ERROS E INCERTEZAS EXPERIMENTAIS

OBJETIVO: Familiarização com uma teoria que permita expressar os resultados experimentais, a partir de um tratamento adequado dos erros cometidos nos processos de medida.

INTRODUÇÃO: Quando se realiza a medida de uma grandeza física, encontra-se um número que a caracteriza. Ao usar esse número para representar o valor da grandeza, é necessário saber com que confiança, esse número a representa.

O ato de medir é, em essência, um ato de comparar, e essa comparação envolve erros de diversas origens (dos instrumentos, do operador, do processo de medida, etc.). Pretende-se aqui estudar esses erros e suas consequências, de modo a expressar os resultados de dados experimentais em termos que sejam compreensíveis a outras pessoas.

Quando se pretende medir o valor de uma grandeza, pode-se realizar apenas uma ou varias medidas repetidas, dependendo das condições experimentais particulares ou ainda da postura adotada frente ao experimento. Em cada caso, deve-se extrair do processo de medida um valor adotado como melhor na representação da grandeza e ainda um limite de erro dentro do qual deve estar compreendido o valor real.

ERROS EXPERIMENTAIS

Os erros experimentais representam a diferença entre o valor medido e o valor real da grandeza física, isto é, um desvio. Eles podem ser classificados em:

a) Erros grosseiros: são erros que resultam de uma desatenção do experimentador.

Ex. Uma leitura de 80 cm ao invés de 8,0 cm.

b) Erros sistemáticos: são erros oriundos de causas constantes, geralmente identificaveis, e que afetam as medidas de um modo uniforme. Podem ser, em principio, eliminados ou compensados, sendo isto uma das principais tarefas do experimentador. Prejudicam fundamentalmente a exatidão ou acurácia da medida.

Ex. Medida de comprimento feita com uma trena de aço que encolheu; medida feita com instrumento de medida mal calibrado.

c) Erros acidentais: são erros que resultam de causas indeterminadas e afetam de modo imprevisível as medidas. Estes erros aleatorios aparecem como flutuações que afetam principalmente a precisão da medida. Nunca são eliminados e seu efeito e quantificado mediante métodos estatisticos.

Ex. Erros devidos à variação de pressão, temperatura, umidade; erro de leitura ou julgamento do observador quanto à estimativa de frações da menor escala do instrumento; irregularidades do objeto a ser medido; etc.

Como o valor real da grandeza física é geralmente desconhecida o termo incerteza é mais utilizado na representação dos resultados obtidos num processo de medida.

INCERTEZAS

A incerteza representa a falta de conhecimento exato do mensurando, isto é, dúvida acerca da validade do resultado de uma medição. As fontes de incerteza são as mesmas que dos erros, mas lembrando que ambos os conceitos representam indicadores diferentes. As incertezas são uma indicação de quanto o melhor valor pode diferir do valor verdadeiro, em termos de probabilidades, isto é, uma quantifição aproximada (com determinado grau de confianza) dos erros decorrentes num processo de medida. Elas podem ser classificadas em:

a) Tipo A (σ_A): Estimadas por métodos estatisticos, associadas, assim, a erros aleatórios. São avaliadas normalmente com o desvio padrão da média.

b) Tipo B (σ_B): Estimadas por outros métodos não estatisticos, associadas a erros sistemáticos. São avaliadas pelo julgamento cientifico científico, baseando-se em todas as informações disponíveis sobre a possível variabilidade do mensurando, que não tenham sido obtidas através de observações repetidas. O conjunto de informações pode incluir dados de medições prévias, a experiência ou conhecimento geral do comportamento e propriedades de materiais e instrumentos relevantes, especificações do fabricante, dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados e incertezas relacionadas a dados de referência extraídos de manuais. Neste curso avaliaremos a incerteza do tipo B unicamente proveniente da incerteza instrumental.

c) Combinada (σ_C): Incerteza total associada à medida representada pela contribuição das incertezas do tipo A e B.

