

Figuras Planas

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

14 de Setembro de 2018

Conteúdo

1	Propriedades Geométricas das Figuras Planas	1
1.1	Área A	2
1.2	Momentos Estáticos S_s, S_t	2
1.3	Centro de Gravidade $G(s_G, t_G)$	3
1.4	Momentos de Inércia	6
1.4.1	Momento Axial de Inércia I_s, I_t	6
1.4.2	Momento Centrífugo de Inércia I_{st}	8
1.4.3	Momento Polar de Inércia I_p	9
1.5	Raios de Giração i_s, i_t	11
2	Mudança de Eixos	12
2.1	Translação de Eixos	12
2.2	Rotação de Eixos	15
3	Momentos Principais e Momentos Centrais de Inércia	17
4	Problemas	22

1 Propriedades Geométricas das Figuras Planas

Antes de iniciar o estudo geral da flexão de barras, convém examinar algumas características das seções transversais. As características que nos interessam são as propriedades geométricas

das figuras planas que aparecem na dedução das expressões das tensões normais e tangenciais que atuam na seção transversal (ST).

Intencionalmente, evitar-se-á o emprego das letras x, y e z para designar os eixos usados nas definições e exemplos. Essas letras serão reservadas para o eixo da barra e os eixos centrais de inércia da ST.

Nos itens a seguir, os eixos s e t são dois eixos perpendiculares quaisquer. A adição da linha ($'$) ao nome do eixo indica um eixo paralelo passando pelo centro de gravidade da ST (Fig. 1).

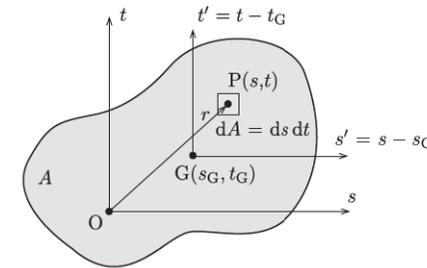


Fig. 1: Seção transversal. Elemento de área dA .

1.1 Área A

A *área* de uma figura plana é definida pela integral:

$$A = \int_A dA \quad [L^2] \quad (1)$$

em que dA representa um elemento infinitesimal de área conforme mostrado na Fig. 1.

Nota 1 A letra A é usada para designar tanto a área da figura quanto o domínio de integração nas expressões definidas nesta seção.

1.2 Momentos Estáticos S_s, S_t

Os *momentos estáticos* da figura em relação aos eixos s e t são definidos, respectivamente, por

$$S_s = \int_A t dA, \quad S_t = \int_A s dA. \quad [L^3] \quad (2)$$

Os momentos estáticos são também denominados *momentos de primeira ordem de área* da figura plana.

Nota 2 Repare na troca das letras que designam o eixo no subscripto e a coordenada no integrando. Ela ocorrerá na maioria das definições.

1.3 Centro de Gravidade $G(s_G, t_G)$

O *centro de gravidade* é o ponto de intersecção dos eixos em relação aos quais o momento estático se anula. Assim, para o eixo s' passando pelo centro de gravidade G e paralelo ao eixo s , tem-se por definição:

$$S_{s'} = 0 \implies 0 = \int_A t' dA = \int_A (t - t_G) dA = \int_A t dA - \int_A t_G dA = S_s - t_G A.$$

Logo, a coordenada t_G do centro de gravidade é dada por

$$t_G = \frac{S_s}{A}.$$

Procedendo de modo análogo com $S_{t'}$, obtemos a outra coordenada:

$$s_G = \frac{S_t}{A}.$$

Translação de eixos As expressões acima fornecem a posição de G , mas também podem ser usadas para calcular o momento estático em relação a um eixo genérico s paralelo a s' uma vez conhecida a posição de G ,

$$S_s = t_G A,$$

onde t_G é a ordenada de G no sistema de coordenadas (s, t) .

