc, $M_B(u)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

3- Il suffit de faire la distinction entre diagonalisable, non diagonalisable avec une valeur propre double et sans valeur propre double.

Quelques exercices corrigés

Exercice 22. Nous travaillons dans E=$\mathbb{R}^3$. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

1- $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 2- $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3- $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

4- $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de vecteurs propres pour M_2.

Corrigé : Pour déterminer si ces matrices sont diagonalisables ou non, on commence par chercher les valeurs propres de chacune de ces matrices, et pour cela on détermine les racines du polynôme caractéristique.

1- On a :

$$P_1(X) = \det(M_1 - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ -1 & -X & -1 \\ 0 & -2 & -X \end{vmatrix} \underset{\text{dvpt 1ère ligne}}{=} -X \begin{vmatrix} -X & -1 \\ -2 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= -X\left(X^2 - 2\right) + X = -X^3 + 3X = -X\left(X^2 - 3\right)$$

Ce polynôme admet trois racines simples $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

On en déduit que la matrice M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et donc dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2- On a :

$$P_2(X) = \det(M_2 - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} -X+2 & -X+2 & -X+2 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (-X+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (-X+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X-1 & 0 \\ 1 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} = (-X+2)(X+1)^2$$

Ce polynôme admet une racine simple 2, et une racine double (-1).

On ne peut donc pas conclure directement, il faut étudier la dimension du sous espace associé à la valeur propre (-1) que l'on note E_{-1}.

Par définition, on a $E_{-1} = \mathrm{Ker}\left(M_2 + \mathrm{Id}\right)$, donc on a :

$$u \in E_{-1} \Leftrightarrow M_2 u + u = 0 \Leftrightarrow M_2 u = -u \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0 \text{ avec mat(u)=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On en déduit que E_{-1} est un espace de dimension 2 (c'est un plan !).

On en conclut que la matrice M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et donc dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Cherchons maintenant une base vecteurs propres pour M_2.

D'après ce que l'on vient de voir, on a :
$E_{-1} = \{(x, y, -x-y) \in E\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1)\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.
La famille $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est clairement libre donc c'est une base de E_{-1}.

D'autre part, on a $E_2 = \mathrm{Ker}(M_2 - 2\mathrm{Id})$.

$$u \in E_2 \Leftrightarrow M_2 u = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=2x \\ x+z=2y \\ x+y=2z \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y+2z=2x+2y+2z \\ x=-z+2y \\ -z+2y+y=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases}.$$

D'où $E_2 = \{(y,y,y)\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

Finalement, on en conclut qu'une base de vecteurs propres pour M_2 est donnée par la famille : $\{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$.

3- On a :

$$P_3(X) = \det(M_3 - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 2 \\ -2 & 1-X & -3 \\ -1 & 1 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} (1-X)^2(-2-X) - 4 - 3 + 2(1-X) + 3(1-X) + 2(2+X) = -X^3.$$

Ce polynôme admet une racine triple 0.

- Première méthode : Pour savoir si cette matrice est diagonalisable, nous déterminons la dimension de $E_0 = \mathrm{Ker}(M_3)$. A finir…

- Deuxième méthode : Si M_3 était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle. Absurde. Donc, M_3 n'est pas diagonalisable.

4- On a :

$$P_4(X) = \det(M_4 - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1-X)^2(2-X) + 1 + (1-X)$$

$$= (X-2)(X^2 - 2X + 2).$$

Le polynôme $X^2 - 2X + 2$ possède un discriminant strictement négatif, ce qui signifie qu'il n'a pas de racines réelles. On en déduit que M_4 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Par contre, le discriminant est non nul donc cela signifie qu'il possède deux racines complexes distinctes.
Le polynôme caractéristique P_4 possède donc trois racines simples sur $\mathbb{C}$, on en conclut que la matrice M_4 est diagonalisable sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice 23. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1- Calculer $\det A$.

2- Déterminer le rang de A.

3- Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} u$? Déterminer une base de cet espace.

4- Calculer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

5- Déterminer une base de vecteurs propres de A et donner la matrice de passage P de la base canonique à cette base. Calculer P^{-1}.

6- En déduire l'expression de A^n pour $n \geq 1$.

Corrigé : 1- Par la règle de Sarrus (par exemple), on trouve $\det A = 0$.
On peut aussi remarquer qu'au moins deux lignes ou deux colonnes sont liées (la troisième et la deuxième colonne) et donc $\det A = 0$.

2- On utilise la méthode des zéros échelonnés :

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rg}\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = 1.$$

Cela signifie donc que $\dim \operatorname{Im} u = 1$.