DEFINIÇÕES:

1 - VALOR **MÉDIO** DE UMA SÉRIE DE MEDIDAS:

Para uma série de medidas (x_1, x_2 ,..., x_n) de mesma confiança, o valor mais provável ($\bar{x}$) da grandeza medida é dado pela média aritmética dos valores experimentais obtidos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2 - **DESVIO ABSOLUTO** PARA CADA MEDIDA:

Define-se desvio absoluto (Δx_i) para cada medida, como sendo o módulo da diferença entre o valor experimental da i-ésima medida e o valor médio.

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|$$

3 - **DESVIO RELATIVO ou PERCENTUAL** PARA CADA MEDIDA:

Define-se desvio relativo (δx_i) para cada medida, como sendo o quociente entre o desvio absoluto correspondente Δx_i e o valor médio. O desvio percentual (δx_p) se obtem multiplicando o desvio relativo por 100.

$$\delta x_i = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}} \quad ou \quad \delta x_p = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}} \times 100\ \%$$

4 - **DESVIO MÉDIO ABSOLUTO** PARA UM CONJUNTO DE n MEDIDAS:

Define-se desvio médio absoluto, $\Delta\bar{x}$, para um conjunto de n medidas,como sendo a média aritmética dos desvios absolutos de cada medida.

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

5 - **DESVIO MÉDIO RELATIVO** PARA UM CONJUNTO DE n MEDIDAS:

Define-se desvio médio relativo, $\delta\bar{x}$, para um conjunto de n medidas, como sendo o quociente entre o desvio médio absoluto e o valor médio.

$$\delta\bar{x} = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}$$

6 - **DESVIO-PADRÃO** DE UMA AMOSTRA:

Define-se desvio-padrão de uma amostra (pequena série de medidas) como a raiz quadrada da razão entre a soma dos quadrados dos desvios absolutos e o número de medidas realizadas menos uma.

$$\sigma x = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n-1}}$$

7 – **DESVIO PADRÃO DO VALOR MÉDIO** DE n MEDIDAS OU ERRO DA MÉDIA (também conhecido como desvio padrão da média).

$$\varepsilon = \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}$$

Este desvio padrão da média é utilizado muitas vezes como estimativa das incertezas de tipo A (σ_A). Representa o desvio padrão de uma única medida.

8 - **DESVIO AVALIADO ABSOLUTO**:

Ele representa o limite de erro do instrumento de medida sendo a metade da menor divisão da escala do instrumento analógico ou a menor medida do instrumento digital utilizado. Isto faz com que o desvio absoluto só deva ter um único algarismo significativo. A incerteza instrumental muitas vezes é indicada no proprio aparelho, caso contrário usamos o desvio avaliado absoluto anteriormente mencionado.

9 - **APRESENTAÇÃO DO RESULTADO**:

Admitamos que na medida de uma grandeza física x foram feitas n medidas obtendo-se um valor mais provável (valor médio) e um desvio médio absoluto associado ($\Delta\overline{x}$). O verdadeiro valor de x não é possivel ser determinado, porém podemos concluir, com alto grau de confiança, que seu valor está compreendido no intervalo:

$$\overline{x} - \Delta\overline{x} \le x \le \overline{x} + \Delta\overline{x}$$

cuja notação usual é dada por:

$$x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}$$

Na verdade, para representar o intervalo descrito acima, deve-se usar o maior desvio dentre o avaliado absoluto (do instrumento) e o médio absoluto.

Uma forma mais recente, **a exigida neste curso (ver exercício modelo)**, de expressar os resultados envolvem o uso de intervalo de confiança e o conceito de incerteza. Neste caso é calculada uma incerteza total (σ_T), também conhecida como incerteza expandida, como múltiplo da incerteza combinada (σ_C) anteriormente mencionada. O fator multiplicativo utilizado para obtenção da incerteza expandida é denominado de fator de abrangência (k) que é escolhido de forma a representar o resultado final dentro de um determinado intervalo de confiança P (região mais provável para o valor real do mensurando). A cada intervalo de confiança há um coeficiente de confiança (ou nível de confiança), que é a probabilidade de que o mensurando esteja dentro do intervalo de confiança. O coeficiente do confiança depende do tipo de distribuição de erros (ver documento sobre distribuições) e do fator de abrangência escolhido. A tabela abaixo apresenta os valores dos níveis de confiança para duas distribuições de erros: a distribuição normal e de uma situação simplificada, que é freqüentemente adequada para situações de medição, onde a distribuição de erros é considerada como aproximadamente normal.

