# PROBABILIDADE

Ministrante: Prof. Josemir Coelho Santos Material preparado pela Prof.a Regina Meyer Branski

# Programa

**Objetivos:** Apresentar os conceitos de probabilidades, incluindo estimadores, distribuições e noções de simulação estocástica

#### Programa

Introdução a Estatística e Probabilidade

Cálculo de Probabilidades e Variáveis Aleatórias

Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Distribuições de Probabilidade Conjuntas e Amostras Aleatórias

#### Metodologia:

Aulas expositivas e exercícios.

# Programa

Mês	Dia	Tema	Aula			
fevereiro	22 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Recepção aos Calouros (Não haverá aula)				
março	01 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Introdução à Estatística e à Probabilidade	1			
	08 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Conceitos Básicos de Probabilidade	2			
	15 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Probabilidade Condicional	3			
	22 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Probabilidade Condicional	4			
	29 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Tópicos Adicionais + Exercícios	5			
abril	04 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Discreta	6			
	11 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Discreta	7			
	18 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	NÃO HAVERÁ AULA – SEMANA SANTA				
	25 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Discreta	8			
	02 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	PROVA P1	9			
maio	09 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Contínua	10			
	16 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Contínua	12			
	23 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Contínua	13			
	30 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Distribuição de Probabilidade Contínua	14			
	06 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	Outras Distribuições Contínuas	15			
junho	13 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	PROVA P2	16			
	20 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	NÃO HAVERÁ AULA - Corpus Christi				
	27 (6ª feira – 14:00 às 15:40)	PSUB	17			

# Programa

**Critérios de avaliação:** Duas provas (P1 e P2) com pesos iguais (80% da nota) e exercícios/trabalhos feitos em sala ou em casa (20% da nota).

$$M = 0.8 \times ((P1 + P2)/2) + 0.2 \times ET$$

**IMPORTANTE (PSUB fechada):** Alunos que **FALTAREM** em uma das provas poderão, realizar uma prova substitutiva, desde que atendidas as seguintes condições:

- Frequência: (pelo menos 70% de comparecimento)
- Justificativa: apresentar uma adequada (atestado médico ou outro documento).

#### Bibliografia básica

Larson, R; Farber B. Estatística Aplicada. Editora Pearson. 4ª Edição. 2010

#### Bibliografia Complementar

- Bussab, W. O., Morettin, P. A. Estatística Básica. Editora Saraiva. 7° edição. 2012.
- Devore, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências.6° Edição. 2006.

# Visão Geral de Estatística e Probabilidade

- Objetivos
  - Definir estatística
  - Diferenciar População e Amostra
  - Diferenciar Parâmetros e Dados Estatísticos
  - Apresentar Estatística Descritiva, Probabilidade e Estatística Inferencial

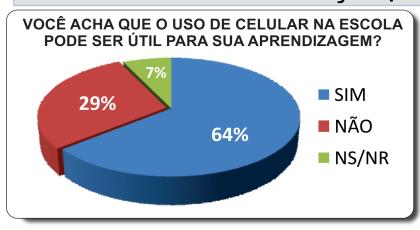
# O que são dados?



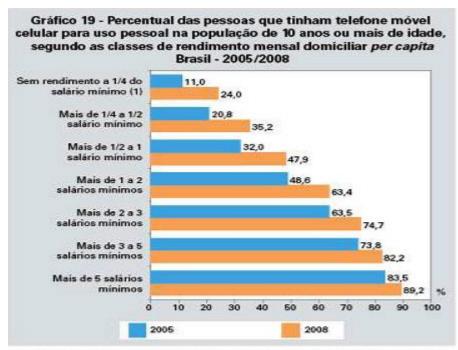


RPG?

Plural de dado, do latim dátus.a.um 'apresentado, entregue'. Resultado das observações, contagens, medições ou respostas.







Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicilios 2005/2008.

Nota: Exclusive as pessoas cuja condição na unidade domiciliar era pensionista, empregado doméstico ou parente do empregado doméstico.

