

Física II

Lucy V. C. Assali

Oscilações

2^a Parte

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

O MHS descreve sistemas ideais, que oscilam indefinidamente sob a ação de forças lineares restauradoras. Na maioria dos sistemas reais, forças dissipativas amortecem o movimento, fazendo com que a energia mecânica do sistema diminua com o tempo. Estes movimentos são ditos amortecidos. A resistência que um fluido (como o ar) oferece ao movimento de um objeto, é proporcional à sua velocidade:

$F_d = -\rho\dot{x} = -\rho v$ \Rightarrow força dissipativa que atua em sentido oposto à velocidade

$\rho \Rightarrow$ constante de amortecimento $\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)$

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

A equação de movimento para o sistema massa-mola, com amortecimento, é:

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} \implies \boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\implies \gamma = \frac{\rho}{m} \left(\frac{1}{s} \right) \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como encontrar a solução desta equação de movimento?

Tentativa \implies $\boxed{x(t) = e^{rt}}$

Justificativa \implies as derivadas de qualquer ordem são proporcionais a e^{rt}

$$\implies \boxed{\dot{x}(t) = r e^{rt}} \quad \text{e} \quad \boxed{\ddot{x}(t) = r^2 e^{rt}}$$

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

$$r^2 e^{rt} + \gamma r e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0 \implies e^{rt} \underbrace{(r^2 + \gamma r + \omega_0^2)}_{\text{eq. característica}} = 0$$

$$\boxed{r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0} \implies \text{valores de } r \text{ que tornam verdadeira a solução tentativa}$$

$$\boxed{r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}} \longrightarrow \text{depende da relação entre } \omega_0 \text{ e } \gamma, \text{ levando a três diferentes soluções}$$

1. $\gamma/2 < \omega_0 \longrightarrow$ Amortecimento Subcrítico
2. $\gamma/2 = \omega_0 \longrightarrow$ Amortecimento Crítico
3. $\gamma/2 > \omega_0 \longrightarrow$ Amortecimento Supercrítico

MHA: Amortecimento Subcrítico

$$\boxed{\gamma/2 < \omega_0} \rightarrow r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{i^2 \left[\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]}$$

Soluções: $r_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$ com $\omega = \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}_{\substack{\text{freq. de oscilação} \\ (\neq \text{freq. própria } \omega_0)}}$

Solução Geral: $x(t) = a e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega)t} + b e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t})$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \{a [\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)] + b [\cos(\omega t) - i \text{sen}(\omega t)]\} \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\underbrace{(a+b)}_C \cos(\omega t) + i \underbrace{(a-b)}_B \text{sen}(\omega t) \right] \end{aligned}$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

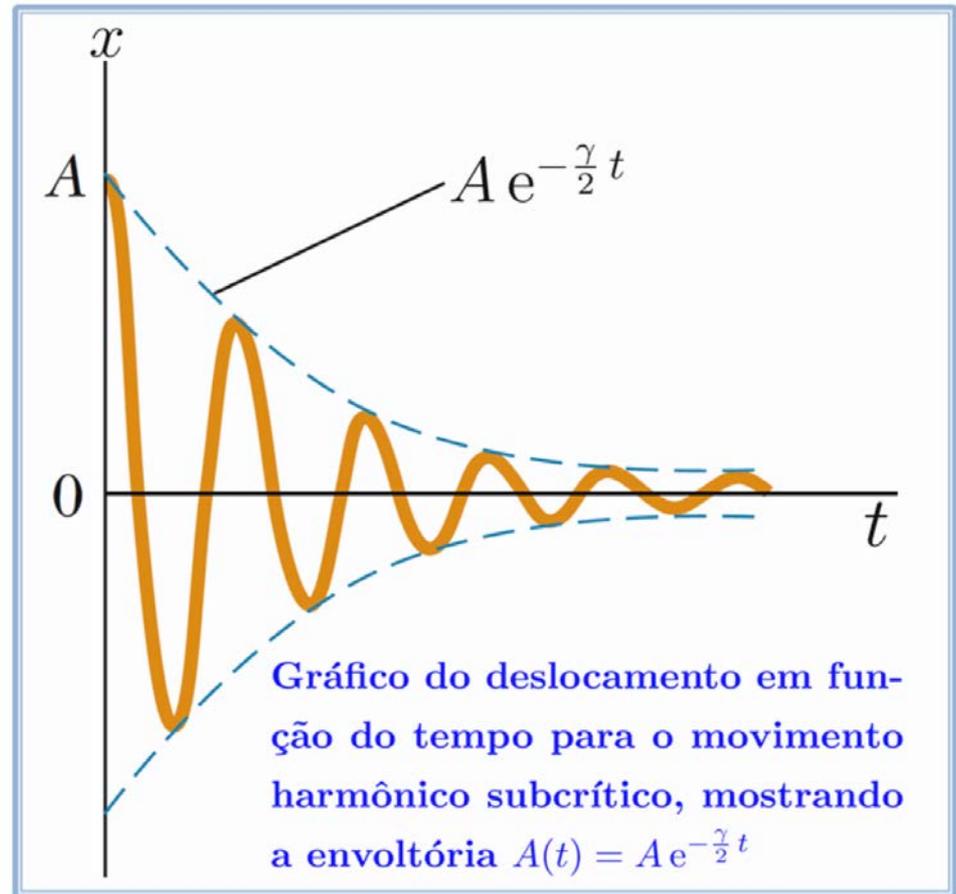
A e φ
determinados pelas
condições iniciais