Incerteza expandida	Resultado	Intervalo de confiança P (%)	
		Distribuição normal	Distribuição aproximadamente normal
$1\cdot\sigma$	$\overline{X} \pm \sigma$	68,27	68
$2\cdot\sigma$	$\overline{X} \pm 2\cdot\sigma$	95,45	95
$3\cdot\sigma$	$\overline{X} \pm 3\cdot\sigma$	99,73	99

É o experimentador quien define e especifica o nível de confiança de seus resultados.

10 - **ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS**:

Suponhamos que queremos medir o comprimento de uma barra. Dispomos de uma régua graduada de um em um centímetro, tal como é mostrada na figura 1. A régua nos dá com precisão o valor da medida em centímetros, mas a casa dos milímetros só pode ser estimada, porque a régua não tem graduação em milímetros. O nosso resultado deverá ser expresso com todos os algarismos precisos mais o algarismo avaliado.O comprimento da barra será expresso como 7,5 cm. Se a nossa régua fosse graduada em milímetros nossa medida deveria ser igual a 7,50 cm, **por quê**?

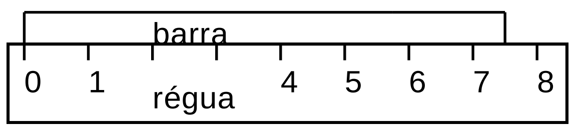


Fig. 1

Os algarismos que compõem o resultado de uma medida são chamados algarismos significativos. Deles fazem parte todos os algarismos precisos mais um e somente um algarismo duvidoso.Toda medida se expressa por n algarismos precisos mais o algarismo duvidoso.

OBSERVAÇÕES:

a) Os zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo, não são significativos, pois o número de significativos não depende da unidade que expressamos o resultado da medida. Assim,

7,5 cm = 0,075 m = 0,000075 km

têm somente dois significativos nos três casos.

b) Os zeros à direita do último algarismo não nulo são significativos, pois indicam um valor medido. Assim,

0,0750 m tem três significativos,

7,5000 cm tem cinco significativos.

c) Às vezes, pode surgir dúvida no caso b (acima), quanto aos zeros à direita do último algarismo não nulo serem significativos ou estarem presentes apenas para mostrar a localização do ponto decimal. 310 tem dois ou três significativos ?

Para evitar essa ambigüidade, devemos adotar a **notação científica**:

$3{,}10 \times 10^2$ (três significativos)   ou

$3{,}1 \times 10^2$ (dois significativos).

Dessa forma, **todos os algarismos à esquerda da potência de 10 são significativos**.

Ex: 7,5 x 10^{0} cm (2 significativos); 7,5 x 10^{-2} m (2); 7,5 x 10^{-5} km (2); 7,50 x 10^{-2} m (3); 7,5000 x 10^{0} cm (5).

Em geral, as medidas têm um certo número de algarismos precisos e um algarismo duvidoso. É sobre este algarismo duvidoso que incide o desvio. Por esta razão, o desvio avaliado absoluto é definido como sendo metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado. Cumpre ressaltar ainda, que o desvio médio absoluto deve sempre conter um único algarismo significativo e que o número de casas decimais do valor mais provável e do desvio médio absoluto deve ser o mesmo.

OPERAÇÃO DE **ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:**

Quando se faz operações com algarimos significativos, muitas vezes é necessário tirar um ou vários algarismos significativos. No caso da adição ou subtração, **as parcelas e o resultado devem ser expressos com o número de casas decimais da parcela mais pobre** (a que tem o menor número de casas decimais). O critério para o arredondamento das parcelas deve ser o seguinte: se o primeiro algarismo desprezado (da esquerda para a direita) for maior que 5, aumente o último algarismo significativo de 1; se o primeiro algarismo desprezado for menor que 5, mantenha o último significativo inalterado. Se o primeiro algarismo desprezado for igual a 5, analise o último significativo: se ele for ímpar, aumente-o de 1; se ele for par, mantenha-o inalterado.

