ACH3584 - Estatística II

Aulsa 11 e 12: Procedimento Geral do Teste de Hipóteses

Alexandre Ribeiro Leichsenring
alexandre.leichsenring@usp.br

Organização

Procedimento Geral do Teste de Hipóteses para a Média

- Existe uma variável X associada a dada população e tem-se uma hipótese sobre o parâmetro μ dessa população
- Colhe-se uma amostra aleatória de elementos dessa população, e com ela deseja-se comprovar ou não tal hipótese.
- Especificamos claramente qual a hipótese que estamos colocando à prova: *hipótese nula*

  H_0: $\mu = \mu_0$

- Em seguida, explicitamos a hipótese que será considerada aceitável caso H_0 seja rejeitada: *hipótese alternativa*.

  A alternativa mais geral seria:

  H_1: $\mu \neq \mu_0$

  Poderíamos ainda ter alternativas da forma:

  H_1: $\mu < \mu_0$ ou H_1: $\mu > \mu_0$

- Qualquer que seja a decisão tomada, estamos sujeitos a cometer erros
- Para facilitar a linguagem, introduzimos as definições:
  - Erro de tipo I: rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira

$$\alpha = \mathbf{P}(\text{erro do tipo I}) = \mathbf{P}(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$$

  - Erro de tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

$$\beta = \mathbf{P}(\text{erro do tipo II}) = \mathbf{P}(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

- O objetivo do teste de hipóteses e dizer, usando a estatística $\bar{X}$, se a hipótese H_0 é ou não aceitável
- A decisão é tomada através da consideração de uma região crítica RC:
  - Se $\bar{X} \in RC \Rightarrow$ Rejeitamos H_0
  - Se $\bar{X} \notin RC \Rightarrow$ Não rejeitamos H_0
- A RC é construída de modo que

$$\mathbf{P}(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

com α fixado a *priori*

Observações

- A região crítica é sempre construída sob a hipótese de H_0 ser verdadeira
- A determinação do valor de β é mais difícil, pois usualmente não especificamos valores fixos para o parâmetro sob a hipótese alternativa

Nível de significância

- A probabilidade α de se cometer um erro de tipo I é um valor arbitrário e recebe o nome de nível de significância do teste
- Quanto menor α, mais significante uma eventual rejeição de H_0
- Usualmente, α é fixado em 5%, 1% ou 0,1%
- A fixação do valor de α envolve questionável arbitrariedade
- À frente veremos alternativas

Organização

1. Procedimento Geral do Teste de Hipóteses para a Média
2. Roteiro para a construção de um Teste de Hipóteses
3. Testes sobre a Média de uma População com Variância Conhecida

Roteiro para a construção de um Teste de Hipóteses

1. Especifique a hipótese H_0 a ser testada e a hipótese alternativa H_1
2. Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual estatística (estimador) será usada para testar a hipótese H_0
   - No caso da média: $\bar{X}$
3. Fixe a probabilidade α de cometer o erro de tipo I e use este valor para construir a região crítica RC
4. Use as observações da amostra para calcular o valor de $\bar{X}$
5. Observado o valor $\bar{X}$ na amostra:
   - Se $\bar{X} \in RC \Rightarrow$ Rejeitamos H_0
   - Se $\bar{X} \notin RC \Rightarrow$ Não rejeitamos H_0

Observações sobre H_0 e o erro de tipo I

- Devemos tomar como H_0 a hipótese, que, rejeitada, conduza a um erro de tipo I mais importante de evitar

Exemplo

- Suponha um experimento para se determinar se um produto A é ou não cancerígeno
- Após realizado o teste, podemos concluir:
  - i) A é cancerígeno; ou
  - ii) A não é cancerígeno
- Cada uma dessas conclusões pode estar errada e temos os dois tipos de erro já mencionados (que vão depender de como H_0 é especificada)
- Do ponto de vista do usuário do produto, a hipótese a ser testada deve ser:

  H_0 : A é cancerígeno

  pois se H_0 for verdadeira, é preciso que se cometa o erro de rejeitá-la com probabilidade muito pequena

Organização

1. Procedimento Geral do Teste de Hipóteses para a Média

2. Roteiro para a construção de um Teste de Hipóteses

3. Testes sobre a Média de uma População com Variância Conhecida

Testes sobre a Média de uma População com Variância Conhecida

Exemplo

Sabe-se que o consumo mensal per *capita* de um determinado produto tem distribuição normal, com desvio padrão 2 kg. A diretoria de uma firma que fabrica esse produto resolveu que retiraria o produto da linha de produção se a média de consumo per *capita* fosse menor que 8 kg. Caso contrário, continuaria a fabricá-lo. Foi realizada uma pesquisa de mercado, tomando-se uma amostra de 25 indivíduos, e verificou-se $\bar{x}_0 = 7,2kg$.