Exemplo 1 Determine a ordenada do centro de gravidade G de um triângulo cuja base está sobre o eixo s . São conhecidas a altura h e a base b do triângulo.

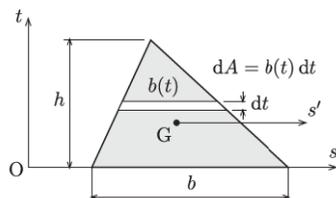


Fig. E 1: Triângulo.

$$t_G = \frac{h}{3}$$

Decomposição Algébrica da ST em Figuras Planas Elementares

Como o momento estático é uma integral de uma função contínua no domínio A , ele pode ser decomposto em uma soma de integrais. Por exemplo, conhecidos os momentos estáticos do retângulo e do triângulo, os mesmos podem ser usados no cálculo do momento estático de um trapézio (Fig. 2).

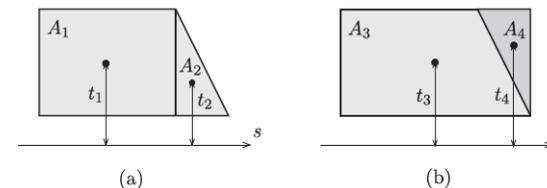


Fig. 2: Decomposição da ST.

$$S_s = \int_A t dA = \underbrace{\int_{A_1} t dA + \int_{A_2} t dA}_{(a)} = \underbrace{\int_{A_3} t dA - \int_{A_4} t dA}_{(b)}$$

Se os centros de gravidade das figuras forem conhecidos o cálculo resume-se a

$$S_s = \underbrace{A_1 t_1 + A_2 t_2}_{(a)} = \underbrace{A_3 t_3 - A_4 t_4}_{(b)}.$$

Exemplo 2 Determine a posição do G da seção transversal (medidas em mm).

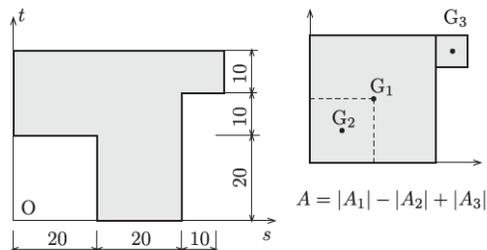


Fig. E2: Decomposição.

Exemplo 3 Determine $G(s_G, t_G)$ para o setor circular de raio R e ângulo θ .

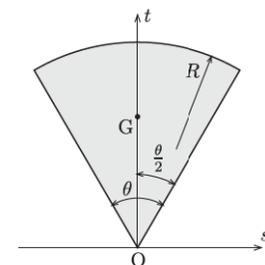
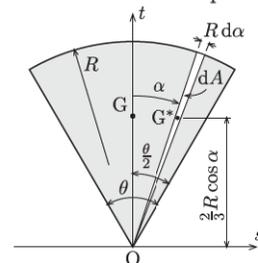


Fig. E3: Setor circular.

$$G = (25,00; 24,23)$$

SOLUÇÃO Por simetria, tem-se $s_G = 0$. Um modo simples de obter t_G faz uso de um setor elementar dA em coordenadas polares



$$dA = \frac{R(R d\alpha)}{2} = \frac{R^2 d\alpha}{2},$$

$$t_{G^*} = \frac{2}{3}R \cos \alpha.$$

Assim,

$$A = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \frac{R^2}{2} d\alpha = \left[\frac{R^2 \alpha}{2} \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} = \frac{R^2 \theta}{2},$$

$$S_s = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{2}{3}R \cos \alpha \right) \frac{R^2 d\alpha}{2} = \frac{R^3}{3} [\text{sen } \alpha]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{R^3}{3} \left[\text{sen } \frac{\theta}{2} - \text{sen} \left(-\frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{2R^3}{3} \text{sen } \frac{\theta}{2}.$$

Resultando,

$$t_G = \frac{S_s}{A} = \frac{4R \text{sen } \frac{\theta}{2}}{3\theta}. \quad \triangle$$

1.4 Momentos de Inércia

Três tipos de *momentos de inércia* de área, também chamados de *momentos de segunda ordem*, podem ser definidos: o axial, o centrífugo e o polar de inércia. Quando o tipo é omitido, o termo *momento de inércia* usualmente denota o momento axial.