a)20,23 +17,853 + 23,78 + **2,6** = 20,2 + 17,8 + 23,8 + 2,6 = 64,4

b)154,75 - **110,1** = 154,8 - 110,1 = 44,7

OPERAÇÃO DE **MULTIPLICAÇÃO** OU **DIVISÃO**:

O resultado deve ter o **mesmo número de algarismos significativos, ou esse número mais 1, com relação ao fator que possui o menor número de algarismos significativos.** **Ex**: 18,56 x 6,82 = 127 ou 126,6 (3 ou 4 algarismos significativos)

Se o **divisor tiver um número menor de algarismos significativos que o dividendo, o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos do divisor**. Ex:

68,32 / **3,2** = 21 (2 significativos)

Caso contrário, o resultado pode ter o mesmo número de algarismos significativos do dividendo (menor ou igual ao do divisor) ou, esse número menos 1 (um).

Ex: **a) 62,56** / 68,32 = 0,9157 ou 0,916 (4 ou 3 significativos)

b) 3,2 / 68,32 = 0,047 ou 0,05 (2 ou 1 significativos)

Note que: 0,0**47** x 68,32 = 3,2 ou 3,21 (2 ou 3 significativos), enquanto que 0,0**5** x 68,32 = 3 ou 3,4 (1 ou 2 significativos); 0,9157 x 68,32 = 62,56 ou 62,561 (4 ou 5 significativos), enquanto que 0,**916** x 68,32 = 62,6 ou 62,58 (3 ou 4 significativos). Como se vê, na operação de divisão, é mais conveniente escolher o resultado com o maior número de algarismos significativos e não esse número menos 1.

11 - **ÍNDICES DE EXATIDÃO**:

a) PRECISÃO:

Uma medida é tão mais precisa quanto mais próxima estiver do valor médio da grandeza associada. A precisão da medida está ligada apenas aos erros acidentais, de modo que um aumento do número n de medidas aumenta a precisão do resultado pois atenua a influência dos erros acidentais.

O desvio médio absoluto tem as mesmas unidades da grandeza x medida e o seu valor não é significativo para indicar a precisão da medida realizada. O desvio médio relativo, sendo um número puro, é um indice da precisão da medida: quanto menor o desvio médio relativo, maior a precisão da medida.

b) EXATIDÃO:

Uma medida é tão mais exata quanto menor for o "vício" da medida, ou seja, a diferença entre o valor mais provável (valor médio) encontrado e o verdadeiro valor da grandeza medida, suposto teoricamente conhecido. A exatidão do resultado de uma medida, além de depender de erros acidentais, depende, sobretudo, dos erros sistemáticos. Assim o aumento do número n de medidas, apesar de atenuar os erros acidentais, não altera os erros sistemáticos, não conseguindo melhorar significativamente a exatidão.

A figura abaixo ilustra claramente ambos os conceitos:

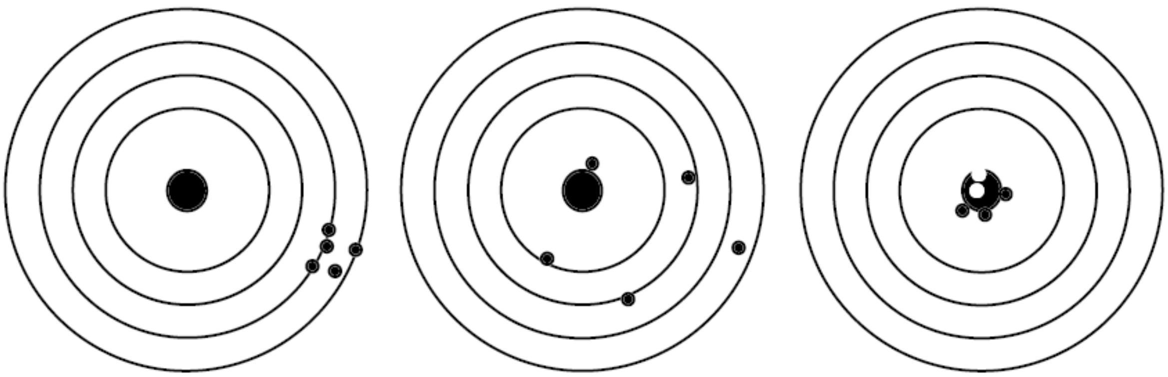


Figura 2: Representação gráficos dos índices de exatidão.

