

1. Lista de Exercícios Álgebra 1 noturno 2019  
Entregar dia

1.ª Questão: Sejam  $a, b, c$  inteiros. Prove que:

a)  $a^2 - ab + b^2 \geq 0$       c)  $a + a + \dots + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b)  $a < b \Leftrightarrow a^5 < b^5$       d)  $a^2 + 1 \neq 0$ .

2.ª Questão: Seja  $P = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\}$ . Prove que

a) Se  $a \in P$  e  $b \in P$  então  $a + b \in P$

b) Se  $a \in P$  e  $b \in P$  então  $ab \in P$

c) Vale para todo  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x = 0$  ou  $x \in P$  ou  $-x \in P$ .

3.ª Questão:

Assuma que temos um conjunto  $X$  com uma operação, que denotamos por  $+$  que é associativa, tem elemento neutro e todo elemento admite um oposto.

A lém disso existe em  $X$  um subconjunto  $P$  satisfazendo as condições a, b, c acima.

Definimos em  $X$  a relação  $\leq$  da seguinte forma:  $a \leq b$  significa  $a = b$  ou  $b - a \in P$ .

Prove que  $\leq$  é uma relação de ordem total compatível com a operação  $+$ .

3) Em  $P = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$

definimos a relação:

$a | b \Leftrightarrow$  existe  $c \in P$  tal que  $ac = b$ .

Prove que essa é uma relação de ordem.

(Isto é reflexiva, transitiva e anti-simétrica)

Mostre com um exemplo que não é total. Isto existem  $x, y$  tais que  $x \nmid y$  e  $y \nmid x$

4) Prove que as seguintes formulas são verdadeiras para todo inteiro  $n$  maior que zero.

$$1) 1^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{1}{2} n(n+1) \right]^2$$

$$2) \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

$$3) 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$4) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

5) Determine o erro da seguinte "demonstração".

Afirmacao Todos subconjuntos finitos tem um <sup>único</sup> elemento.

"Prova":  $P(1)$  é verdadeira.

Suponha que  $n \geq 1$  e  $P(n)$  é verdadeira.

Considere  $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

Por indução o conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$

tem 1 elemento, logo  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

O conjunto  $\{a_2, \dots, a_{n+1}\}$  tem ~~dois~~

1 elemento. Logo  $a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$

Portanto  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$  e o

resultado segue por indução

6) Prove que o n.º de subconjuntos de um conjunto com  $n$  elementos é  $2^n$ .

7) Seja  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que satisfaz as seguintes duas propriedades

1)  $f(1) = 1$       2)  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  para todo par de inteiros  $(a, b)$ .

Prove que  $f$  é a identidade

8) Em cada uma das proposições diga o que é hipótese e o que é tese:

a) 4 é par somente se 3 é primo.

b) Se 4 é par então 3 é primo

c) Se 3 é primo então 4 é par

d) Para 3 ser primo é suficiente que 4 seja par.

9) Prove que o n.º de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados é

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

10) Sejam  $a, b$  inteiros prove que.

$$i) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$ii) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$iii) n! > n^2 \text{ se } n \geq 4$$

$$iv) n! > n^3 \text{ se } n \geq 6$$