1.4.1 Momento Axial de Inércia I_s, I_t

Os *momentos axiais de inércia* são definidos em relação aos eixos do sistema de coordenadas:

$$I_s = \int_A t^2 dA \quad I_t = \int_A s^2 dA \quad [L^4] \quad (3)$$

Nota 3 Uma característica importante do momento axial de inércia é que ele é sempre positivo.

Exemplo 4 Determine os momentos de inércia do retângulo em relação a um eixo s passando por sua base e um eixo s' paralelo a s e passando por G .

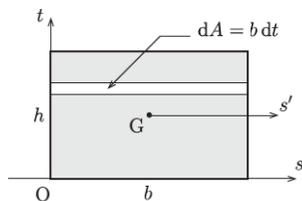


Fig. E 4: Retângulo.

$$I_s = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{s'} = \frac{bh^3}{12}$$

Exemplo 5 Determine os momentos de inércia do triângulo em relação a um eixo s passando por sua base e um eixo s' paralelo a s e passando por G .

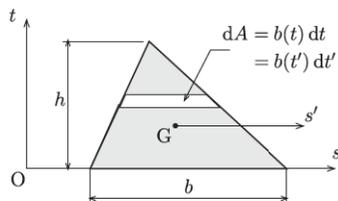


Fig. E 5: Triângulo.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, temos

$$dA = b(t) dt = \frac{b}{h}(h-t) dt.$$

Inserindo na expressão do momento de inércia em relação ao eixo s ,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_A t^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (ht^2 - t^3) dt \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{ht^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{12} \right] \end{aligned}$$

$$I_s = \frac{bh^3}{12}.$$

Em relação ao eixo s' ,

$$dA = b(t') dt' = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - t' \right) dt',$$

$$\begin{aligned} I_{s'} &= \int_A t'^2 dA = \frac{b}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \left(\frac{2ht'^2}{3} - t'^3 \right) dt' \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{2ht'^3}{9} - \frac{t'^4}{4} \right]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \\ &= bh^3 \left[\frac{64 - 48 + 8 + 3}{12 \times 81} \right] \\ &= bh^3 \left[\frac{27}{12 \times 81} \right] \end{aligned}$$

$$I_{s'} = \frac{bh^3}{36}.$$

1.4.2 Momento Centrífuco de Inércia I_{st}

O *momento centrífugo de inércia*, também denominado *produto de inércia*, em relação a dois eixos perpendiculares s e t é definido por:

$$I_{st} = \int_A st dA$$

$$[L^4] \tag{4}$$

Exemplo 6 Determine o momento centrífugo do triângulo retângulo em relação a eixos passando pelos catetos de comprimentos b e h .

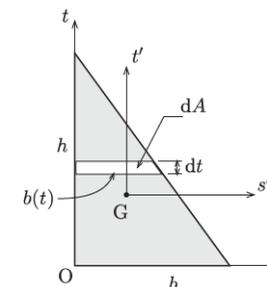


Fig. E6: Triângulo retângulo.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} I_{st} &= \int_A st dA = \int_0^h \int_0^{b(t)} st ds dt = \int_0^h \left[\frac{ts^2}{2} \right]_0^{b(t)} dt = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (ht^2 - 2ht^2 + t^3) dt \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{ht^2}{2} - \frac{2ht^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^h = \frac{b^2 h^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{6 - 8 + 3}{12} \right] \end{aligned}$$

$$I_{st} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

Nota 4 O momento centrífugo de inércia pode assumir valores positivos e negativos dependendo da posição da figura plana em relação aos eixos s e t , Fig. 3-a. Quando a área abrange mais de um quadrante, normalmente é possível estabelecer o sinal do momento antes de calcular seu valor. Para isso, consideram-se as áreas nos quadrantes positivos e negativos, avaliando-se as distâncias dos respectivos centros de gravidade à origem dos eixos. Para o triângulo na Fig. 3-a, por exemplo, tem-se $I_{s't'} < 0$.