 Inclusive as pessoas moradoras em unidades domiciliares cujos componentes recebiam somente em beneficios.

# A partir dos dados podemos fazer inferências!!

- "Pessoas que comem grãos integrais nas três refeições diárias têm risco de derrame reduzido em 37%." (Fonte: Whole Grains Council.)
- "Das 1.500 lesões na coluna vertebral em menores nos EUA, 70% são resultado de acidentes em veículos e 68% dos acidentados não usavam cinto de segurança." (Fonte: UPI.)

### Cuidado com os dados!!!

# REPORTAGEM – Celular: de vilão a mocinho

PESQUISA REVELA O QUE PENSAM OS ALUNOS DO MECCA SOBRE O USO DE CELULAR NA ESCOLA

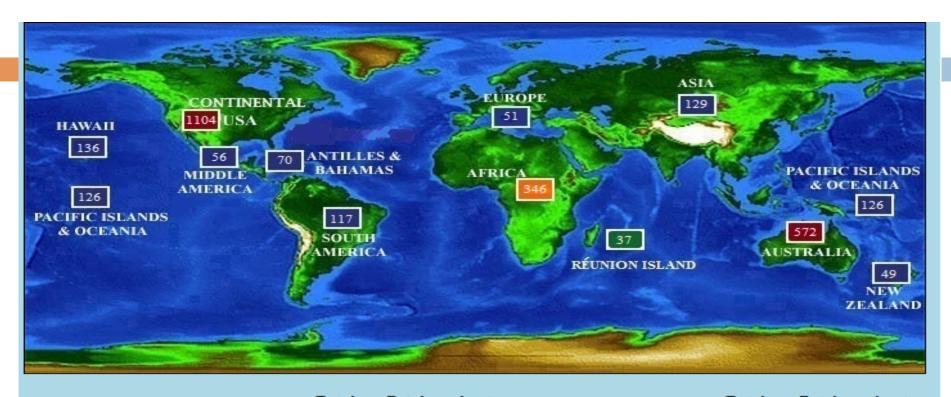
#### Bruna Alcântara e Jaine Rodrigues



Nos dias de hoje, encontrar um adolescente que não tenha celular virou raridade. Em uma pesquisa realizada pelo Jornal MeccAtitude com 42 alunos do período noturno (1º, 2º e 3º séries do Ensino Médio), revelou que apenas 10% não possuem aparelho celular.

De todos os 90% que possuem celular, apenas 12% não têm acesso à internet. Porém, dos 88% dos alunos que possuem internet, a maioria não usa o celular com maior prioridade para estudos e trabalhos escolares, e sim para redes sociais e músicas (confira gráficos ao lado).

## Cuidado com os dados!!!

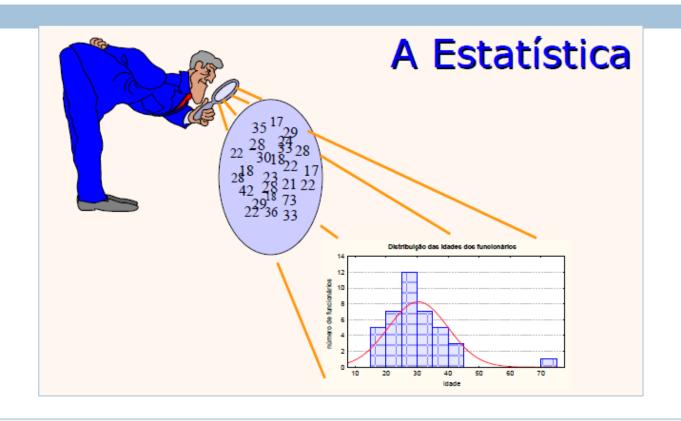


Territory	Total Attacks	Fatal Attacks	Last Fatality	Territory	Total Attacks	Fatal Attacks	Last Fatality
Continental USA	1104	35	2012	Antilles & Bahamas	70	16	2013
Australia	572	153	2014	Middle America	56	27	2011
Africa	346	94	2014	New Zealand	49	9	2013
Asia	129	48	2000	Europe	51	27	1974
Hawaii	136	9	2013	Réunion Island	37	17	2013
Pacific/Oceania Islands (w/out Hawaii)	126	49	2011	Unspecified/Open Ocean	21	7	1995
South America	117	26	2013				
	_			WORLD	2,777	497	2014
500 and above	20	00 - 499		40 - 199 1 - 39	)	0	

