Eletromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 16

Na aula passada nós definimos o vetor polarização $\vec{P}$ de um meio material como a densidade volumétrica de dipolos elétricos dentro do meio e vimos que o potencial eletrostático produzido pelas cargas de polarização pode ser calculado como o potencial produzido por uma densidade superficial de cargas de polarização.

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n},$$

onde $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície do meio, e uma densidade volumétrica de cargas de polarização

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Vimos também que podemos definir o campo vetorial Deslocamento Elétrico como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

tal que a fonte de fluxo de $\vec{D}$ sejam somente as cargas livres, e não as de polarização, no meio, isto é

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l \qquad \therefore \int \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q_{livre}$$

Antes de prosseguir, vamos discutir alguns exemplos e problemas do livro texto para consolidar o conceito de $\vec{D}$.

Ex. 4.2: Determinar o campo elétrico produzido por uma esfera uniformemente polarizada.

Como $\vec{P} = const$, $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$.

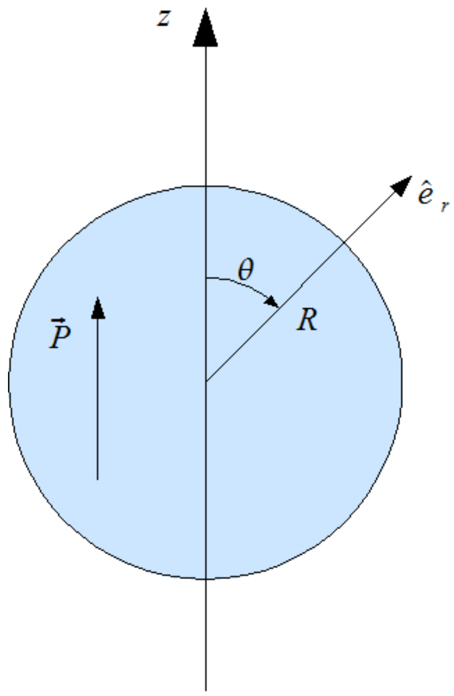
Por outro lado

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

ou

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}\hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dS'; \qquad \vec{P} \cdot \hat{n}' = P\cos\theta'$$

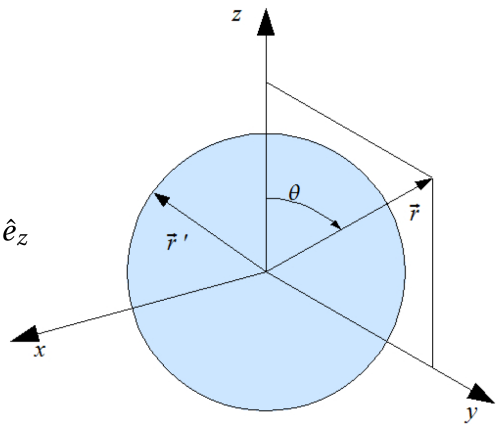
$$\phi(\vec{r}) = \frac{R^2 P}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta' \cos\theta'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\theta'$$



Antes de resolver este problema pelo método adotado pelo livro (usando o Ex. 3.9), vamos ver como poderíamos determinar o potencial por integração direta. Primeiro, notamos que, como há simetria em torno do eixo z, podemos tomar o ponto onde queremos determinar o potencial no plano $xz(\varphi = 0)$.

Então

$$\vec{r} = r\hat{e}_r = r\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_x + r\cos\theta\,\hat{e}_z$$



Por outro lado, o ponto $\vec{r}\,'$, onde está a carga de polarização, é qualquer ponto sobre a esfera; então

$$\vec{r}\,' = R\hat{e}_r = R\operatorname{sen}\theta' \cos\varphi'\,\hat{e}_x + R\operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi'\,\hat{e}_y + R\cos\theta'\,\hat{e}_z$$

de forma que

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = \left(r\operatorname{sen}\theta - R\operatorname{sen}\theta' cos\varphi'\right)\hat{e}_x - R\operatorname{sen}\theta' sen\varphi'\,\hat{e}_y + \left(r\cos\theta - R\cos\theta'\right)\hat{e}_z$$

e

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left[\left(r\operatorname{sen}\theta - R\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'\right)^2 + \left(R\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'\right)^2 + \left(r\cos\theta - R\cos\theta'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Desenvolvendo os quadrados e combinando os ternos, temos

