

Física II

4302112

Lucy V. C. Assali

Escritório: Edifício Alessandro Volta, Bloco C, sala 210
Fone: 3091-7041 *e-mail: lassali@if.usp.br*

Oscilações

1^a Parte

Oscilações

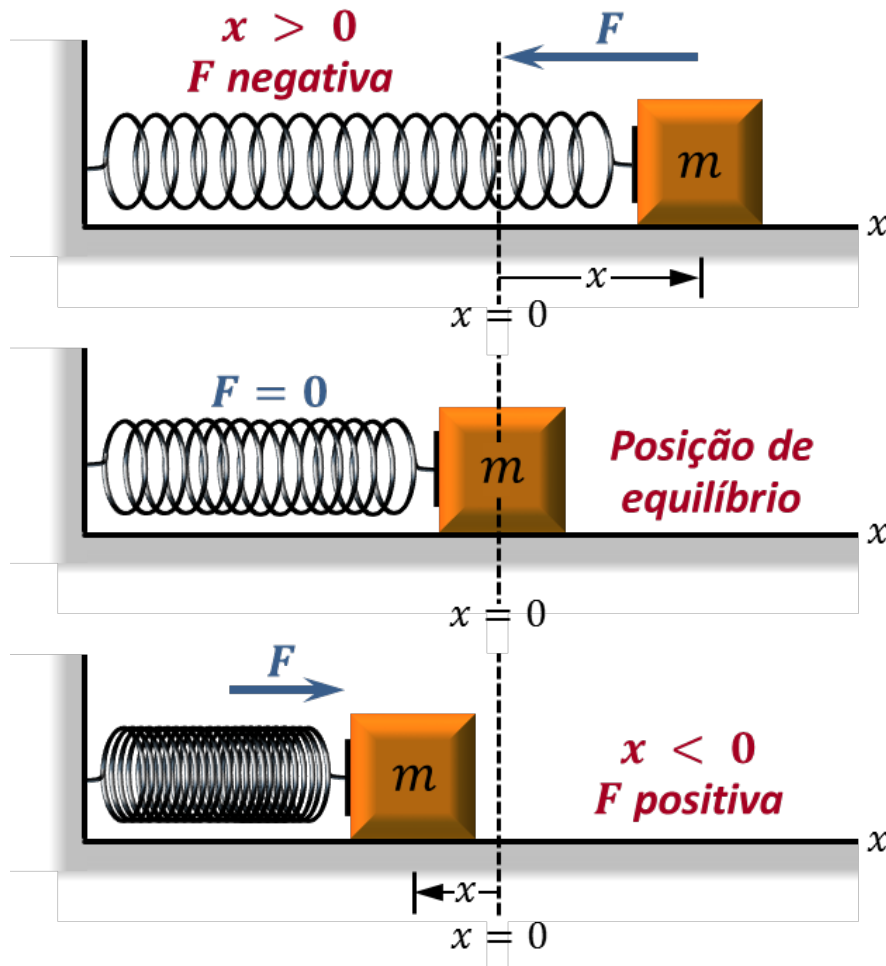
Oscilação $\Rightarrow$ tipo de movimento especial que ocorre quando uma força que atua em um corpo é proporcional ao deslocamento do corpo de sua posição de equilíbrio. Esta força está sempre direcionada para a posição de equilíbrio, causando repetidamente um deslocamento de vai-e-vem do corpo ao redor da posição de equilíbrio. Este movimento é chamado de periódico ou harmônico ou vibração ou movimento de oscilação.

Exemplos $\Rightarrow$ pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais, vibrações dos átomos em moléculas ou cristais, etc.