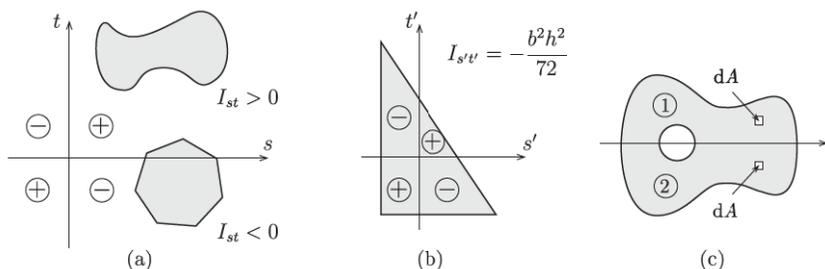


Fig. 3: Momento centrífugo: (a) e (b) avaliação do sinal, (c) eixo de simetria.

Nota 5 É fácil demonstrar que o momento centrífugo é zero em relação a um eixo de simetria da figura plana (Fig. 3-c). Para cada elemento de área dA de um lado do eixo de simetria existe um elemento idêntico do outro lado do eixo,

$$I_{st} = \int_{A_1} st \, dA + \int_{A_2} st \, dA = \int_{A_1} s |t| \, dA + \int_{A_1} s (-|t|) \, dA = 0.$$

1.4.3 Momento Polar de Inércia I_p

O *momento polar de inércia* corresponde ao momento de inércia em relação a um eixo normal à figura plana e passando pela origem,

$$I_p = \int_A r^2 \, dA \quad [L^4] \quad (5)$$

em que r é a distância ao centro O do sistema de coordenadas, Fig. 1.

Nota 6 A relação entre o momento polar e os momentos axiais de inércia em relação a um par de eixos perpendiculares é dada por

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_A (s^2 + t^2) \, dA = I_t + I_s.$$

Exemplo 7 Determine os momentos axiais de inércia do círculo em relação a eixos passando por G .

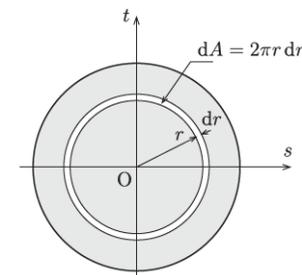


Fig. E7: Círculo.

$$I_p =$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_s =$$

$$I_s = I_t = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Exemplo 8 Determine a posição do centro de gravidade de um quarto de círculo situado no primeiro quadrante e os valores dos momentos de inércia I_{st} e I_s .

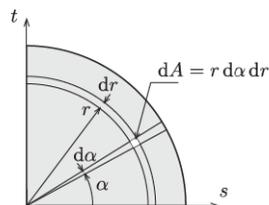


Fig. E 8: Um quarto de círculo.

SOLUÇÃO Posição de G:

$$A = \frac{\pi R^2}{4}, \quad dA = (r \, d\alpha) \, dr$$

$$\begin{aligned} S_s &= \int_A t \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R (r \, \text{sen} \, \alpha) \, r \, dr \right] d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \text{sen} \, \alpha \, d\alpha = \left[-\frac{R^3 \cos \alpha}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{R^3}{3}, \end{aligned}$$

$$t_G = \frac{S_s}{A} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Por simetria, $G = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

$$\begin{aligned} I_{st} &= \int_A st \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \, \text{sen} \, \alpha)(r \, \text{cos} \, \alpha) \, r \, dr \, d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 \, \text{sen} \, \alpha \, \text{cos} \, \alpha \, dr \, d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \frac{\text{sen} \, 2\alpha}{2} \, d\alpha \\ &= \frac{R^4}{4} \left[-\frac{\text{cos} \, 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{8}, \end{aligned}$$

$$I_s = \int_A t^2 \, dA = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16},$$

onde momento de inércia do círculo foi usado no cálculo de I_s .