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left[r^2 + R^2 - 2rR\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

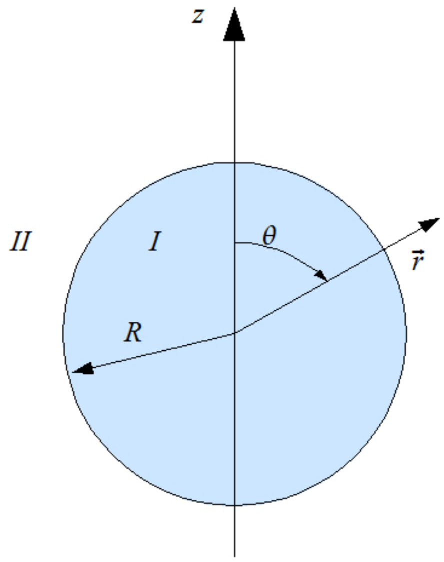
e

$$\phi(\vec{r}) = \frac{R^2 P}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta' \cos\theta' d\theta'}{\left[r^2 + R^2 - 2rR\left(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi' + \cos\theta\cos\theta'\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Esta integral pode ser feita, mas envolve o conceito de integrais elípticas, que está fora do conhecimento básico para este curso. Vamos então utilizar o método do livro texto, que é bastante instrutivo, mas o vamos discutir de uma forma mais simples.

Primeiro, notamos que

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta$$



Portanto, o problema equivale a calcular o potencial de uma distribuição superficial de carga variando com $cos\theta$. Mas nós sabemos que, fora da superfície da esfera, como não há cargas, o potencial tem que satisfazer a Equação de Laplace,

$$\nabla^2\phi = 0$$

cuja solução geral em coordenadas esféricas, é

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

No entanto, como a superfície da esfera está carregada, há uma descontinuidade no campo elétrico e a solução na região interna da esfera (região I) não necessita ser a mesma da região externa (região II). Vamos então considerar primeiro a solução na região interna.

Região I $$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_{I\ell} r^\ell + \frac{B_{I\ell}}{r^{\ell+1}}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

Mas, como o ponto $r = 0$ está na região I, para evitar potencial divergente na origem, temos que impor $B_{Il} = 0$, então

$$\phi_I(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell\right]P_\ell(\cos\theta)$$

Região II $$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_{II\ell} r^\ell + \frac{B_{II\ell}}{r^{\ell+1}}\right]P_\ell(\cos\theta)$$

Mas, neste caso, para evitar divergência do potencial quando $r\to\infty$, temos que impor $A_{IIl} = 0$;

portanto

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{B_{II\ell}}{r^{\ell+1}}\right] P_\ell(\cos\theta)$$

Condições de Contorno

Potencial

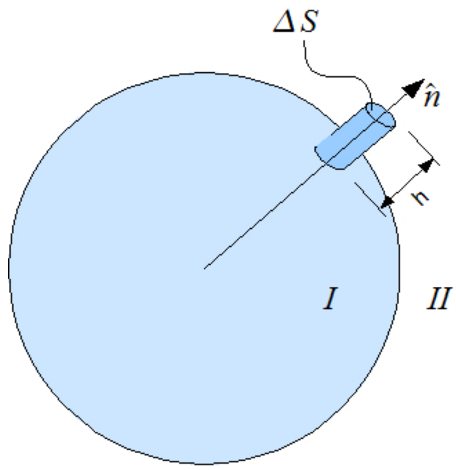
Naturalmente, na superfície da esfera o potencial tem que ser contínuo, ou seja,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_{I\ell} R^\ell P_\ell(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{II\ell}}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

portanto

$$B_{II\ell} = A_{I\ell} R^{2\ell+1}$$

Campo Elétrico



Repetindo um argumento que já vimos antes, vamos considerar uma pequena superfície cilíndrica atravessando a superfície da esfera. Pela Lei de Gauss, temos