### Os dados!



## Estatística



Conjunto de técnicas para coletar, organizar, descrever e interpretar dados para apoio à tomada de decisões

# Alguns Conceitos...



# Conjunto de Dados

População



Amostra

# População e Amostra

- População
  - Conjunto completo de indivíduos ou objetos de interesse
    - Todos os alunos que já cursaram faculdade no Brasil
    - ■Todas as sequoias da Califórnia
- Amostra
  - Conjunto de indivíduos ou objetos selecionados a partir da população
    - Conjunto das 25 alturas de 25 alunos da escola A

# Conjunto de Dados

- □ Faz-se um levantamento de dados com o Interesse em identificar um conjunto de variáveis específicas
  - p. ex.: idade, cor do cabelo, altura e peso.
- □ Valores de Dados:
  - valor para cada variável associada a um elemento da população ou amostra (número, palavra ou símbolo).
- Quando João entrou na faculdade tinha 23 anos, cabelo castanho, media 1,80 m e pesava 85 kg.
  - Valores das quatro variáveis aplicadas a João

# Ex: Identificar conjunto de dados

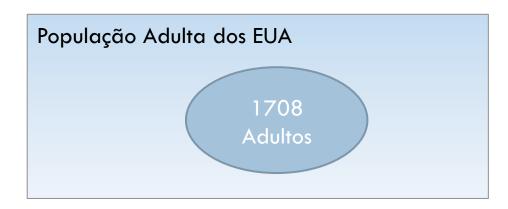
Em uma pesquisa recente nos EUA, 1.708 adultos foram questionados se achavam que o aquecimento global era um problema que requeria ação governamental imediata. 939 adultos disseram sim. Identifique a população e a amostra. Descreva o conjunto de dados. (Adaptado de: Pew Research Center.)

# Identificar conjunto de dados

□ População:	
□ Amostra:	
□ Conjunto de dados:	

# Identificar conjunto de dados

- População: Todos os adultos dos EUA
- Amostra:1708 adultos
- □ Conjunto de dados: 939 sim e 769 não



### Exercícios

- □ Identifique População e Amostra
  - Um estudo com 33.043 crianças na Itália foi conduzido para encontrar a ligação entre anormalidades no ritmo cardíaco e síndrome da morte súbita.
  - Uma pesquisa com 1000 usuários de computador descobriu que 17% planejam comprar o sistema operacional Windows.
  - Pesquisa com 496 estudantes de uma faculdade descobriu que 10% planejam viajar para fora do país durante as férias
  - Uma pesquisa com 546 mulheres descobriu que mais de 56% são o investidor primário em suas residências.

### Parâmetros e Estatística

#### Parâmetro

- Número que descreve uma característica da população
  - Idade média da população dos Estados Unidos

#### Estatística

- Número que descreve uma característica da amostra
  - Idade média da população de três estados dos EUA

 Decida se o valor numérico descreve um parâmetro populacional ou uma estatística amostral.

Uma pesquisa recente de uma amostra de MBAs revelou que o salário médio de um MBA é superior a \$ 82.000 a.a. (Fonte: The Wall Street Journal.)

Uma pesquisa recente de uma amostragem de MBAs revelou que o salário médio de um MBA é superior a \$ 82.000. (Fonte: The Wall Street Journal.)

#### Estatística amostral

(a média de \$ 82.000 é baseado em uma parte da população).