Sistemas Oscilantes mais simples $\Rightarrow$ são chamados de Oscilador Harmônico Simples Unidimensional e têm apenas um grau de liberdade (θ ou x)

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Sistema massa-mola sem atrito



$$F = -kx$$

Força restauradora

Movimento Harmônico Simples (MHS)

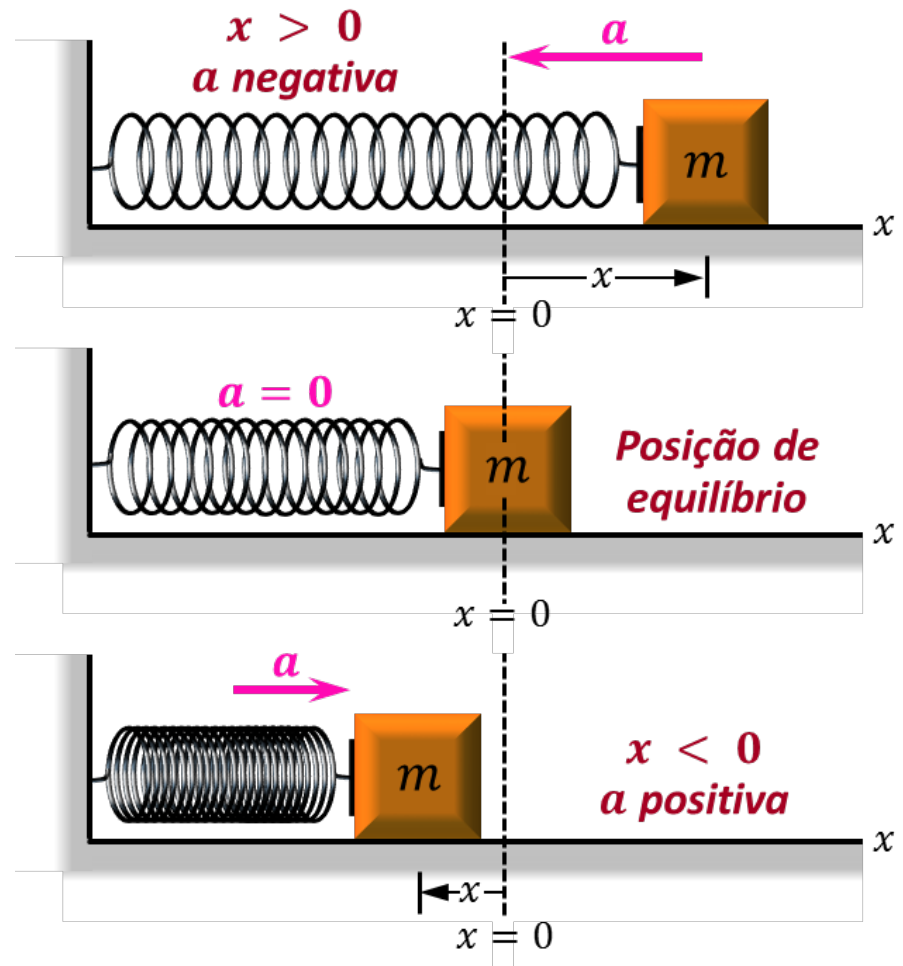
Sistema massa-mola sem atrito

$$F = -kx = ma$$

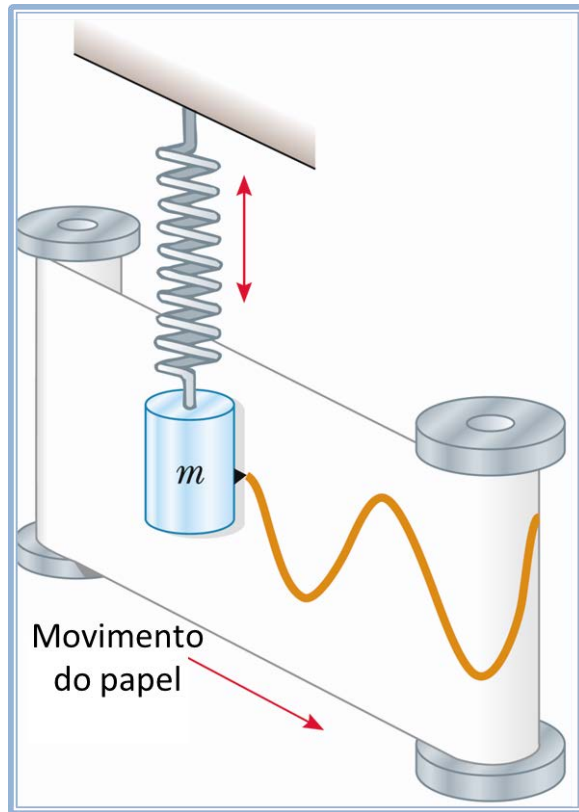
$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