12 - **PROPAGAÇÃO DOS DESVIOS E DAS INCERTEZAS**

Dadas as medidas de duas grandezas físicas:

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a} \qquad \text{e} \qquad b = \bar{b} \pm \Delta\bar{b}$$

Se efetuarmos operações com a e b, os desvios cometidos acumular-se-ão:

a) **Produto** ou **quociente**: os **desvios médios relativos** se somam.

$$a.b = (\bar{a}.\bar{b}) \pm [\bar{a}.\bar{b}(\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})] \; ou \; a.b = (\bar{a}.\bar{b}) \pm [\bar{a}.\bar{b}((\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}})^2 + (\frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\frac{a}{b} = (\frac{\bar{a}}{\bar{b}}) \pm [\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}} + \frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})] \; ou \; \frac{a}{b} = (\frac{\bar{a}}{\bar{b}}) \pm [\frac{\bar{a}}{\bar{b}}((\frac{\Delta\bar{a}}{\bar{a}})^2 + (\frac{\Delta\bar{b}}{\bar{b}})^2)^{\frac{1}{2}}]$$

b) Adição ou **subtração**: os **desvios médios absolutos** se somam.

$$a + b = (\bar{a} + \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}) \; ou \; a + b = (\bar{a} + \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a}^2 + \Delta\bar{b}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a - b = (\bar{a} - \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a} + \Delta\bar{b}) \; ou \; a - b = (\bar{a} - \bar{b}) \pm (\Delta\bar{a}^2 + \Delta\bar{b}^2)^{\frac{1}{2}}$$

c) De forma geral podemos expressar para as incertezas:

Seja uma certa grandeza física Y que depende de N grandezas mensuraveis X_i através de uma relação funcional F, isto é, $Y=F(X_1,X_2, ..., X_i,... X_N)$, é definida a incerteza propagada em Y a partir das incertezas de cada uma das grandezas medidas:

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\cdot\sigma_{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\cdot\sigma_{X_2}\right)^2 + \ldots\left(\frac{\partial Y}{\partial X_N}\cdot\sigma_{X_N}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\cdot\sigma_{X_i}\right)^2}$$

EXERCÍCIO MODELO (Expresando as medidas com os intervalos definidos pelos desvios medios absolutos): Na medida dos lados a e b de um prisma retangular obtivemos os seguintes resultados, supostos merecedores da mesma confiança.

Lado a: 20.2cm;20.1cm;19.7cm 20.2cm;19,8cm

Lado b: 9.8cm;10.0cm;10.3cm;10.2cm;9.7cm

Determine:

a) A maneira correta de se exprimir o lado a

$$\bar{a} = \frac{20{,}2+20{,}1+19{,}7+20{,}2+19{,}8}{5} = 20{,}0\ \mathbf{cm}$$

$$\Delta a_1 = |20{,}2-20{,}0| = 0{,}2\ \mathbf{cm}$$

$$\Delta a_i = |a_i - \bar{a}|$$

$$\Delta\bar{a} = \frac{0{,}2+0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}3}{5} = 0{,}2\ \mathbf{cm}$$

$$\delta\bar{a} = \frac{0{,}2}{20{,}0} = 0{,}01 = 1\%$$

Portanto :

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a} = (20{,}0 \pm 0{,}2)\ \mathbf{cm}$$

ou :

$$19{,}8 \le a \le 20{,}2\ \mathbf{cm}$$

b) A maneira correta de se exprimir o lado b

$$\bar{b} = \frac{9{,}8+10{,}0+10{,}3+10{,}2+9{,}7}{5} = 10{,}0\ \text{cm}$$

$$\Delta b_1 = |9{,}8-10{,}0| = 0{,}2\ \text{cm}$$

$$\Delta b_i = |b_i - b|$$

$$\Delta\bar{b} = \frac{0{,}2+0{,}0+0{,}3+0{,}2+0{,}3}{5} = 0{,}2\ \text{cm}$$

$$\delta\bar{b} = \frac{0{,}2}{10{,}0} = 0{,}02 = 2\%$$

Portanto: $b = (10{,}0 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$ ou

$9{,}8 \le b \le 10{,}2\ \text{cm}$

c) A maneira correta de se exprimir a área do retângulo

$A = a.b = (20,0 \pm 0,2).(10,0 \pm 0,2)$
$A = (20,0.10,0) \pm (20,0.10,0).(0,01 + 0,02)$
$A = (200,0 \pm 6,0) = (200 \pm 6)\ \text{cm}^2$ ou
$194 \leq A \leq 206\ \text{cm}^2$