a) Construa um teste de hipótese adequado, utilizando $\alpha = 0,05$, e com base na amostra colhida determine a decisão a ser tomada pela diretoria.

b) Considerando o critério de decisão estabelecido no item a), qual será a probabilidade β de se tomar uma decisão errada se, na realidade, a média populacional for $\mu = 7,8\ kg$?

c) Reconstrua o teste feito no item a), considerando um nível de significância $\alpha = 0,01$. Nesse caso, a decisão será a mesma? (Justifique)

d) Reconstrua o teste feito no item a) considerando o desvio padrão da população igual a 4 kg. Mantendo o mesmo nível de significância, qual seria a decisão? (Justifique)

Solução . Item (a)

1. Retirar o produto do mercado é uma atitude relativamente drástica. Vamos controlar o erro que nos levaria a retirar indevidamente o produto do mercado, isto é, concluir que o consumo médio é menor do que 8 quando não é. Para isso, basta definir:

   H_0 : O consumo não é menor do que 8 *kg* ($\mu \geq 8$)

   H_1 : O consumo é menor do que 8 *kg* ($\mu < 8$)

2. $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Sob H_0 ($\mu = 8$), $\bar{X} \sim N\left(8; \frac{2^2}{25}\right) = N\left(8; \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$

3. $\alpha = 0,05$ (dado).

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,05 &= \mathbf{P}(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) \\
&= \mathbf{P}(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ verdadeira}) \\
&= \mathbf{P}(\bar{X} < x_c | H_0 \text{ verdadeira}) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X} - 8}{2/5} < \frac{x_c - 8}{2/5} | H_0 \text{ verdadeira}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Z < \frac{x_c - 8}{2/5}\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$z_c = -1,645 = \frac{x_c - 8}{2/5} \Rightarrow x_c = 7,34$$

Item (a)

3. (continuação...) Assim: $RC = \{x \in \mathbb{R} | x < 7,34\}$
4. $\bar{x}_0 = 7,2$
5. $\bar{x}_0 < x_c \Rightarrow \bar{x}_0 \in RC$. Logo, rejeitamos H_0.

Item (b)

Se $\mu = 7,8$, então o erro seria concluir que o consumo não é menor do que 8, quando na verdade é. Ou seja, o erro seria aceitar H_0 quando H_0 é falsa.

A RC foi construída no item (a): $RC = \{x \in \mathbb{R} | x < 7,34\}$.

$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathbf{P}\left(\text{Aceitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bar{X} \notin RC | H_0 \text{ falsa}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bar{X} > 7,34 | \mu = 7,8\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X} - 7,8}{2/5} > \frac{7,34 - 7,8}{2/5} | \mu = 7,8\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Z > -1,15\right) \\
&= 0,87
\end{aligned}
$$

Item (c) Exercício!

Item (d) Exercício!

Item (c)

Se a diretoria tivesse fixado $\alpha = 0,01$, precisaríamos determinar nova região crítica e confrontá-la com $\bar{x}_0$.

No passo 3 do item (a), encontramos:

$$0,05 \quad = \quad \mathbf{P}\left(Z < \frac{x_c - 8}{2/5}\right)$$

Com o novo nível de significância ($\alpha = 0,01$), devemos ter:

$$0,01 \quad = \quad \mathbf{P}\left(Z < \frac{x_c - 8}{2/5}\right)$$

Logo,

$$z_c = -2,32 = \frac{x_c - 8}{2/5} \Rightarrow x_c = 7,07$$

Assim: $RC = \{x \in \mathbb{R} | x < 7,07\}$.

Logo, nesse caso, $x_0 = 7,2 \notin RC$, e portanto, ao nível de significância $\alpha = 0,01$, não rejeitamos H_0.

Exercício

Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza 6 análises desse índice, obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual a $4,86\ mg^2$. Pode-se aceitar, no nível de 10%, a afirmação do fabricante?

Exemplo (*Teste bilateral*)

Uma máquina de encher pacotes de café enche-os segundo distribuição normal, com média μ e variância igual a 400 g^2. A máquina foi regulada para $\mu = 500\ g$. Desejamos colher uma amostra de 16 pacotes e verificar se a produção está sob controle, isto é, se $\mu = 500\ g$ ou não.

a) Se uma dessas amostras apresentasse média $\bar{x}_0 = 492\ g$, você pararia ou não a produção para regular a máquina?

b) Qual será a decisão se $\bar{x}_0 = 515\ g$?