1.5 Raios de Giração i_s, i_t

Os raios de giração em torno dos eixos s e t são definidos por

$$\boxed{i_s = \sqrt{\frac{I_s}{A}}} \quad \boxed{i_t = \sqrt{\frac{I_t}{A}}} \quad [L] \quad (6)$$

em que I_s e I_t são os correspondentes momentos axiais de inércia, e A é a área da figura.

2 Mudança de Eixos

2.1 Translação de Eixos

Problema Típico: Conhecidos os momentos estáticos e de inércia em relação a dois eixos perpendiculares s' e t' passando por G, determine os valores dos momentos em relação aos eixos s e t paralelos aos anteriores¹.

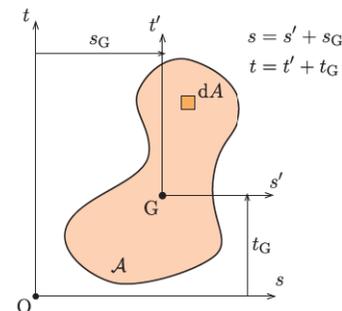


Fig. 4: Translação de eixos.

Com base na Fig. 4, as expressões de S_s , I_s e I_{st} podem ser colocadas em função das coordenadas s' e t' ,

$$S_s =$$

$$\boxed{S_s = t_G A.} \quad (7)$$

$$I_s =$$

$$\boxed{I_s = I_{s'} + t_G^2 A.} \quad (8)$$

Analogamente,

$$\boxed{I_t = I_{t'} + s_G^2 A.} \quad (9)$$

¹As fórmulas de translação dos momentos de inércia são conhecidas como teorema de Steiner.

Momento centrífugo,

$$I_{st} =$$

$$I_{st} = I_{s't'} + s_G t_G A. \quad (10)$$

Nota 7 Em um mesmo problema, as Eqs. (8) e (9) são usadas primeiramente no cálculo de I_s e I_t das sub-áreas e, posteriormente, no de $I_{s'}$ e $I_{t'}$ da seção como um todo. Ao invés de recordar os sinais nas fórmulas, uma vez que elas são usadas nos dois sentidos, é mais interessante lembrar que o termo mais à direita é sempre positivo. Assim, toda vez que uma figura plana afastar-se do eixo passando pelo seu próprio centro de gravidade o momento axial aumenta, e vice-versa:

$$I_s = I_{s'} + \underbrace{t_G^2 A}_+$$

Nota 8 Ao contrário do que acontece com os momentos axiais, os sinais de s_G e t_G são importantes na translação do momento centrífugo. Uma maneira simples de verificar o sinal de I_{st} consiste em prestar atenção nos quadrantes ocupados pela figura após a translação (ver Nota 4).

Exemplo 9 Calcule $I_{s'}$, $I_{t'}$ e $I_{s't'}$ para a seção da figura (medidas em cm).

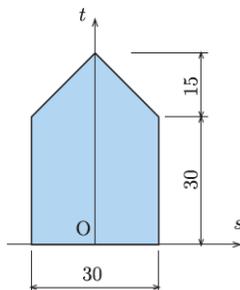


Fig. E9: Translação.

$$I_{s'} = 142\,312,5 \text{ cm}^4, \quad I_{t'} = 75\,937,5 \text{ cm}^4, \quad I_{s't'} = 0.$$

Exemplo 10 Determine o momento centrífugo do triângulo retângulo do Exemplo 6 em relação aos eixos passando por G.