O salário inicial dos 667 MBAs da University of Chicago Graduate School of Business aumentou 8,5% desde o ano passado

O salário inicial dos 667 MBAs da University of Chicago Graduate School of Business aumentou 8,5% desde o ano passado

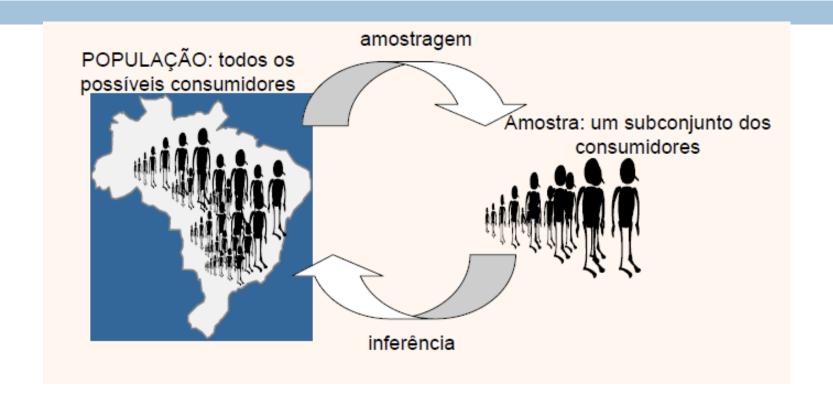
#### Parâmetro populacional

(porcentagem de 8,5% é baseada nos salários iniciais de todos os 667 graduados).

### Exercícios

- Distinguir Parâmetro e Estatística
  - Média dos salários anuais para 35 dos 1200 contadores de uma empresa é \$ 68.000
  - Sessenta e dois dos 97 passageiros a bordo da aeronave sobreviveram à sua explosão.
  - Categoria de interesse para 12% de todas as revistas foi esportes
  - Em pesquisa com 1503 adultos nos EUA, 53% disseram que usam tanto a linha fixa quanto o telefone celular

### Estatística

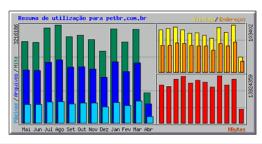


Essência da análise estatística é tirar conclusões sobre uma população a partir de uma amostra

### Ramos da Estatística

#### Estatística Descritiva

Envolve informações, números e gráficos de forma resumida



Resumo Mensal										
Mês	Média diária				Total Mensal					
	Hits	Arquivos	Páginas	Visitas	Endereços	KBytes	Visitas	Páginas	Arquivos	Hits
Abr 2007	89853	56865	19098	3063	23434	4046054	33699	210087	625518	988393
Mar 2007	99102	63822	23112	3335	65687	12869748	103402	716476	1978508	3072184
Fev 2007	94530	60398	20393	3114	57549	11083680	87200	571008	1691169	2646863
Jan 2007	99216	64522	21731	3163	62513	13924359	98079	673690	2000200	3075710
Dez 2006	75709	48482	17189	2412	47670	10545345	74793	532867	1502961	2346994
Nov 2006	91047	58659	21738	2691	57379	12063974	80745	652157	1759785	2731428
Out 2006	92668	59781	21106	2786	57687	12593577	86392	654295	1853229	2872732
Set 2006	94363	61149	20842	2846	58156	11779954	85384	625271	1834485	2830897
Ago 2006	103747	66770	22840	2989	63111	13691140	92660	708067	2069874	3216186
Jul 2006	100306	64277	22447	3198	64321	12859668	99162	695875	1992594	3109486
Jun 2006	88076	57336	20422	3172	58046	10777765	95170	612662	1720095	2642292
Mai 2006	86031	55837	19705	2985	58207	11183023	92548	610871	1730961	2666989
Totais						137418287	1029234	7263326	20759379	32200154