Solução

Vejamos como fazer o teste de hipótese bilateral.

1. Indiquemos por X o peso de cada pacote; então, $X \sim N(\mu, 400)$. E as hipóteses que nos interessam são:

$$H_0 : \quad \mu = 500\ g$$
$$H_1 : \quad \mu \neq 500\ g$$

pois a máquina pode desregular para mais ou para menos.

2. $\sigma^2 = 400$; logo, para todo μ, a média $\bar{X}$ de $n = 16$ pacotes terá distribuição $N(\mu, 400/16)$, de modo que o desvio padrão (ou erro padrao) de $\bar{X}$ é $\sigma_{\bar{X}} = 5$. Em particular, se H_0 for verdadeira $\bar{X} \sim N(500, 25)$.

Exemplo (*Teste bilateral*)

Uma máquina de encher pacotes de café enche-os segundo distribuição normal, com média μ e variância igual a 400 g^2. A máquina foi regulada para $\mu = 500$ g. Desejamos colher uma amostra de 16 pacotes e verificar se a produção está sob controle, isto é, se $\mu = 500$ g ou não.

a) Se uma dessas amostras apresentasse média $\bar{x}_0 = 492$ g, você pararia ou não a produção para regular a máquina?

b) Qual será a decisão se $\bar{x}_0 = 515$ g?

Solução

Vejamos como fazer o teste de hipótese bilateral.

1. Indiquemos por X o peso de cada pacote; então, $X \sim N(\mu, 400)$. E as hipóteses que nos interessam são:

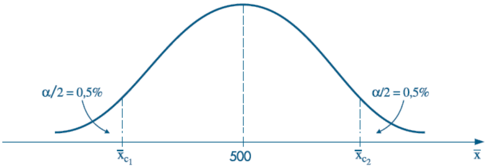
   $H_0: \ \mu = 500 \ g$

   $H_1: \ \mu \neq 500 \ g$

   pois a máquina pode desregular para mais ou para menos.

2. $\sigma^2 = 400$; logo, para todo μ, a média $\bar{X}$ de $n = 16$ pacotes terá distribuição $N(\mu, 400/16)$, de modo que o desvio padrão (ou erro padrao) de $\bar{X}$ é $\sigma_{\bar{X}} = 5$. Em particular, se H_0 for verdadeira $\bar{X} \sim N(500, 25)$.

3. Vamos fixar $\alpha = 1\%$. Pela hipótese alternativa, vemos que H_0 deve ser rejeitada quando $\bar{X}$ for muito pequena ou muito grande (teste bilateral).



4. Da tabela da curva normal padronizada obtemos:

$$z_1 = -2,58 = \frac{\bar{x}_{c_1} - 500}{5} \Rightarrow \bar{x}_{c_1} = 487,1$$

$$z_2 = +2,58 = \frac{\bar{x}_{c_2} - 500}{5} \Rightarrow \bar{x}_{c_2} = 512,9$$

Segue que a região crítica é:

$$RC = \{x \in \mathbb{R} | \bar{X} < 487,1 \text{ ou } \bar{X} > 512,9\}$$

Resposta para as perguntas:

5. Por fim, devemos confrontar o resultado da amostra com a região crítica estabelecida.

   a) $\bar{x}_0 = 492 \notin RC \Rightarrow$ não rejeitamos H_0

      Ou seja: o desvio de $\bar{x}_0$ com relação ao postulado em H_0 pode ser considerado uma flutuação aleatória da amostra.

   b) $\bar{x}_0 = 515 \in RC \Rightarrow$ rejeitamos H_0

      Ou seja: concluímos que a amostra contém evidências contra H_0.

Exercício

Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo estímulo. Ele desconfia que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Sob condições normais, a média do tempo de reação é de 8 segundos e o desvio padrão é $\sigma = 2$ segundos. Um experimento é desenvolvido com 10 cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os resultados do experimento indicaram média $9,1$ s. Seguindo o procedimento geral de testes de hipótese, faça o teste das seguintes hipóteses:

H_0: As cobaias apresentam tempo de reação padrão

H_1: As cobaias têm o tempo de reação alterado

Ou seja:

1. Especifique as hipótese H_0 e H_1 em termos da média populacional μ
2. Observe que, sob H_0, $\bar{X} \sim N(\mu; 2^2)$
3. Fixe a probabilidade $\alpha = 0,05$ de cometer o erro de tipo I e use este valor para construir a região crítica RC.
4. A média amostral observada foi $\bar{x}_o = 9,1$
5. Conclua com base na Região crítica construída.