SOLUÇÃO

$$I_{s't'} = I_{st} - s_G t_G A = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3} \frac{h}{3} \frac{bh}{2} = \frac{3-4}{72} b^2 h^2 \Rightarrow I_{s't'} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

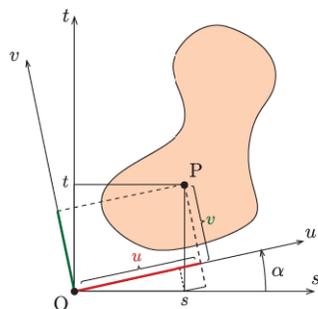


Fig. 5: Rotação de eixos.

2.2 Rotação de Eixos

Com base na Fig. 5, podemos deduzir as relações entre as coordenadas nos sistemas Ouv e Ost ,

$$\begin{aligned} u &= s \cos \alpha + t \sin \alpha \\ v &= -s \sin \alpha + t \cos \alpha, \end{aligned} \tag{11}$$

em que o ângulo α é medido no sentido anti-horário a partir do eixo s . Introduzindo a Eq. (11)₂ na expressão do momento de inércia em relação ao eixo u ,

$$I_u =$$

E lembrando que,

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, & \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, & \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Tem-se,

$$I_u = \frac{I_s + I_t}{2} + \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha - I_{st} \sin 2\alpha. \tag{12}$$

Introduzindo o ângulo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ na Eq. (12), obtém-se a expressão para o eixo v ,

$$I_v = \frac{I_s + I_t}{2} - \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha + I_{st} \sin 2\alpha. \tag{13}$$

Note que a soma dos momentos de inércia em relação a um par de eixos perpendiculares é constante,

$$I_u + I_v = I_s + I_t = I_p.$$

Substituindo os valores de u e v dados pela Eq. 11 na expressão do momento centrífugo de inércia, tem-se

$$I_{uv} =$$

ou,

$$I_{uv} = \frac{I_s - I_t}{2} \sin 2\alpha + I_{st} \cos 2\alpha. \tag{14}$$

Exemplo 11 Determine os valores de I_u , I_v e I_{uv} para os eixos indicados na figura a partir dos momentos de inércia em relação aos eixos s e t (medidas em cm).

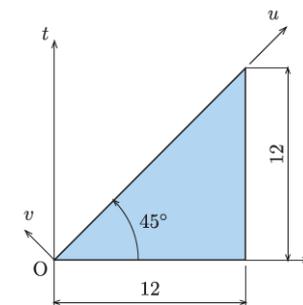


Fig. E 11: Triângulo isósceles.

3 Momentos Principais e Momentos Centrais de Inércia

Fixado um ponto Q, deseja-se determinar os momentos de inércia axiais extremos (máximo e mínimo) em relação a eixos passando por esse ponto.

Recordando a Eq. (12),

$$I_u(\alpha) = \frac{I_s + I_t}{2} + \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha - I_{st} \sin 2\alpha,$$

tem-se

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -(I_s - I_t) \sin 2\alpha - 2I_{st} \cos 2\alpha = 0. \quad (15)$$

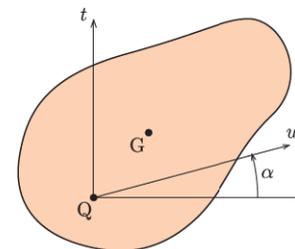


Fig. 6: Pesquisa dos extremos de I_u .

ou ainda

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{st}}{I_s - I_t}, \quad (16)$$

cuja solução fornece as direções de dois eixos perpendiculares denominados *eixos principais de inércia*. Substituindo na expressão de $I_u(\alpha)$, e inserindo as relações

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}, \quad \text{sen } 2\alpha = \pm \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}},$$

obtém-se os *momentos principais de inércia*,

$$\begin{cases} I_{\text{máx}} \\ I_{\text{mín}} \end{cases} = \frac{I_s + I_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_s - I_t}{2}\right)^2 + I_{st}^2}. \quad (17)$$

No caso particular em que a origem dos eixos coincide com G, os momentos de inércia são chamados de *centrais-principais* ou simplesmente *centrais*², e os eixos correspondentes, de *eixos centrais de inércia*.

$$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} = \frac{I_{s'} + I_{t'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{s'} - I_{t'}}{2}\right)^2 + I_{s't'}^2}, \quad \text{com } I_1 \geq I_2. \quad (18)$$

sendo,

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{s'} - I_1}{I_{s't'}}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{I_{s'} - I_2}{I_{s't'}}. \quad (19)$$

²Em [1, p. 88], Telemaco van Langendonck adota momento central, nomenclatura que será usada neste texto.