3- D'après le théorème du rang, on a : $\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$.
Donc d'après la question précédente, on en déduit que : $\dim \operatorname{Ker} u = 3 - 1 = 2$.
Une base de $\operatorname{Ker} u$ est donc constituée de deux vecteurs libres de $\operatorname{Ker} u$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + 4z = 0$$

D'où $\operatorname{Ker} u = \{(x,y,z) / x + 2y + 4z = 0\} = \{(-2y - 4z, y, z)\} = \operatorname{Vect}\{(-2,1,0),(-4,0,1)\}$

La famille $\{(-2,1,0),(-4,0,1)\}$ est clairement libre donc c'est une base de $\operatorname{Ker} u$.

$$4- \; P_A(X) = \det(A - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 4 \\ 1/2 & 1-X & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1-X \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1-X)^3 + 1 + 1 - (1-X)(1+1+1)$$

$$= 1 - 3X + 3X^2 - X^3 + 2 - 3 + 3X = 3X^2 - X^3 = X^2(3 - X)$$

Les valeurs propres de A sont 0 et 3 de multiplicité 2 et 1 respectivement.
A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_0 = 2$.
Or par définition, $E_0 = \operatorname{Ker} u$ donc d'après la question précédente $\dim E_0 = 2$ et ainsi A est diagonalisable.

5- Pour déterminer une base de vecteurs propres de A, il faut déterminer une base de E_3 :

$$(A-3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1/2 & -2 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+4z=0 \\ \dfrac{1}{2}x-2y+2z=0 \\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x-4y+4z=0 \\ x+2y-8z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ -3y+6z=0 \\ 3y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4z \\ y=2z \end{cases}$$

D'où : $E_3=\{(x,y,z)/x=4z, y=2z\}=\{(4z,2z,z)\}=\mathrm{Vect}\{(4,2,1)\}$.

On en déduit que la famille $\{(4,2,1),(-2,1,0),(-4,0,1)\}$ est une base de vecteurs propres de A, et la matrice de passage associée est :

$$P=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer P^{-1}, on peut utiliser la transposée de la comatrice et on obtient :

$$P^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & -8 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

6- On a la relation $A=PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale suivante :

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate, on a donc : $A^n=PD^nP^{-1}$.

Or, on a aussi : $D^n=\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en conclut que : $A^n=PD^nP^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & -8 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}=3^{n-1}A$.

Chapitre 26

A PROPOS DE LA REDACTION

Un des problèmes récurrent que posent les étudiants (hormis les problèmes purement mathématiques) est : la rédaction.

Que doit-on mettre ? Que peut-on ne pas mettre ? est-ce que ma démonstration est correcte et est-elle rédigée convenablement ?...

Le but de ce ch apitre n'est pas de répondre globalement à ces questions. Il s'agit simplement de donner des exemples (réels) de copie d'évaluation afin de donner une idée de ce qu'il est possible (et souhaitable) de mettre dans une rédaction.

A travers des exercices et problèmes issus d'examens des années précédentes à l'INSA (sur le même programme), nous donnons des fac-similés de copies. Il ne s'agit pas de modèles parfaits de rédaction qu'il faudrait suivre à la lettre, mais simplement d'exemples…

Exercice 1.

Soit n un entier naturel strictement positif.

Montrer que : $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+......+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 1 :

Raisonnons par récurrence.

Soit P_n la propriété : $(1\times2)+(2\times3)+\dots n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Montrons que P_n est vraie pour tout rang n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

* Pour $n=1$: $1(1+1)=2$

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{2\times3}{3}=2$$

Donc la propriété est vraie au premier rang $n=1$. Elle est donc fondée.

* On suppose P_n vraie.

$$\Rightarrow (1\times2)+(2\times3)+\dots n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Rightarrow (1\times2)+\dots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Rightarrow (1\times2)+\dots+(n+1)\big((n+1)+1\big)=\frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$$

$$\Rightarrow (1\times2)+\dots+(n+1)\big((n+1)+1\big)=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big((n+1)+2\big)}{3}$$

$\Rightarrow P_{n+1}$ vraie.

Donc la propriété est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $(1\times2)+\dots n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

- λ valeur propre de u $\Rightarrow \lambda^2$ valeur propre de $u^2 = u \circ u$.
- x vecteur propre de u $\Rightarrow$ x vecteur propre de u^2.
- u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable.

Exercice 1 -

$u \in End(E)$ E est un $\mathbb{C}$ ev

Dim E = n, $n \in \mathbb{N}$

* λ valeur propre de u $\Rightarrow \lambda^2$ valeur propre de $u^2 = u \circ u$

Vraie : preuve.