#### **Estatística Inferencial**

Envolve tirar conclusões sobre a população a partir da amostra



# E o papel da Probabilidade?

□ Probabilidade é o veículo da estatística Probabilidade Estatística

## E a Probabilidade?

- Probabilidade é o veículo da estatística
- Probabilidade: investiga a chance de ocorrer algo específico se você conhece a população
- Estatística: extrai uma amostra, descreve a amostra e faz inferências sobre a população
- □ Em um conjunto com 20 fichas verdes, 20 vermelhas e 20 azuis
  - Probabilidade: se eu tirar uma ficha, qual a chance dela ser verde?
  - Estatística: sem conhecer o conjunto de fichas, extrai uma amostra e com base nela faço conjecturas sobre o conjunto

#### Estatística Descritiva X Estatística Inferencial

□ Uma amostra de homens de 48 anos foi estudada por 18 anos. Para homens não casados, aproximadamente 70% estavam vivos aos 65 anos. Para os casados, 90% estavam vivos aos 65 anos. (Fonte: The Journal of Family Issues

#### Estatística Descritiva X Estatística Inferencial

Estatística descritiva envolve afirmações como: "Para homens não casados, aproximadamente 70% estavam vivos aos 65 anos" e "Para homens casados, 90% estavam vivos aos 65 anos".

#### Estatística Descritiva X Estatística Inferencial

Estatística descritiva envolve afirmações como: "Para homens não casados, aproximadamente 70% estavam vivos aos 65 anos" e "Para homens casados, 90% estavam vivos aos 65 anos".

Uma inferência possível tirada desse estudo é que ser casado está associado com uma vida mais longa para homens.

### Exercícios

- Em estudo recente, voluntários que dormiram 8 horas em uma noite eram três vezes mais capazes de responder corretamente às questões de um teste de matemática em relação àqueles que não tiveram horas de sono suficientes.
- a) identifique a amostra
- □ b) qual a população
- c) que parte representa o ramo descritivo da estatística
- d) faça uma inferência com base nos resultados

# Vimos até agora!

- □ Definição de Estatística
- Diferenciação entre População e Amostra
- Diferenciação entre Parâmetros e Dados Estatísticos
- Diferenciação entre Estatística Descritiva e Inferencial
- □ Relação entre Estatística e Probabilidade

# Classificação dos Dados

Dados Qualitativos

Dados Quantitativos

## Dados Qualitativos

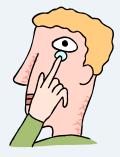
 Consistem em atributos, qualidades ou entradas não numéricas



Nível de Graduação



Local de Nascimento



Cor dos Olhos

### Dados Quantitativos

■ Medidas ou contagens numéricas.