MHA: Amortecimento Subcrítico

$$x(t) = \underbrace{A e^{-\frac{\gamma}{2}t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{sendo } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Se $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$ o amortecimento é fraco e a amplitude varia lentamente com $t \rightarrow$ podemos chamar de período o intervalo $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Balanço de Energia do MHA Subcrítico

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x})(\dot{x}) + \frac{1}{2} k(x)(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m (2 \ddot{x} \dot{x}) + \frac{1}{2} k (2 \dot{x} x) = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} \underbrace{(m \ddot{x} + k x)}$$

$= -\rho \dot{x}$ (MHA) $= 0$ (MHS)
Energia se conserva

$$\frac{dE}{dt} = -\rho \dot{x}^2 = -\gamma m \dot{x}^2 \leq 0$$

\Rightarrow taxa instantânea de variação (dissipação) da energia mecânica do MHA é proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, é nula nos instantes que $v = 0$ e acompanha as oscilações de v^2 durante cada período

Balanço de Energia do MHA Subcrítico

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (\omega_0^2 m) x^2$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow x^2(t) = A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \omega \text{sen}(\omega t + \varphi) \right]$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2(t) = A^2 e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) + 2 \left(\frac{\gamma\omega}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi) \text{sen}(\omega t + \varphi) \right]$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t} \left\{ \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \omega_0^2 \right] \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma\omega}{2} \text{sen}[2(\omega t + \varphi)] \right\}$$

→ vamos analisar a energia média em um ciclo ($T = 2\pi$) e quando $\gamma \ll \omega_0$

Sabemos que, neste caso:

a função $e^{-\gamma t} \approx$ constante \Rightarrow sua média é $e^{-\gamma t}$
média do quadrado das funções cosseno e seno valem 1/2
média das funções cosseno e seno são nulas

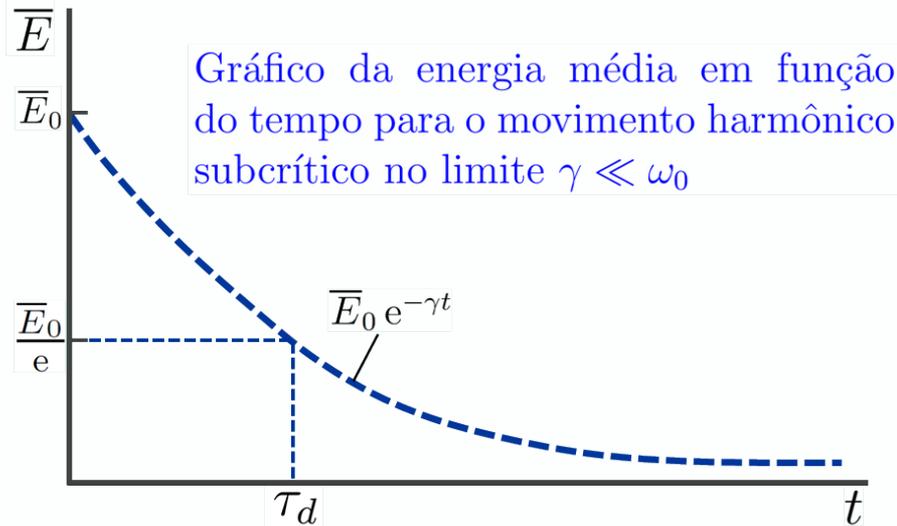
Balanço de Energia do MHA Subcrítico

Energia média em um ciclo ($T = 2\pi$) e quando $\gamma \ll \omega_0$



$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} mA^2 e^{-\gamma t} \omega_0^2 = \bar{E}_0 e^{-\gamma t}$$

$$\text{com } \bar{E}_0 = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} kA^2$$



$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\gamma \bar{E}$$

$\gamma \rightarrow$ taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo

Tempo de decaimento da energia (τ_d)