$u^2(x) = u(u(x))$

$= u(\lambda x)$ car λ valeur propre de u

$= \lambda\, u(x)$ car u application linéaire

$= \lambda \times \lambda x$

$u^2(x) = \lambda^2 x$

d'où λ^2 est bien une valeur propre de u^2.

* x vecteur propre de u $\Rightarrow$ x vecteur propre de u^2.

Vraie : preuve.

x vecteur propre du u $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \,/\, u(x) = \lambda x$

d'où $u^2(x) = u(u(x))$

$= u(\lambda x)$

$= \lambda\, u(x)$

$= \lambda \times \lambda x$

$u^2(x) = \lambda^2 x$

donc $\exists k \in \mathbb{C}, k = \lambda^2 \,/\, u^2(x) = k x$

donc x est bien un vecteur propre de u^2.

* u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable

Vraie = preuve.

On pose : $A = \text{mat}(u, B)$

A diagonalisable $\Rightarrow \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, D = P^{-1}AP$

avec $D = \text{mat}(u, B')$

et P la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base B'.

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow D^2 = (P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)$$

$$= P^{-1}A\underbrace{(P\cdot P^{-1})}_{I_n}AP$$

car le produit matriciel est associatif

d'où $D^2 = P^{-1}A^2P$

donc $\exists D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $D' = D^2 \,/\, D' = P^{-1}A^2P$

donc u^2 est diagonalisable.

Exercice 3. $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que Mat $(f, \mathscr{B}) = M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Donner une base de Kerf , de Imf.

2- Calculer M^2. Que peut-on en déduire ?

3- On pose $\vec{u} = \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

3-1- Prouver que la famille $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

3-2- Exprimer $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3-3- En déduire la matrice de passage Q de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$. Peut-on obtenir Q autrement ?

Exercice 2.

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$f \in End(\mathbb{R}^3)$ / mat$(f, B) = M$

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1- \ rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$f(i)$ $f(j) - f(i)$ $f(k)$

3) Soit Q la matrice de passage de B' à B.
On a obtenu Q en inversant le système (S).

$$\text{d'où} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut obtenir Q d'une autre manière : en inversant la matrice P.

en effet : $Q = P^{-1}$

On utilise : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t cof(P)$

Exercice 4. On considère la suite de polynômes P_n définie par :

$$P_0(X)=1 \quad P_1(X)=X \quad \text{et} \quad P_{n+1}(X)=2XP_n(X)-P_{n-1}(X) \text{ pour } n\geq 1.$$

1-1- Calculer P_2, P_3, P_4.

1-2- Déterminer pour n dans $\mathbb{N}^*$ le degré de P_n et son terme de plus haut degré.

2-1- Montrer par récurrence sur l'entier naturel n, que pour x>1 , $P_n(x)\leq P_{n+1}(x)$.

2-2- En déduire que : Pour n entier naturel, $x>1 \Rightarrow P_n(x)>0$.

2-3- O*n admettra que P_n a même parité que n.*

Montrer alors que les racines de P_n sont dans [-1, 1].

3- Pour $x \in [-1, 1]$,on pose : $x = \cos\theta,\ \theta\in[0,\pi]$.

3-1- Montrer que , pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $P_n(\cos\theta.) = \cos(n\theta)$.

En déduire que pour x dans [-1, 1], $P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

3-2- Résoudre l'équation : cos (n arccos (x))=0 . En déduire que pour $n\in \mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$P_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

2) Raisonnement par récurrence :

Soit la proposition H_n : " P_n est de degré n, et son plus haut terme est de la forme $2^{n-1}X^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

- Initialisation :

$P_1(x) = x$ c'est un polynôme de degré 1 . Son plus haut terme est $2^0X^1 = 2^{1-1}x^1$.

Donc H_1 est vraie.

$P_2(x) = 2x^2-1$

C'est un polynôme du second degré , et son plus haut terme est de la forme $2^1x^2 = 2^{2-1}x^2$.

Donc H_2 est vraie .

- Hérédité : On suppose maintenant qu'il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que H_k et H_{k+1} soient vraies.

On a donc $P_k(x) = 2^{k-1}X^k + Q_1(x)$, avec $\deg(Q_1) < k$.

et $P_{k+1}(x) = 2^k x^{k+1} + Q_2(x)$, avec $\deg(Q_2) < k+1$.