*Equação que governa
o MHS do corpo m*



Movimento Harmônico Simples (MHS)



Aparato experimental para demonstrar o MHS. Uma caneta anexada à uma massa oscilante traça, no papel em movimento, um padrão do tipo de uma onda.

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Sistema massa-mola sem atrito: equação de movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Equação diferencial homogênea linear de 2ª ordem

- **homogênea** $\Rightarrow$ o termo independente de x é nulo
- **linear** $\Rightarrow$ só aparecem termos lineares em x e nas derivadas de x (não aparecem termos como $x^2, x^3, (dx/dt)^2$, etc ...)
- **ordem** $\Rightarrow$ maior índice da derivada (neste caso de 2ª ordem, pois aparece a segunda derivada de x)

Eq. diferencial linear de 2ª ordem (curiosidade)

$$\boxed{A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + C x = F} \quad \text{ou} \quad \boxed{A \ddot{x} + B \dot{x} + C x = F}$$

- $A, B, C, F \Rightarrow$ coeficientes da equação, podem ser constantes ou dependentes de t .
- A, B, C, F são constantes $\Rightarrow$ equação diferencial de 2ª ordem a coeficientes constantes
- $F = 0 \Rightarrow$ equação homogênea

Propriedades das equações diferenciais lineares de 2ª ordem, homogêneas

$$A \ddot{x} + B \dot{x} + C x = 0$$

1. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação, então $x_1(t) + x_2(t)$ também é solução.
2. Se $x_1(t)$ é solução da equação, então $a x_1(t)$, com a uma constante arbitrária, também é solução.
3. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação, então $x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$, com a e b constantes arbitrárias, também é solução.

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$ frequência própria do movimento oscilatório

Eq. do MHS $\Rightarrow$ derivada segunda da função é igual a uma constante vezes a própria função $\Rightarrow$ as funções seno e cosseno têm esta propriedade $\therefore$

$$\begin{aligned} 1^a \text{ tentativa} &\Rightarrow x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \\ &\Rightarrow \dot{x}_1 = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \text{ e } \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \text{ é solução.}$$

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

2ª tentativa $\Rightarrow x_2(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$
 $\Rightarrow \dot{x}_2 = \omega_0 \cos(\omega_0 t)$ e $\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t)$

Substituindo na equação:

$$-\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t) + \omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) = \text{sen}(\omega_0 t) \text{ é solução.}$$

Solução mais geral possível

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \text{sen}(\omega_0 t) \quad (a \text{ e } b \text{ constantes arbitrárias}) \quad \textcircled{1}$$

ou ainda $\Rightarrow x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \textcircled{2}$

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Utilizando $\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C$ podemos re-escrever a equação ②: $x(t) = A [\cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi]$

Comparando-a com a equação ①:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (a \text{ e } b \text{ constantes arbitrárias})$$

temos:
$$\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = -A \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $x(t) = 3 \cos(2\pi t) + 4 \sin(2\pi t)$,

re-escreva na forma $x(t) = A \cos(2\pi t + \varphi)$.