Tempo necessário para que a energia média caia para o valor $1/e$ de seu valor inicial ($\sim 36\%$ do valor inicial):

$$\frac{\bar{E}(t)}{\bar{E}_0} = e^{-\gamma \tau_d} = \frac{1}{e} = e^{-1} \Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

MHA: Amortecimento Supercrítico

$$\gamma/2 > \omega_0$$

$$\longrightarrow r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{Soluções: } r_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta \quad \text{com} \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} < \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Solução Geral: } x(t) = a e^{(-\frac{\gamma}{2} + \beta)t} + b e^{(-\frac{\gamma}{2} - \beta)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a e^{\beta t} + b e^{-\beta t})$$

movimento não é mais oscilatório \Rightarrow o que prevalece é o amortecimento

Decai para zero mais rapidamente do que o outro termo e para tempos grandes é esse o termo que prevalece

MHA: Amortecimento Crítico

$$\boxed{\gamma/2 = \omega_0} \longrightarrow r = -\frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Solução: } r_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \longrightarrow \boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \underbrace{(a + bt)}$$

Para que este resultado seja compatível com o caso supercrítico no limite de $\beta \longrightarrow 0$

Obs.: Este resultado também é solução da equação $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$ quando $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ (com $A(t) = a + bt$)

Oscilador Harmônico Amortecimento

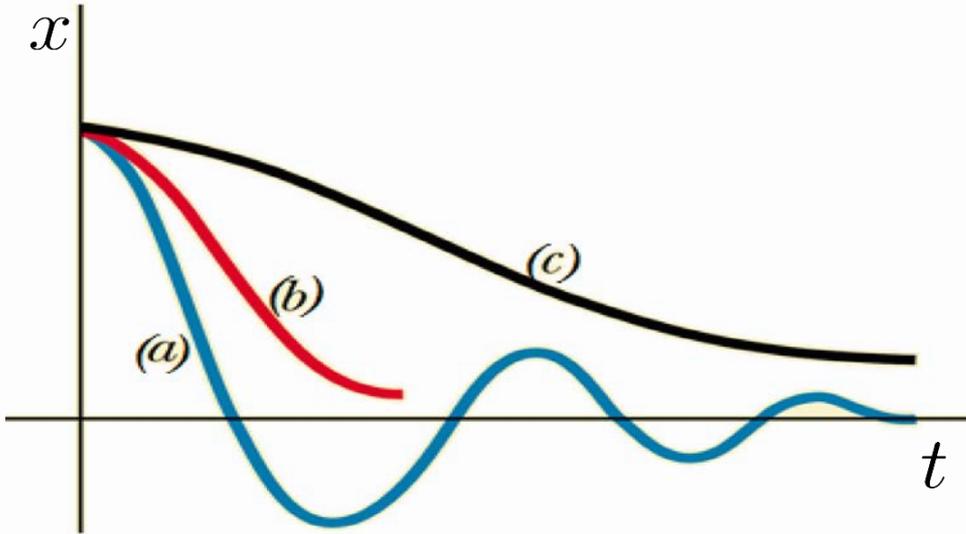


Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de um oscilador amortecido nos limites: (a) subcrítico; (b) crítico e (c) supercrítico.

As soluções tendem a zero para $t \longrightarrow \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que τ_d (tempo de decaimento para o limite subcrítico)

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

Equação de movimento de um sistema massa-mola que descreve um movimento harmônico amortecido e forçado (MHF):

$$m \ddot{x}(t) + \rho \dot{x}(t) + k x(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Diagram illustrating the equation of motion for a damped and forced harmonic oscillator (MHF):

- m : massa do corpo
- ρ : coeficiente de amortecimento
- k : constante elástica da mola
- $F_0 \cos(\omega t)$: Força externa oscilatória

A força externa $F_0 \cos(\omega t)$, de frequência ω e amplitude F_0 , supre energia continuamente ao sistema de modo que as oscilações devam persistir e, para $t \gg \tau_d$, somente as oscilações forçadas irão sobreviver (regime estacionário)

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

Dividindo a equação de movimento pela massa m obtemos:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$\implies \gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$ (frequência natural)

Solução geral \implies $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$

$x_p \implies$ solução particular da equação inhomogênea

$x_h \implies$ solução da equação homogênea $\underbrace{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$x_h \longrightarrow 0$ para

$t \longrightarrow \infty$ ($t \gg \tau_d$)

Como encontrar x_p ?

O desenvolvimento de como descrever um MHF e encontrar x_p encontra-se no capítulo 4 do texto Coletânea de Exercícios

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equação} \implies \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \\ \text{solução} \implies x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right.$$

amplitude da
força externa

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

frequência
própria

frequência da
força externa

$$\varphi = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right]$$

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