D'où :

$$P_{k+2}(x) = 2x\left(2^{k}x^{k+1} + Q_2(x)\right) - 2^{k-1}x^{k} - Q_1(x)$$

$$\Leftrightarrow P_{k+2}(x) = 2^{k+1}x^{k+2} + 2xQ_2(x) - 2^{k-1}x^{k} - Q_1(x)$$

$\deg(2x\,Q_2(x)) < k+2$.

Donc $P_{k+2}(x)$ est de degré $k+2$, et son plus haut terme est de la forme $2^{k+1}X^{k+2} = 2^{k+2-1}X^{k+2}$.

Donc H_{k+2} est vraie.

La propriété H_n est donc héréditaire à partir du rang $k \in \mathbb{N}^*$.

De plus, H_1 et H_2 sont vraies.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Deg}(P_n) = n$ et son terme de plus haut degré s'écrit sous la forme $2^{n-1}X^{n}$.

Exercice 5. (Extrait) Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \ln(\cos x)$.

1- Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer. Expliciter sa bijection réciproque f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$ de deux manières différentes.

2-1- Montrer qu'il existe un réel θ dans]0, 1[tel que : $f(x) = \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2\cos^2(\theta x)}$.

Dans la suite, on admet l'unicité de ce réel θ. On définit ainsi une fonction u : $\theta = u(x)$.

2-2- Exprimer u(x) en fonction de x.

Exercice 3 : $D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad f : x \longmapsto \ln(\cos x)$.

1) • cos est dérivable sur $]0; \pi[$, donc sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Donc $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, f est dérivable, et on a :

$$f'(x) = -\sin x \times \frac{1}{\cos x} = -\tan x.$$

La fonction tan est strictement positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc f est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I

Déterminons I.

$f(0) = \ln(\cos 0) = \ln 1 = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty .$$

Donc $I =]-\infty; 0]$.

Donc f est une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty; 0]$.

$f(x) = \ln(\cos x)$

on pose $y = f(x)$, $y \in]-\infty; 0]$.

donc $y = \ln(\cos x)$

$$\iff e^y = e^{\ln(\cos x)}$$

$$\iff e^y = \cos x$$

$$\iff x = \arccos(e^y).$$

donc $f^{-1}(x) = \arccos(e^x)$.

calcul de la dérivée : $x \in]-\infty; 0] \Rightarrow e^x \in [0; 1]$.

e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$

arcos est dérivable sur $]-1; 1[$.

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, f^{-1} est dérivable et on a :

$$(f^{-1})'(x) = e^x \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2$^{\text{ème}}$ méthode :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

d'où $\forall x \in]-\infty ; 0[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\tan(\arccos(e^x))}$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = -\frac{\cos(\arccos(e^x))}{\sin(\arccos(e^x))}.$$

or : $\forall x \in [-1 ; 1]$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

Ici, on a $x \in]-\infty ; 0] \Rightarrow e^x \in [0 ; 1]$.

D'où $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $\sin(\arccos e^x) = \sqrt{1-x^2}$.

De plus, $\forall x \in [-1 ; 1]$ $\cos(\arccos(x)) = x$.

or $e^x \in [0 ; 1]$ (avec $x \in]-\infty ; 0]$).

donc $\forall x \in]-\infty ; 0]$ $\cos(\arccos e^x) = e^x$.

On a donc $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On retrouve bien le résultat obtenu précédemment.

2.1) . Théorème de Taylor Lagrange :

cos est de classe C^∞.

ln est de classe C^∞.

Donc f est de classe C^∞.

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et dérivable deux fois sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.
Donc en appliquant le théorème de Taylor Lagrange à l'ordre 1
on a : $\exists \theta \in]0; 1[\ / \ f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x)$

$f'(x) = -\tan x$ d'où $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)}$.

D'où :

$\exists \theta \in]0; 1[\ / \ f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta_x)$

$\Rightarrow \exists \theta \in]0; 1[\ / \ f(x) = 0 + x \times 0 + \frac{x^2}{2!} \times \left(-\frac{1}{\cos^2(\theta_x)}\right)$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[\ / \ f(x) = -\frac{x^2}{2\cos^2(\theta_x)} = \ln(\cos x)$.

On admettra que ce réel θ est unique.
$u : \theta = u(x)$.

2.1). $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2\cos^2(\theta_x)}$

$\Leftrightarrow \ln(\cos x) \times 2\cos^2(\theta x) = -x^2$

$\Leftrightarrow \cos^2(\theta x) = -\frac{x^2}{2\ln(\cos x)}$

$\Leftrightarrow \cos(\theta x) = \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2\ln(\cos x)}}$

$x \in [0; \frac{\pi}{2}[$
$\Rightarrow \cos x \in]0; 1[$
$\Rightarrow \ln(\cos x) < 0$
$\Rightarrow -\frac{x^2}{\ln(\cos x)} > 0$.