Identificando
$$\begin{cases} a = A \cos \varphi = 3 \\ b = -A \sin \varphi = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \rightarrow A = 5 \\ \cos \varphi = \frac{3}{5} = 0,6 \rightarrow \varphi \simeq 0,93 \end{cases}$$

$$x(t) = 5 \cos(2\pi t + 0,93)$$

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Interpretação dos parâmetros que aparecem na solução da equação de movimento do MHS

$$\begin{cases} \text{equação} \implies \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \text{solução} \implies x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

- $A \longrightarrow |x_{\text{máx}}(t)| \implies$ amplitude de oscilação (m)
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \implies$ frequência angular de oscilação (rad/s)
- $\omega_0 t + \varphi \implies$ fase do movimento de oscilação
- $\varphi \implies$ fase inicial do movimento de oscilação (valor da fase em $t = 0$ s)

 Se sistema massa-mola em MHS: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Como determinar A e φ ?

Através do ajuste da equação de movimento às condições iniciais:

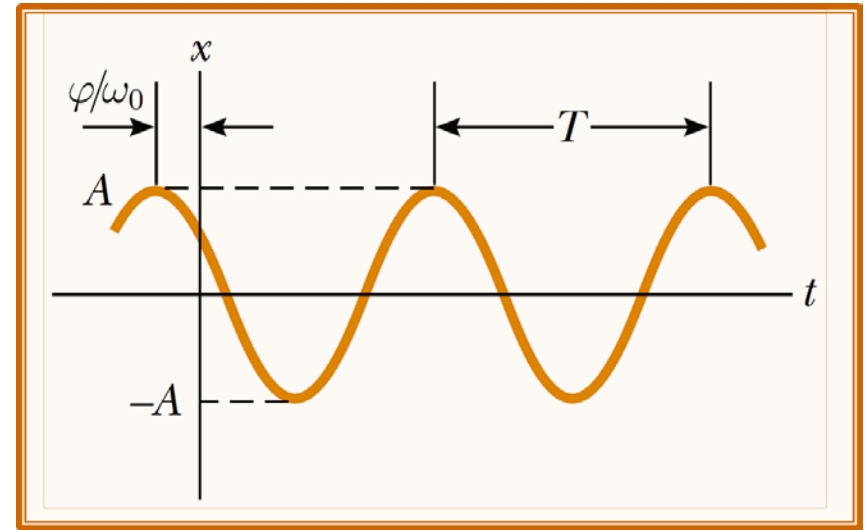
$$\text{sejam dados} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\text{então} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = A \cos \varphi & \textcircled{1} \\ v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow v(0) = v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow A \cos \varphi = x_0 \Rightarrow A^2 \cos^2 \varphi = x_0^2 \\ \textcircled{2} \Rightarrow A \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} \Rightarrow A^2 \sin^2 \varphi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \end{array} \right\} A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\downarrow$$
$$\text{tg } \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{\omega_0^2 x_0^2}{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}$$



Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow |x_{\text{máx}}(t)| = A \quad \Rightarrow$$