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$\int_{\text{base inf.}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{\text{sup. lat}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS + \int_{\text{base sup.}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{\int \sigma_p\,dS}{\epsilon_0}$$

Se considerarmos ΔS bem pequeno, e levando em conta que $\hat{n} = -\hat{e}_r$ na base inferior e $\hat{n} = \hat{e}_r$ na base superior, temos

$$-E_{Ir}\Delta S + \int_{\text{sup. lat}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS + E_{II\ell}\Delta S = \frac{\sigma_p \Delta S}{\epsilon_0}$$

onde E_{Ir} e E_{IIr} são as componentes radiais do campo elétrico, Finalmente, tomando o limite $h \to 0$, a integral na superfícies lateral se cancela e

$$E_{IIr} - E_{Ir} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

Mas

$$E_{I\,r} = -\frac{\partial\phi_I}{\partial r} = -\sum_{l=0}^{\infty} \ell A_{I\,\ell} R^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta)$$

$$E_{II\,r} = -\frac{\partial\phi_{II}}{\partial r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{B_{II\,\ell}}{R^{l+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

Então

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\ell A_{I\,\ell} R^{\ell-1} + \frac{B_{II\,\ell}}{R^{\ell+2}} \right] P_\ell(\cos\theta) = \frac{P\cos\theta}{\epsilon_0}$$

ou, usando a relação entre $BII\ell$ e $A_{I\,\ell}$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2l+1) A_{I\,1} R^{l-1} P_\ell(\cos\theta) = \frac{P_\ell(\cos\theta)}{\epsilon_0}$$

Mas polinômios de Legendre são funções ortogonais e $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Então todos os $A_{I\,\ell}$ tem que ser nulas, exceto para $\ell = 1$ e

$$A_{I\,\ell} = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

O potencial fica então

$$\phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta; \;\; r \le R \\ \\ \dfrac{P}{3\epsilon_0} \dfrac{R^3}{r^2} \cos\theta; \;\; r \ge R \end{cases}$$

Já o campo elétrico

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

fica, dentro

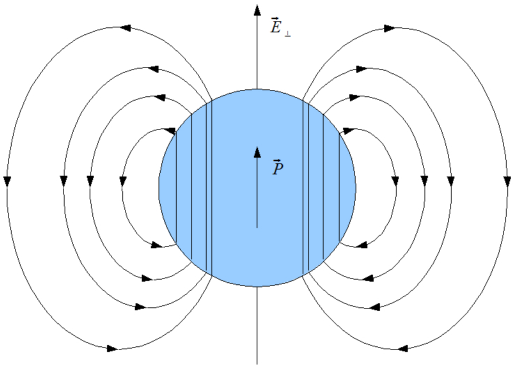
$$\vec{E}_{\mp}(r,\theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0}\left[\cos\theta\,\hat{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e} + \theta\right] = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{e}_z \quad \therefore \vec{E}_{\mp} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0},$$

ou seja, o campo elétrico dentro da esfera é constante!

Fora da esfera o campo fica

$$\begin{aligned} \vec{E}_{II}(r,\theta) &= -\frac{PR^3}{3\epsilon_0}\left[-\frac{2}{r^3}\cos\theta\,\hat{e}_r - \frac{1}{r^3}\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right] \\ \therefore \vec{E}_{II}(r,\theta) &= -\frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right] \end{aligned}$$

que é exatamente o campo de um dipolo! Note que o sentido do campo dentro da esfera é oposto ao do campo fora da esfera, como deve ser para um dipolo.