d) A maneira correta de se exprimir o perímetro do retângulo
$P = a + a + b + b$
$P = 2.(20,0 \pm 0,2) + 2.(10,0 \pm 0,2)$
$P = 2.[(20,0 + 10,0) \pm (0,2 + 0,2)] = (60,0 \pm 0,8)\ \text{cm}$ ou
$59,2 \leq P \leq 60,8\ \text{cm}$

EXERCÍCIO MODELO (Expressando as medidas com os intervalos de confiança, isto é, usando a incerteza. Esta variante será a exigida nos relatórios): Considere um experimento onde é preciso medir a densidade de um material que compõe uma esfera. O instrumento utilizado na de medição do diâmetro da mesma tem como menor divisão da escala 1 milímetro e o usado na determinação da massa 5 g. São feitas 10 medidas do diâmetro e da massa obtendo-se os seguintes resultados: 8,1 cm; 8,4 cm; 8,2 cm; 8,3 cm; 8,2 cm; 8,2 cm; 8,3 cm; 8,2 cm; 8,1cm; 8,2cm; 140 g; 140 g; 135 g, 140 g; 145 g; 140 g; 140 g; 135 g; 135 g; 140 g.

	Diâmetro	Massa
Valor médio:	8,22 cm	140,00 g
Desvio padrão:	0,0919 cm	0,3333 g
Desvio padrão da média:	0,0291 cm	1,0541 g

Estes últimos representam a incerteza de tipo A em cada uma das medidas.
Para estimar a incerteza do tipo B é preciso saber a incerteza que tem o instrumento de medida. Caso não haja nenhuma indicação no instrumento ou num certificado de calibração, pode-se estimar considerando o limite de erro, que no caso é metade da menor escala.

	Diâmetro	Massa
Incerteza de Tipo B:	0,05 cm	2,5 g
Incerteza combinada:	$[(0,0291)^2+(0,05)^2]^{½} = 0,0578$ cm	$[(1,0541)^2+(2,5)^2]^{½} = 2,7131$ g
Incerteza expandida (p=99%):	$\sigma_D=3\cdot\sigma_c=0,1734$ cm	$\sigma_M=3\cdot\sigma_c=8,1393$ g
Resultado das medidas:	D = 8,2 ± □0,2 cm ou	M = 140 ± 8 g ou
	D = 8,22 ± □0,17 cm	M = 140,0 ± 8,1 g
Incerteza relativa:	2,1 %	5,8 %

Finalmente para o cálculo da densidade precisamos propagar as incertezas nas medidas do diâmetro e da massa na estimativa da densidade. Como:

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{M}{D^3} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{140}{(8,22)^3} \approx 0,481\,\text{g/cm}^3$. A propagação de incerteza será:

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\cdot\sigma_M\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\cdot\sigma_D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{\pi\cdot D^3}\cdot\sigma_M\right)^2 + \left(-\frac{18\cdot M}{\pi\cdot D^4}\cdot\sigma_D\right)^2} = \rho\cdot\sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{3\cdot\sigma_D}{D}\right)^2}$$

$$\sigma_\rho = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{140}{(8,22)^3}\cdot\sqrt{(0,058)^2 + (3\cdot 0,021)^2} \approx 0,0412\,\text{g/cm}^3$$

O resultado final será: ρ=0,48±0,04 g/cm^3
Incerteza relativa na densidade: 8,6 %.
Evitar arredondar os valores dos cálculos em etapas intermediárias, para evitar distorções nos resultados finais.