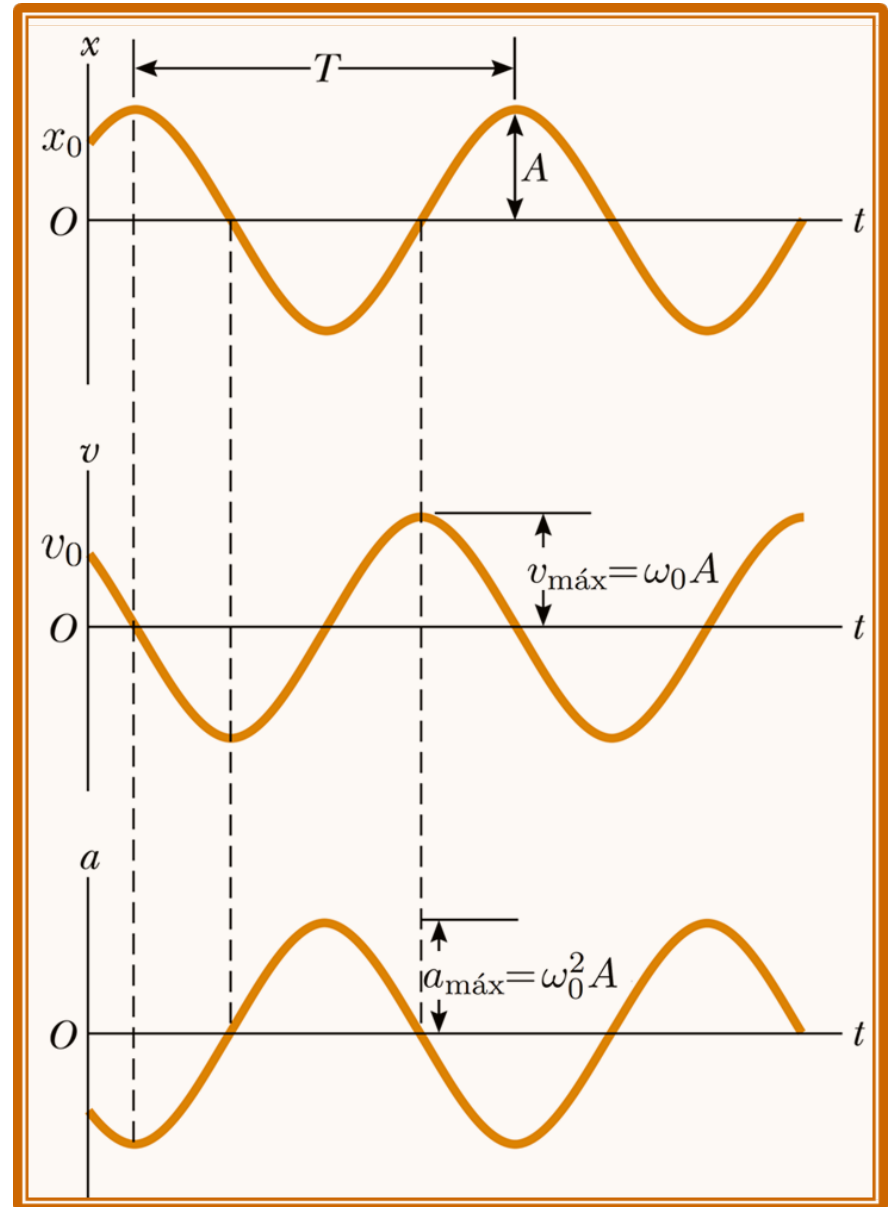
$$v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow |v_{\text{máx}}(t)| = \omega_0 A \quad \Rightarrow$$

$$a(t) = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

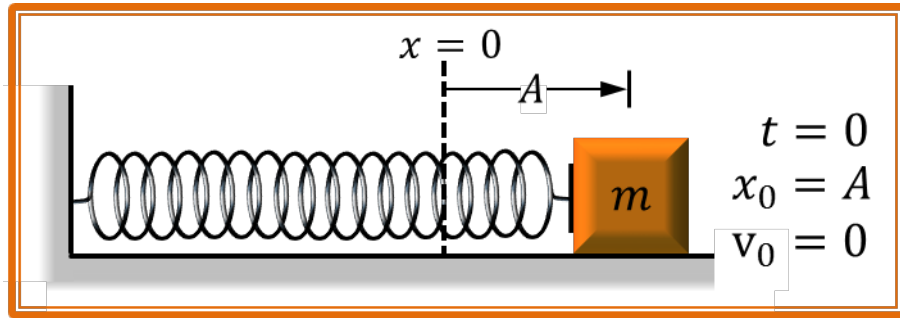
$$= -\omega_0^2 x(t)$$

$$\Rightarrow |a_{\text{máx}}(t)| = \omega_0^2 A \quad \Rightarrow$$



MHS $\Rightarrow$ sistema massa-mola

1º Caso:



