

Mecânica Quântica II - 4302404

2ª lista

1) Use a equação de movimento de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H],$$

no caso de uma partícula livre de massa m , para determinar:

a) o operador posição, $x_H(t)$.

b) O operador momento, $p_H(t)$.

c) Mostre que $[x_H(t_1), x_H(t_2)] = \frac{i\hbar}{m}(t_2 - t_1)$, onde t_1 e t_2 são dois instantes distintos.

2) Faça o mesmo que o exercício 1) para o oscilador harmônico, em uma dimensão, de uma partícula de massa m e frequência ω .

3) Considere um oscilador harmônico cuja Hamiltoniana é dada por:

$$H = \hbar\omega \left(a_{+H}a_{-H} + \frac{1}{2} \right).$$

Sabendo que $[a_{-H}, a_{+H}] = 1$, use a equação de movimento de Heisenberg para determinar os operadores levantamento e abaixamento: $a_{+H}(t)$ e $a_{-H}(t)$. Usando isso mostre explicitamente que H não depende de t .

4) Lembrando que em três dimensões podemos escrever:

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right) + V(\vec{r}),$$

onde

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Mostre que para um potencial central: $V(\vec{r}) = V(r)$, o momento angular, L^2 , é uma grandeza conservada.

5) Suponha que se coloque um “calombo” na forma de uma função delta de Dirac no centro do poço quadrado infinito:

$$H' = \alpha \delta(x - a/2),$$

onde α é constante.

a) Encontre a correção de primeira ordem para a energia. Explique porque as energias não sofrem correções para n par.

b) Encontre os três primeiros termos não nulos para a expansão da correção da função de onda do estado fundamental.

c) Encontre a correção de segunda ordem para a energia.

6) Dois bósons idênticos são colocados num poço quadrado infinito. Eles interagem fracamente um com o outro pelo potencial:

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2),$$

onde V_0 é uma constante com dimensão de energia, e a é a largura do poço.

a) Ignorando a interação entre os bósons, encontre o estado fundamental e o primeiro estado excitado, tanto para as funções de onda quanto para as energias do sistema.

b) Use a teoria de perturbação em primeira ordem para estimar o efeito da interação entre as partículas na energia do estado fundamental e do primeiro estado excitado.

7) Considere uma partícula carregada num potencial harmônico unidimensional com frequência angular ω . Suponha que esse sistema esteja numa região onde existe um pequeno campo elétrico constante E , tal que o potencial é mudado pela pequena quantidade $H' = -qEx$. Escreva a Hamiltoniana do sistema.

a) Calcule a correção de primeira ordem para a energia do sistema.

b) Mostre que a correção do primeiro estado excitado em primeira ordem é dado por

$$|1^{(1)}\rangle = -\frac{qE}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(|0\rangle - \sqrt{2}|2\rangle).$$

c) Calcule as correções em segunda ordem para a energia.

d) A equação de Schrödinger pode ser resolvida diretamente (neste caso) pela mudança de variáveis: $x' = x - \frac{qE}{m\omega^2}$. Encontre as energias exatas e compare com os resultados do item anterior.

8) Considere a hamiltoniana

$$H = H_0 + V$$

onde H_0 é a hamiltoniana de um oscilador harmônico bidimensional

$$H_0 = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$$

e V é a perturbação,

$$V = \delta m\omega^2 XY,$$

onde δ é uma constante.

a) Qual é o autoestado de H_0 de mais baixa energia? Existe degenerescência?

b) Determine, para esse estado, a correção de primeira ordem para o autoestado e até segunda ordem para a energia.

9) A hamiltoneana de uma partícula de massa m e carga e que se move no plano sob a ação de um potencial de um oscilador harmônico e de um campo magnético externo constante e perpendicular ao plano é:

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) - \lambda L_z$$

onde $\lambda = \frac{eB_0}{2mc}$. Considere o termo que depende do campo magnético como a perturbação.

a) Ache os seis estados não perturbados de mais baixa energia. Existe degenerescência?

b) Para os estados degenerados com energia igual a $2\hbar\omega$, calcule os autoestados de ordem zero e as energias em primeira ordem.

10) A hamiltoneana de duas partículas de spin $1/2$ é dada por:

$$H = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{2\mu B}{\hbar} S_{1z}$$

Considere o primeiro termo como a hamiltoneana não perturbada e o segundo termo como a perturbação.

- Ache os autovetores e autovalores de H_0 . Existe degenerescência?
- Para o estado não degenerado calcule a energia até segunda ordem e o autoestado até primeira ordem em teoria de perturbação.
- Para os estados degenerados ache os autovetores em ordem zero e a energia até primeira ordem em teoria de perturbação.

11) Considere um sistema quântico que tem apenas três estados linearmente independentes. A representação matricial de H é:

$$H = V_0 \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix}$$

onde V_0 e ϵ são constantes, com $0 \leq \epsilon \leq 1$.

- Determine os autovetores e autovalores de H_0 , ou seja, quando $\epsilon = 0$.
- Determine os autovalores de H e expanda cada uma das soluções em potências de ϵ até ordem ϵ^2 .
- Para o estado não degenerado calcule a energia até segunda ordem em teoria de perturbação e compare com o resultado do item anterior.
- Use teoria de perturbação degenerada para calcular as correções de primeira ordem na energia para os dois estados degenerados de H_0 . Compare com o resultado do item b).

12) Considere o poço quadrado infinito tri-dimensional. Determine as funções de onda e as energias do estado fundamental e do primeiro estado excitado. Existe degenerescência?

- Introduza agora a perturbação:

$$H'(x, y, z) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x < a/2, \quad 0 \leq y < a/2 \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Determine a correção de primeira ordem na energia para o estado fundamental.

- Para os estados degenerados de mais baixa energia ache os autovetores em ordem zero e a energia até primeira ordem em teoria de perturbação.

13) Considere um sistema quântico só de dois estados com dinâmica

$$H_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

e considere a perturbação

$$H' = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \mu^* & \beta \end{pmatrix}.$$

- Calcule as correções de primeira ordem e de segunda ordem na energia.
- Calcule os novos estados até primeira ordem em teoria de perturbação.

14) Considere os estados de um elétron numa molécula diatômica formada pelos átomos E e D , onde a distância entre E e D é d . Chamando de ψ_E e ψ_D os autovetores de um observável B , que corresponde ao elétron estar localizado na vizinhança dos átomos E e D respectivamente:

$$B\psi_E = -\frac{d}{2}\psi_E, \quad B\psi_D = \frac{d}{2}\psi_D.$$

O hamiltoniano do sistema na base ψ_E, ψ_D é dado por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -a \\ -a & E_0 \end{pmatrix}$$

onde $a > 0$.

- a) Calcule exatamente os autovalores e autovetores de H .
- b) Qual a probabilidade de se encontrar o elétron na vizinhança de E se ele está no estado fundamental?
- c) Calcule perturbativamente os níveis de energia e autovetores de H considerando

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

15) Considere um rotor simétrico com

$$H_0 = \frac{L^2}{2I}.$$

- a) Determine os autovalores e autovetores do sistema.
- b) Considere a perturbação: $H' = A \cos^2 \theta$. Quais são as correções em primeira ordem na energia e em ordem zero nos autovetores para os estados com $l = 1$?
- c) Considere a perturbação: $H' = \alpha L_x$. Quais são as correções em primeira ordem na energia e em ordem zero nos autovetores para os estados com $l = 1$?