12 - **HISTOGRAMAS**:

Uma gráfico muito útil para avaliar a dispersão dos dados em torno a um valor mais provável é o histograma. Ele é uma forma de descrição gráfica com barras verticais, as quais representam dados quantitativos agrupados em classes de frequência.
Uma serie de passos simples devem ser seguidos para a construção de um histograma:

1. Calcular o intervalo total dos dados Inter = xmax - xmin
2. Definir ou estimar o número de classes: Um critério comum é a raiz quadrada do tamanho da sua população de dados, porém você pode escolher com o intuito de salientar algo significativo dentro de seus dados.
3. Calcular a largura do intervalo das classes h = Inter/Class
4. Determinar os limites das classes que definem os intervalos.
5. Construir uma tabela de freqüências.
6. Representar o grafico de frequencia versus intervalos de cada clase.

Quando aumentamos o tamanho da nossa população, isto é, número de medidas, o histograma representa melhor a verdadeira densidade de probabilidade. Se pudéssemos realizar infinitas medidas, o histograma normalizado nos daria a probabilidade exata de achar a grandeza de interesse em cada intervalo. Notemos porém que isto não nos daria ainda a densidade de probabilidade ($p(x)$) mas apenas a integral desta função em cada intervalo de comprimento δx, que é determinado pela precisão do instrumento utilizado. Para conhecermos $p(x)$ devemos, segundo a definição, não somente fazer infinitas medidas mas, também, fazer as medidas utilizando um instrumento com precisão infinitesimal, de modo que possamos fazer $\delta x \rightarrow 0$. Afortunadamente, não é necessário conhecer o valor de uma função em todos os pontos para caracterizá-la completamente. Basta com conhecer alguns parâmetros da função para termos uma representação exata da mesma (ver anexo). Por exemplo, se sabemos que a distribuição é normal e conhecemos os valores de μ e σ, podemos calcular exatamente $p(x)$ para qualquer x. Se a distribuição não é normal precisaremos tal vez mais parâmetros mas o conhecimento de média e o desvio padrão já nos da uma boa idéia da densidade de probabilidades.

EXERCÍCIOS

1.Foram feitas doze medidas do comprimento de uma barra metálica por doze pessoas. Cada uma utilizou uma régua cuja escala menor é de milímetros, obtendo-se os seguintes resultados em cm:

1. 16,3	4. 16,5	7. 16,2	10. 16,3
2. 16,2	5. 16.4	8. 16,3	11. 16,1
3. 16,3	6. 16.1	9. 16,0	12. 16,5

a) Determinar o valor médio do comprimento da barra. b) Determinar o desvio absoluto da grandeza medida. c) Determinar o desvio relativo e as incertezas da grandeza medida.

2.Faça as seguintes operações considerando os algarismos significativos.

a)450,45 + 20,5 + 0,23 + 5,1517

b)99,543 - 2,75

c)3,19463 x 2,75

d)68,72 : 23,1

e)138,7 : 83

3.Supondo que diversas medidas deram os resultados abaixo, faça o arredondamento de seus algarismos significativos para uma casa decimal.

a)23,532cm

b)57,478mm

c)1,45481m

d)36,555mm

e)2,3590cm

f)3,1416mm

4.Qual o desvio avaliado absoluto de :

a) Uma régua escolar comum; b) Um relógio analógico comum; c) Um transferidor escolar comum.

Referências

1. Vuolo, JH. Fundamentos da teoria de erros. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

2. ISO. Guide to the expression of uncertainty in measurement. Geneva, 1995.

3. ABNT/INMETRO. Guia para a expressão da incerteza de medição. 3ª Edição Brasileira. Rio de janeiro, 2003.

4. Guia para Física Experimental, UNICAMP, 1997.

5. Apostila de Laboratório de Física A, Universidade Federal de Sergipe, 2008.

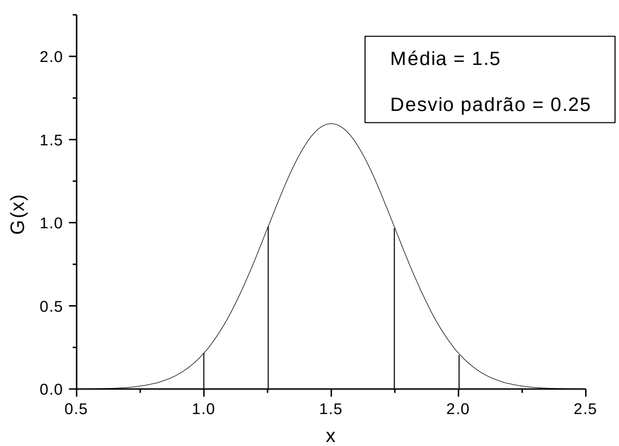
Anexo: Distribuições de probabilidades aplicadas às medidas experimentais