$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

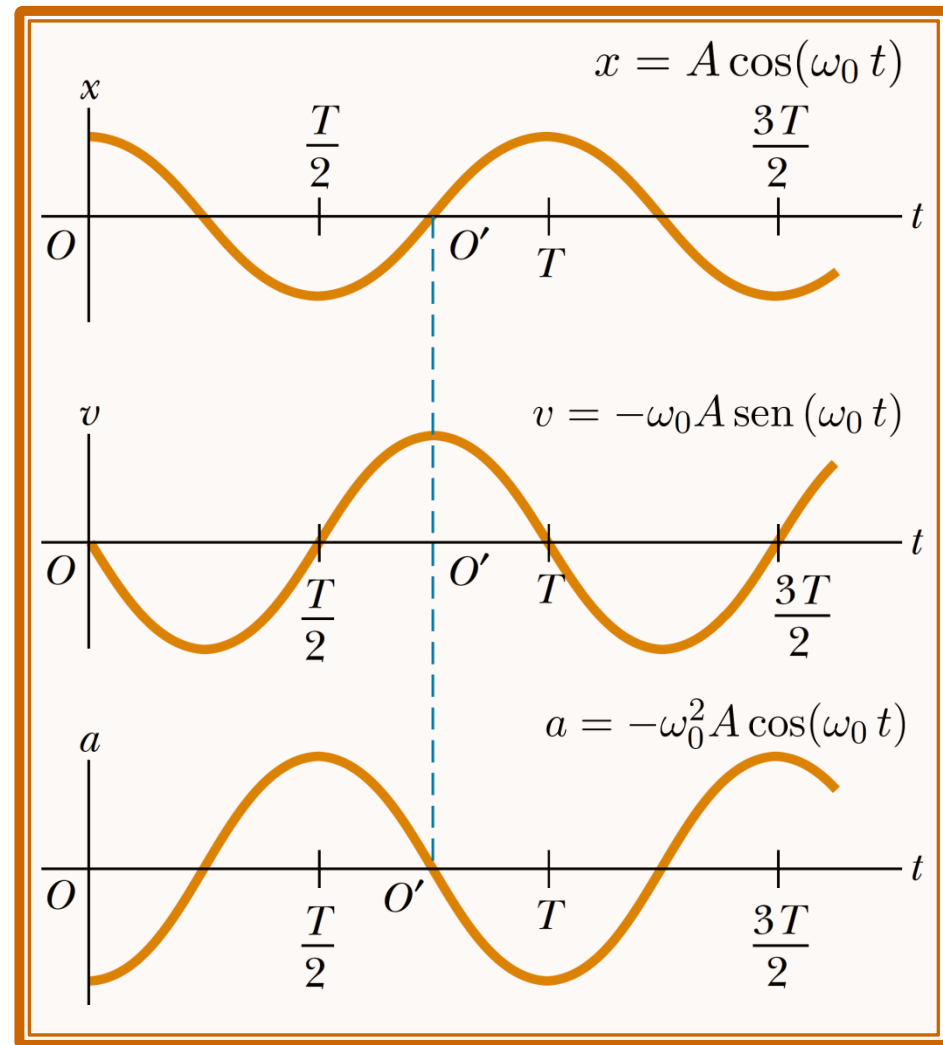
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(0) = A = A \cos \varphi \rightarrow \varphi = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t)$$



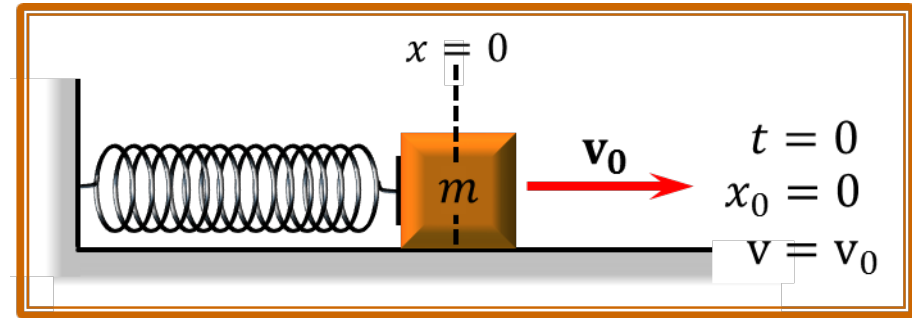
MHS $\Rightarrow$ sistema massa-mola

2º Caso:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} = -\infty \Rightarrow \varphi = -\pi/2$$



$$x(0) = 0 = A \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = -\pi/2 \quad (x > 0)$$

$$\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \cos(\omega_0 t) \cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\omega_0 t) \operatorname{sen}(\pi/2)$$