O vetor $\vec{D}$, dentro da esfera, é então

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\therefore \vec{D} = -\frac{\vec{P}}{3} + \vec{P} \qquad \therefore \vec{D} = \frac{2}{3}\vec{P} = -2\epsilon_0 \vec{E}!$$

Prob. 4.15: Uma esfera espessa, de raio interno a e raio externo b, é feita de um material dielétrico com uma polarização "congelada"

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\hat{e}_r$$

a) Calcule a carga de polarização e determine o campo elétrico por ela produzido, todas as regiões, usando a Lei de Gauss.

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \qquad \therefore \qquad \sigma_p(a) = -\frac{k}{a}; \quad \sigma_p(b) = \frac{k}{b}$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{k}{r}\right) \qquad \therefore \qquad \rho_p = -\frac{k}{r^2}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{q_{total}}{\epsilon_0}, \qquad \therefore 4\pi r^2 E_r = \frac{q_{total}}{\epsilon_0}$$

$r < a$:

$$q_{total} = 0 \qquad \therefore \boxed{\vec{E}_{dent} = 0} \tag{1}$$

$a < r < b$:

$$q_{total} = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \int_0^r \frac{(-k)}{r^2}4\pi r^2 dr = -4\pi k(a + r - a) = -4\pi k r$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{e}_r} \tag{2}$$

$b < r$:

$$q_{total} = -\frac{k}{a}4\pi a^2 + \frac{k}{b}4\pi b^2 + \int_0^b \frac{(-k)}{r^2}4\pi r^2 dr = 4\pi(b - a - b + a) = 0$$

$$\boxed{\therefore \vec{E}_{fora} = 0} \qquad (3)$$

b) Encontre primeiro $\vec{D}$, depois de $\vec{E}$

$$\oint_s = \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{livre} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetria}}}{\Rightarrow} \quad \vec{D} = 0 \text{ em todo o espaço}$$

Portanto:

$$\vec{E}_{dentro} = 0; \quad a < r < b: \ \epsilon_0\vec{E} = -\vec{P} \ \therefore \ \vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}\hat{e}_r; \ \ r > b: \ \vec{E} = 0$$

Materiais dielétricos isotrópicos; susceptibilidade elétrica e constante dielétrica

Em geral, o grau de polarização de um meio dielétrico pode ter uma dependência complicada com o campo elétrico total. Essa dependência pode não ser linear e pode mesmo acontecer que $\vec{P}$ não tenha a mesma direção $\vec{E}$ (dielétricos anisotrópicos). A relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$ em um meio material é denominada relação constitutiva do meio.

No entanto, existe um grande número de materiais, de interesse prático, para os quais $\vec{P}$ é paralelo a $\vec{E}$. Neste caso, que corresponde aos dielétricos isotrópicos, a relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$ pode ser escrita como

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi(E)\vec{E}$$

onde $\chi(E)$ é a susceptibilidade elétrica do material. Como indicado pela notação usada, em geral χ pode variar com a intensidade do campo elétrico.

Substituindo na expressão para $\vec{D}$, temos

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi\vec{E} = \epsilon(E)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r(E)\vec{E}$$

onde

$$\epsilon(E) \equiv \epsilon_0(1+\chi)$$

é denominada Permissividade Elétrica do meio, e

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon(E)}{\epsilon_0}$$

é denominada Constante Dielétrica ou Permissividade Elétrica Relativa do meio.

Para campos elétricos fracos, $\chi(E)$ é praticamente constante. No entanto, à medida que o campo aumenta sua intensidade, χ passa a depender da intensidade, induzindo a respostas não lineares do meio. Na realidade, se E crescer muito, começará a arrancar os elétrons das últimas camadas atômicas, e o dielétrico pode se tornar um condutor. O campo elétrico máximo que um dielétrico pode suportar sem se romper é conhecido como rigidez dielétrica do material.

Neste curso, vamos considera somente situações em que χ é uma constante para todos materiais.

Recomendação importante sobre a solução de problemas calculando primeiro $\vec{D}$:

- Ler a seção 4.3.2 do livro texto
- Fazer com cuidado o Exemplo 4.5