Os eixos principais são perpendiculares, o que pode ser demonstrado examinando a Eq. (16),

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{st}}{I_s - I_t}$$

Como 2α tem periodicidade π , a solução tem a forma $\alpha + \frac{n\pi}{2}$.

O momento centrífugo é sempre nulo em relação aos eixos principais pois o exame das Eqs. (15) e (14) fornece

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_{uv} \Rightarrow I_{uv} = 0 \text{ para } u \text{ e } v \text{ principais.}$$

A propriedade vale nos dois sentidos para eixos centrais de inércia: eixos perpendiculares passando por G com momento centrífugo de inércia nulo são eixos centrais.

Propriedades dos Momentos de Inércia

É interessante reunir algumas das propriedades dos momentos de inércia.

1. Os eixos principais são perpendiculares.
2. A condição necessária e suficiente para que eixos perpendiculares passando por G sejam eixos centrais é que I_{uv} seja nulo.

$$\text{Eixos centrais} \iff I_{uv} = 0.$$

3. Como I_{uv} é nulo em relação a um eixo de simetria, todo eixo de simetria é um eixo central. O outro eixo central é perpendicular ao de simetria e passa por G.

$$u \text{ é eixo de simetria} \Rightarrow u \text{ é eixo central.}$$

4. A soma dos momentos axiais de inércia em relação a qualquer par de eixos perpendiculares no plano da figura é constante.

$$I_s + I_t = I_u + I_v = I_1 + I_2.$$

5. Para as figuras planas com mais de um eixo de simetria e $I_{s'} = I_{t'}$ (Δ , \square etc.), todos os momentos centrais de inércia são iguais e todos os eixos passando por G são eixos centrais de inércia.

Exemplo 12 Para a seção transversal ao lado, determine:

- a) a posição do centro de gravidade G;
- b) os momentos de inércia e o momento centrífugo em relação aos eixos s e t ;
- c) os momentos principais de inércia em relação a eixos principais passando pela origem O do sistema de coordenadas;
- d) os momentos e os eixos centrais de inércia da seção.

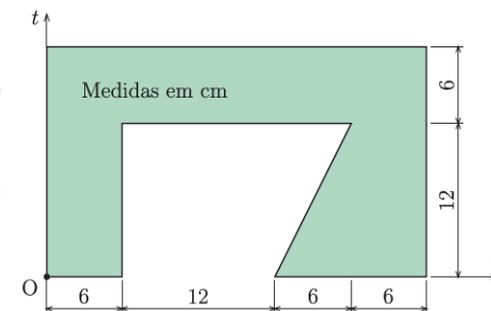


Fig. E12: Seção transversal.

SOLUÇÃO A resolução faz uso da decomposição indicada na Fig. E12-1.

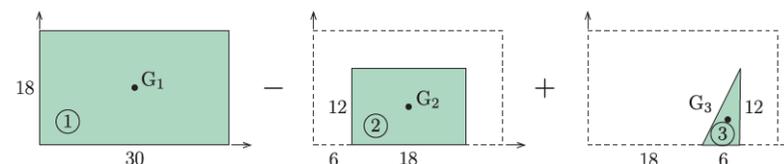


Fig. E12-1: Decomposição da seção.