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t)$$

$$v(0) = v_0 = \omega_0 A \Rightarrow v(t) = v_0 \cos(\omega_0 t)$$



$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega_0 t)$$

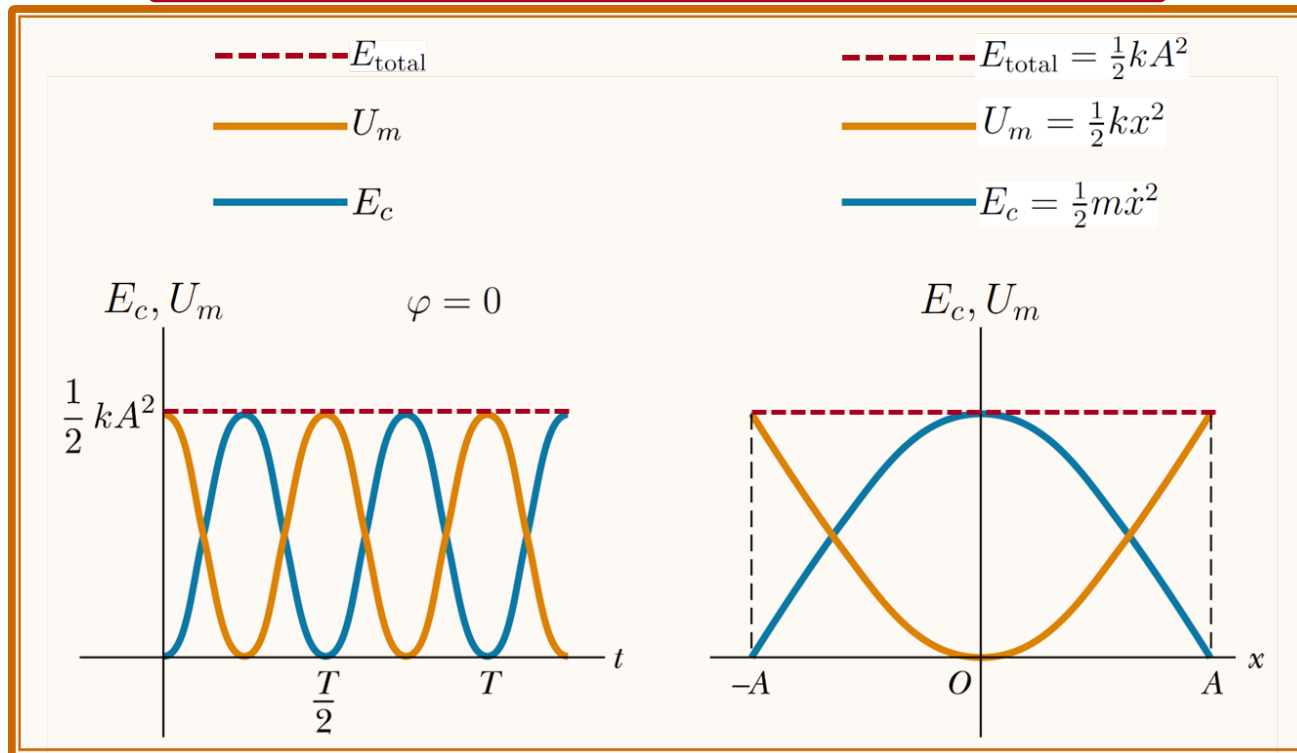
$$a(t) = -v_0 \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Energia mecânica do MHS (massa-mola)