As distribuições de probabilidades são formulações estatísticas idealizadas, no caso experimental, para descrever a natureza incerta das medidas obtidas no laboratório. A aproximação da forma destas distribuições aos histogramas dos dados (distribuição de freqüências) dependerá fundamentalmente do número total de medições realizadas em situações experimentais "idênticas". Na prática o número de observações (medidas) realizadas é limitado, isto é, temos unicamente uma amostra de toda a população, desta forma, poderemos ter uma discordância entre os parâmetros obtidos na distribuição idealizada e outros indicadores estatísticos.

Distribuição Normal ou Gaussiana

$$G(x) = \frac{A_0}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribuição que descreve muitas situações do dia a dia, onde um conjunto de muitos e pequenos efeitos aleatórios contribuem para variações de uma grandeza em torno de um valor médio. Experimentos de Física, em geral, se enquadram nesta situação.



Intervalos

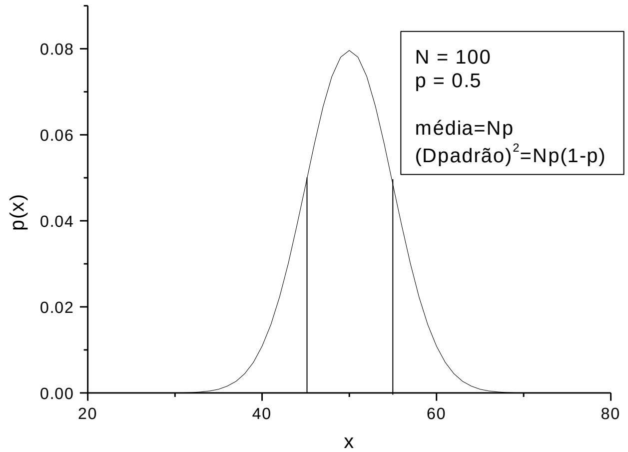
$$(\bar{x} - \sigma) \quad a \quad (\bar{x} - \sigma) \quad \text{equivale a } 68.27\,\% \text{ das medidas}$$
$$(\bar{x} - 2\sigma) \quad a \quad (\bar{x} - 2\sigma) \quad \text{equivale a } 95.45\,\% \text{ das medidas}$$
$$(\bar{x} - 3\sigma) \quad a \quad (\bar{x} - 3\sigma) \quad \text{equivale a } 99.73\,\% \text{ das medidas}$$

Distribuição Binomial – Processo aleatório com ocorrência de dois eventos A ou B com probabilidades p e 1-p

A probabilidade (p) de um evento ocorrer X vezes em N tentativas é dado por:

$$p(x) = \frac{N!}{X!(N-X)!}\, p^X \,(1-p)^{N-X}$$

O experimento de obtenção de cara ou coroa no lançamento de uma moeda pode ser descrito pela distribuição Binomial.



A Distribuição Binomial se aproxima da Normal quando N é grande e p não for próximo de zero. Na prática a aproximação é boa quando Np e N(1-p) forem superiores a 5.

Distribuição de Poisson – Quando a probabilidade p é muito pequena e N é muito grande, sendo o produto Np finito, a Distribuição Binomial pode ser aproximada para a Distribuição de Poisson:

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

A Distribuição de Poisson descreve bem o processo de decaimento radioativo onde a probabilidade do núcleo se desintegrar em um dado intervalo de tempo é pequena, mas a quantidade de núcleos é muito grande.
A comparação entre Distribuições Binomial e de Poisson para um caso onde a média é igual a 10. Um valor de N maior que 100 na Binomial resulta numa melhor aproximação.