$\Leftrightarrow \theta x = \arccos\left[\sqrt{-\frac{x^2}{2\ln(\cos x)}}\right]$

arccos est paire donc $\arccos(x) = \arccos(-x)$.

$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{x} \arccos\left[\sqrt{-\frac{x^2}{2\ln(\cos x)}}\right]$

Exercice 6. 1. Soit a un réel strictement positif.

1.1 Démontrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ existe.

1.2 Par une intégration par parties, démontrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ existe.

On admet que, de même : $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ existe.

1.3 Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ existe.

2. Soient a et x deux réels strictement positifs.
En utilisant un changement de variable, prouver :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+a} dt = \cos a \int_a^{a+x} \frac{\sin u}{u} du - \sin a \int_a^{a+x} \frac{\cos u}{u} du$$

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a} dt$ existe et vaut : $\cos a \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

3. Démontrer que $\forall a \in]0,1[,\ 0 \leq \int_a^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln a$.

En déduire $\lim_{a \to 0} \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$ puis $\lim_{a \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

1) $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad \frac{\cos u}{u^2}$ est localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

1.1) $\int_a^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du \leq \int_a^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$

exposant de $u = 2$ $\quad 2>1$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge

donc $\int_a^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du$ converge

donc $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ est absolument convergent donc elle existe.

1.2) $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ $\quad \frac{\sin u}{u}$ est localement intégrable sur $[a,+\infty[$

$f = \frac{1}{u}$ $\quad f' = \frac{-1}{u^2}$

$g' = \sin u$ $\quad g = -\cos u$

f et g sont de classe C_1.

$\lim_{u \to +\infty} \frac{-\cos u}{u} = 0$

on peut donc intégrer par parties.

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \left[\frac{-\cos u}{u}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est par définition de même nature que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$

donc $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ existe.

On admet de même $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ existe

1.3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{a} \frac{\sin u}{u} du + \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

Il faut démontrer que $\int_0^{a} \frac{\sin u}{u} du$ existe

$\frac{\sin u}{u}$ est localement intégrable sur $]0,a]$

en 0, on sait que $\sin u \sim u$ et $\sin u$ et u gardent un signe constant au voisinage de 0^+

$\int_0^a \frac{u}{u}\,du = \int_0^a du$ existe

Donc grâce à cet équivalent, on peut dire que $\int_0^a \frac{\sin u}{u}\,du$ existe. Donc $\underline{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ existe}}$

2) $a \in \mathbb{R}^{+*}$ $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$\int_0^x \frac{\sin t}{t+a}\,dt$ soit le changement de variable de classe C^1

$u = t+a \qquad t = u-a$

$du = dt$

$\int_0^x \frac{\sin t}{t+a}\,dt = \int_a^{a+x} \frac{\sin(u-a)}{u}\,du$

$= \int_a^{a+x} \frac{\sin u \cos a - \cos u \sin a}{u}\,du$

$= \cos a \int_a^{a+x} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin a \int_a^{a+x} \frac{\cos u}{u}\,du$

Si x tend vers l'infini, $\cos a \int_a^{a+x} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin a \int_a^{a+x} \frac{\cos u}{u}\,du$

$= \cos a \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$

On sait que $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ existent donc

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a}\,dt$ existe et vaut $\cos a \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$

3) $\forall a \in]0,1[$ $\frac{\cos u}{u} \geq 0$ donc $\int_a^1 \frac{\cos u}{u}\,du \geq 0$

De plus $\int_a^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leq \int_a^1 \frac{1}{u}\,du$

$\int_a^1 \frac{1}{u}\,du = [\ln u]_a^1 = \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a)$

on a donc bien $\underline{0 \leq \int_a^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leq -\ln(a)}$

$\lim_{a \to 0} \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$

$\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_a^1 \frac{\cos u}{u}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$

Comme $\int_a^1 \frac{\cos u}{u}\,du$ tend vers un réel et que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est un réel, on en déduit que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est un réel l.

donc $\lim_{a \to 0} \sin a \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \lim_{a \to 0} (\sin a \cdot l) = 0$.

On a donc $\lim_{a \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{a+t}\,dt = \lim_{a \to 0} \cos a \int_a^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv - \lim_{a \to 0} \int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$

$= \lim_{a \to 0} \cos a \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - 0$

$= \lim_{a \to 0} \int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ car $\lim_{a \to 0} \cos a = 1$

On a donc bien $\lim_{a \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$