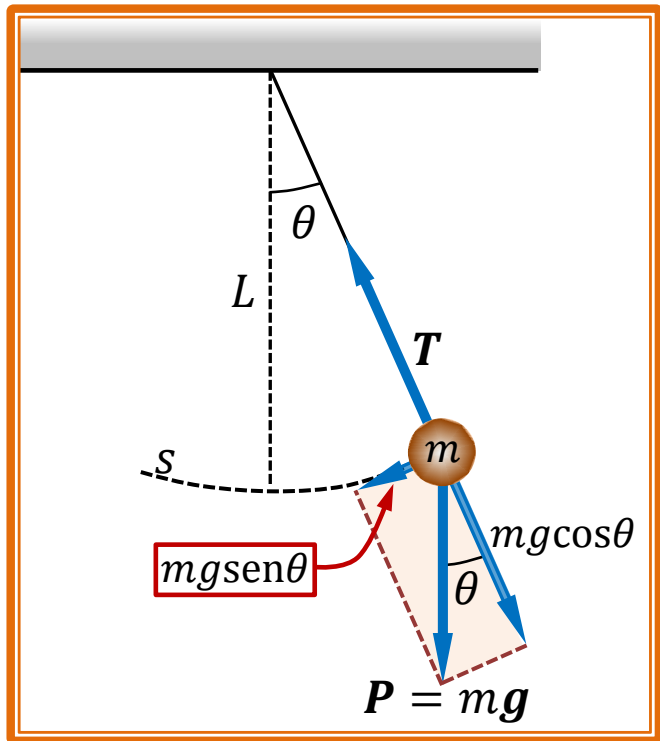
$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U_m = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} (m \omega_0^2) A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \implies \text{constante}$$



Pêndulo Simples



Força restauradora: $F = -mg \sin \theta$

Deslocamento da massa: s tal que $ds = L d\theta$

$$F = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2} = m L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

Equação de movimento:

$$m L \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

$$\theta \text{ pequeno} \implies \sin \theta = \theta$$

Equação de movimento: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ **MHS**

Solução: $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Pêndulo Simples: energia mecânica

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U_g = mgh = mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\theta \text{ pequeno} \implies \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

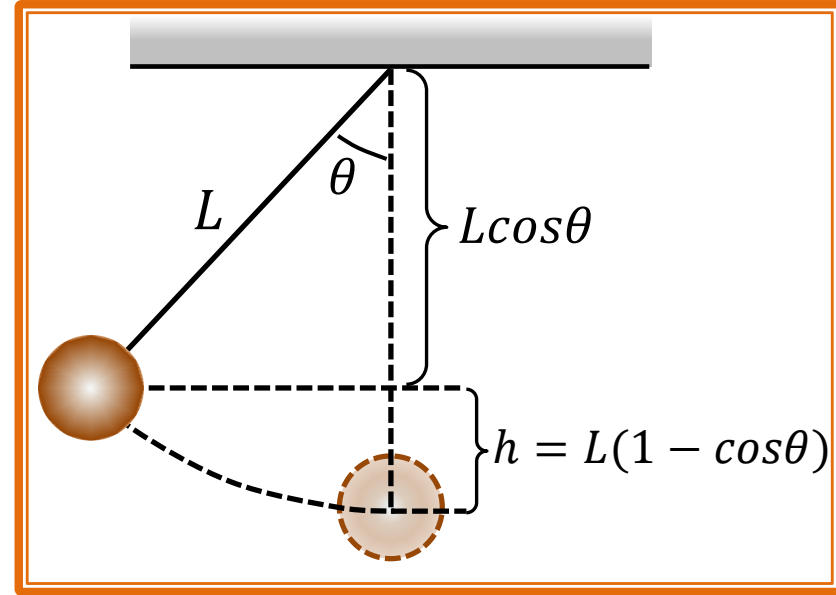
$$\implies \dot{\theta} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g L \theta^2$$

$$\implies E_{\text{total}} = \frac{1}{2} m L^2 \underbrace{\omega_0^2}_{g/L} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m g L A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\implies E_{\text{total}} = \frac{1}{2} m g L A^2 \implies \text{constante}$$



MHS do sistema massa-mola e sua relação com o movimento de um pêndulo simples (θ pequeno)