Idade

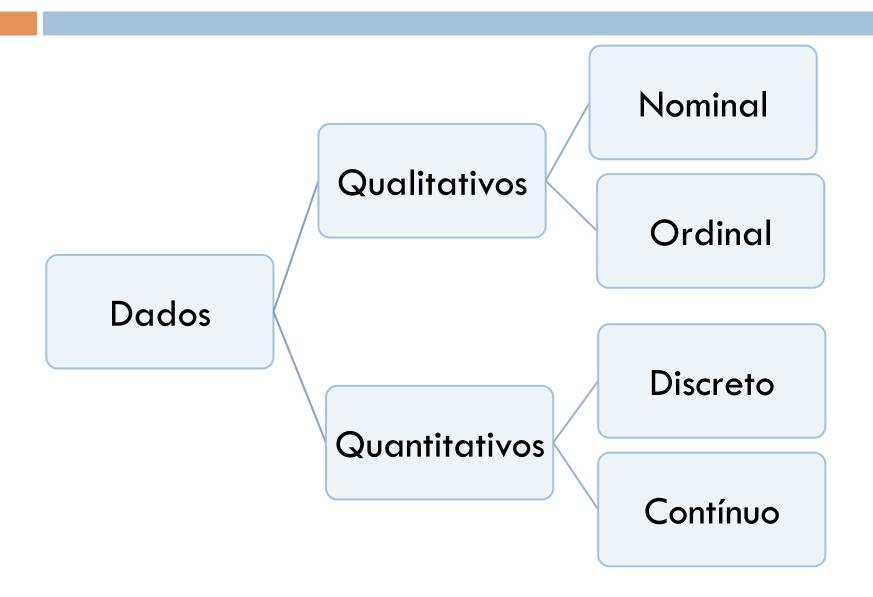


Peso



**Temperatura** 

## Tipos de dados



### Tipos de Dados

- □ Amostra de 4 clientes de salão de beleza
- Coletada cor de cabelo, cidade de origem e nível de satisfação com o serviço executado pelo salão.
- Variáveis qualitativas (atributos)
  - Loiro, castanho, preto, castanho
  - □Guarujá, São Vicente, Santos e São Paulo
  - Muito satisfeito, satisfeito, pouco satisfeito, insatisfeito

## Tipos de Dados

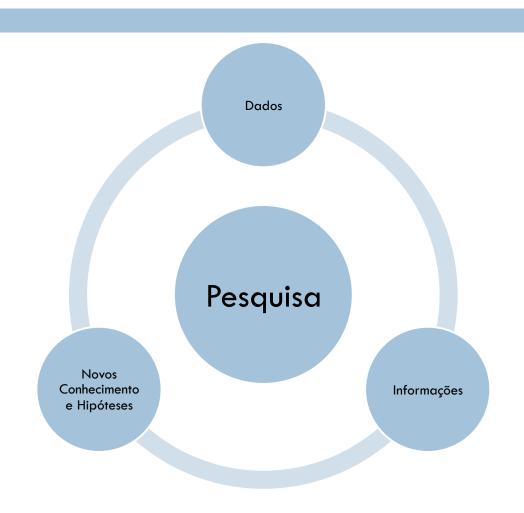
#### Dados Discretos

- Número de ligações que um vendedor faz em um único dia
  - 0, 1, 2, 3.....(pode ser representado como pontos na reta numérica)
- Notas dos juízes em uma competição de patinação
  - 9,9 8,8 8,7 9,8

#### Dados Contínuos

 Tempo médio diário que o telefone de uma central de atendimento fica ocupado (pode ser qualquer número entre 0 e 24h)

## Estatística e Pesquisa



#### Estudo Estatístico

#### **PASSOS:**

- Planejar o Estudo
- Apresentar técnicas para coleta de dados
- Planejar um experimento
- Discutir técnicas de amostra

### Planejamento de Estudo Estatístico

- Identificar variáveis de interesse e a população do estudo
  - Ex.: Tempo de recuperação de pacientes com certa doença;
  - Ex.: Renda total das famílias brasileiras
- Definir sistema de coleta e medição dos dados
  - Inclui método de amostragem, tamanho da amostra etc.
- Coletar amostra
  - Selecionar o que será incluído na amostra e coletar os dados. A amostra deve ser representativa da população.
- 4. Revisar o processo de amostragem após a coleta

- Experimental
- Observacional
- Pesquisa
- □ Simulação

#### Estudo Experimental

- O pesquisador controla ou modifica o ambiente e observa o efeito sobre a variável de estudo
- Ex.: Experimento no qual diabéticos tomam extrato de canela diariamente, enquanto um grupo de controle não. Depois de 40 dias, os diabéticos que tomaram canela reduziram o risco de doenças do coração, enquanto o grupo de controle não apresentou mudanças

Fonte: Diabetes Care

- Estudo Observacional
  - Pesquisador observa o processo sem interferir em nada
  - Ex.: Pesquisadores observaram e registraram o comportamento oral de crianças acima de três anos de idade com objetos não comestíveis

Fonte: Pediatric Magazine

- Pesquisa
  - Investigação de uma ou mais características de uma população
  - Ex.: Estudo conduzido em uma amostra de mulheres médicas para determinar se a motivação primária para a escolha de suas carreiras é estabilidade financeira

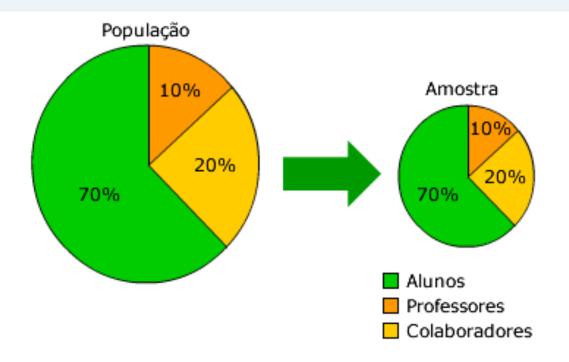
- □ Simulação
  - Usa modelos matemáticos ou físicos para reproduzir as condições de uma situação ou processo
  - Ex.: Empresas automobilísticas fazem simulações com bonecos para estudar os efeitos de acidentes em pessoas

Que método de coletas de dados pode ser usado em cada estudo abaixo? (Experimental, Observacional, Pesquisa ou Simulação)

- Estudo do efeito da mudança dos padrões de voo no número de acidentes com aviões
- Um estudo sobre o efeito da aveia para abaixar a pressão sanguínea
- Um estudo sobre como alunos da quarta série montam um quebra-cabeça
- Um estudo dizendo se os residentes nos EUA aprovam seu presidente ou não.

## Técnicas de Amostragem

- Processo de seleção de itens ou eventos que serão a amostra.
- Amostras devem representar com precisão a população



## Técnicas de Amostragem

- Como garantir que um método produzirá bons dados?
  - Amostras tendenciosas
    - Selecionadas por julgamento, conveniência etc.
    - Dados diferem sistematicamente da população
  - Amostras aleatórias
    - Todos os membros da população tem chances iguais de serem selecionados
    - Dados representam a população

### Amostra Aleatória Simples

- Toda amostra possível de mesmo tamanho tem a mesma chance de ser selecionada
- Aleatório = Chances Iguais
  - e não ao acaso, sem padrão
- A ideia é que o próximo resultado não é previsível
- Por que criar uma amostra aleatória simples?
  - Para ser imparcial. Procedimentos estatísticos só valem para amostras aleatórias

# Como gerar uma Amostra Aleatória Simples?

- Numera-se toda a população
- Geram-se números aleatórios (por meio de tabelas, calculadoras, softwares, sorteios etc.)
- Membros da população correspondentes aos números aleatórios gerados farão parte da amostra

## Amostra Aleatória Simples

Ex.: Há 731 estudantes que inscreveram-se no curso de estatística em sua faculdade. Você deseja formar uma amostra de oito estudantes para responder às questões de uma pesquisa. Selecione os estudantes que pertencerão à amostra aleatória simples

### Amostra Aleatória Simples

- Dê números de 1 até 731 para cada estudante de estatística
- 2. Na tabela de números aleatórios, escolha um espaço inicial aleatoriamente (p. ex.: comece na segunda coluna da terceira linha)

#### Tabela de Números aleatórios

92630 78240 19267 95457 53497 23894 37708 79862 79445 78735 71549 44843 26104 67318 00701 34986 59654 71966 27386 50004 05358 94031 29281 18544 31524 49587 76612 39789 13537 48086 59483 60680 06348 76938 90379 51392 55887 71015 09209 79157

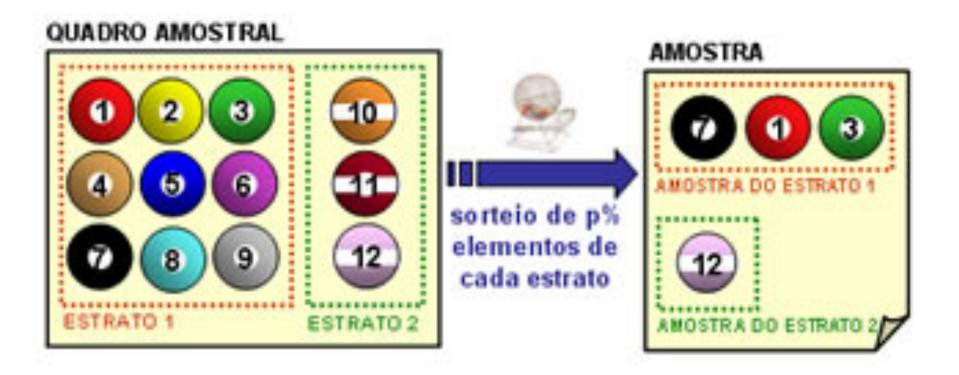
3. 719 - 662 - 738 - 650 - 004 - 053 - 589 - 403 - 129

### Outras Técnicas de Amostragem

- Amostra Estratificada
- Amostra por Agrupamento
- □ Amostra Sistemática

### Outras Técnicas de Amostragem

#### Amostra Estratificada

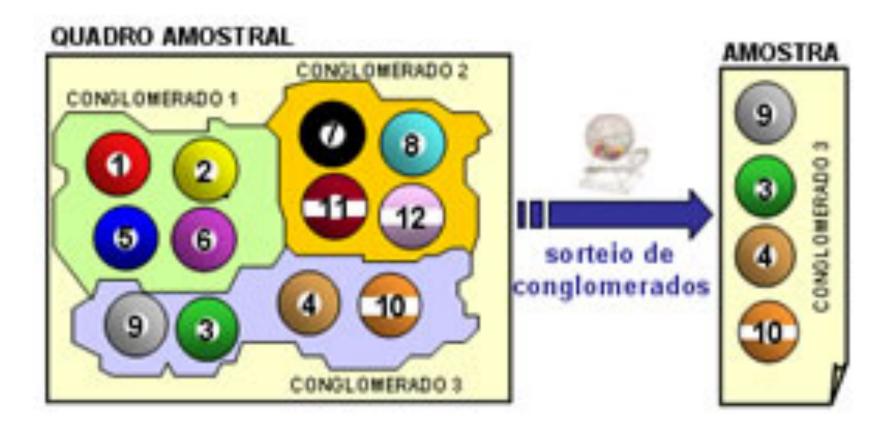


#### Amostra Estratificada

- Divida a população em grupos (estrato) e selecione uma amostra aleatória de cada grupo
  - Ex.: Para coletar uma amostragem estratificada do número de pessoas que vivem em casas na cidade de Santos, divida as casas em níveis socioeconômicos e selecione casas aleatoriamente em cada nível

### Outras Técnicas de Amostragem

#### Amostra por Agrupamento



### Amostra por Agrupamento

- A população já esta divida em grupos considerados igualmente representativos da população.
- Seleciona-se um grupo aleatóriamente para compor a amostra
  - Ex.: Para saber a opinião sobre uma visita a um museu em que no transporte os 120 alunos de uma escola foram dividos aleatóriamente em 3 onibus de 40 lugares, podese se selecionar os passageiros de um onibus para representar a população.

### Outras Técnicas de Amostragem

Amostra Sistemática



### Amostra Sistemática

- Escolha um valor inicial aleatoriamente. Então,
  separe todo x<sup>o</sup> membro da população
- Ex.: Na cidade de Santos, dar um número diferente para cada casa, escolher um número inicial aleatório e, então, escolher toda 100º casa.
- Resultados próximos à amostragem aleatória



#### Exercício

- Para realizar um estudo para determinar a opinião dos estudantes em sua escola sobre a pesquisa com célulastronco você pode escolher um dos 3 métodos abaixo. Identifique a técnica de amostragem usada em cada caso.
  - Seleciona-se uma classe aleatoriamente e questiona-se cada aluno da classe
  - Divide-se a população de estudantes com relação às graduações, seleciona-se aleatoriamente e questiona-se alguns alunos de cada curso
  - Designa-se um número para cada aluno e geram-se números aleatoriamente. Então, questionam-se os estudantes que correspondem aos números aleatórios.

### Próxima Aula: Conceitos Básicos de Probabilidade

- 1.1 Espaço amostral de um experimento
- 1.2 Eventos simples
- 1.3 Princípio fundamental da contagem
- 1.4 Tipos de Probabilidade
- 1.5 Regra da Amplitude
- 1.6 Eventos Complementares