- a) Posição do centro de gravidade

$$A_1(15, 9) = 30 \times 18 = 540 \quad A = A_1 - A_2 + A_3 = 360 \text{ cm}^2$$

$$A_2(15, 6) = 18 \times 12 = 216 \quad s_G = \sum \frac{A_i s_i}{A} = \frac{540 \times 15 - 216 \times 15 + 36 \times 22}{360} = 15,7 \text{ cm}$$

$$A_3(22, 4) = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \quad t_G = \sum \frac{A_i t_i}{A} = \frac{540 \times 9 - 216 \times 6 + 36 \times 4}{360} = 10,3 \text{ cm}$$

As coordenadas do centro de gravidade são $G(15,7; 10,3)$.

- b) Momentos de inércia e momento centrífugo em relação ao sistema Ost

As fórmulas do momento de inércia encontram-se na Fig. 7. Adotando os eixos indicados nas

figuras, temos

$$I_s = \frac{30 \times 18^3}{3} - \frac{18 \times 12^3}{3} + \frac{6 \times 12^3}{12}$$

$$= 58\,320 - 10\,368 + 864 = 48\,816 \text{ cm}^4$$

$$I_t = \frac{18 \times 30^3}{3} - \left(\frac{12 \times 18^3}{12} + 216 \times 15^2 \right) + \left(\frac{12 \times 6^3}{36} + 36 \times 22^2 \right)$$

$$= 162\,000 - 54\,432 + 17\,496 = 125\,064 \text{ cm}^4$$

$$I_{st} = (0 + 540 \times 15 \times 9) - (0 + 216 \times 15 \times 6) + \left(\frac{6^2 \times 12^2}{72} + 36 \times 22 \times 4 \right)$$

$$= 72\,900 - 19\,440 + 3\,240 = 56\,700 \text{ cm}^4$$

c) Eixos principais de inércia passando por O

A Eq. (17) fornece os momentos principais de inércia,

$$\begin{cases} I_{\text{máx}} \\ I_{\text{mín}} \end{cases} = \frac{48\,816 + 125\,064}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{48\,816 - 125\,064}{2} \right)^2 + 56\,700^2} = 86\,940 \pm 68\,325,17$$

Logo,

$$I_{\text{máx}} = 155\,265,17 \text{ cm}^4, \quad I_{\text{mín}} = 18\,614,83 \text{ cm}^4.$$

Expressões análogas à Eq. (19) fornecem os ângulos dos eixos principais em relação ao eixo s ,

$$\tan \alpha_{\text{máx}} = \frac{I_s - I_{\text{máx}}}{I_{st}} = -1,877 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{máx}} = -61,96^\circ$$

$$\tan \alpha_{\text{mín}} = \frac{I_s - I_{\text{mín}}}{I_{st}} = 0,5326 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{mín}} = 28,04^\circ$$

d) Momentos e eixos centrais de inércia

As Eqs. (8) a (10) levam aos momentos de inércia em relação ao sistema $Os't'$

$$I_{s'} = I_s - At_G^2 = 48\,816 - 360 \times 10,3^2 = 10\,623,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{t'} = I_t - As_G^2 = 125\,064 - 360 \times 15,7^2 = 36\,327,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{s't'} = I_{st} - As_G t_G = 56\,700 - 360 \times 15,7 \times 10,3 = -1\,515,6 \text{ cm}^4$$

A Eq. (18) fornece os momentos centrais de inércia,

$$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} = \frac{10\,623,6 + 36\,327,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10\,623,6 - 36\,327,6}{2} \right)^2 + (-1\,515,6)^2} = 23\,475,6 \pm 12\,941,1.$$

Portanto,

$$I_1 = 36\,416,7 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 10\,534,5 \text{ cm}^4.$$

Enquanto a Eq. (19) fornece os ângulos dos eixos centrais,

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{s'} - I_1}{I_{s't'}} = 17,02 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 86,6^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_{s'} - I_2}{I_{s't'}} = -0,0588 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -3,36^\circ$$

O centro de gravidade e os eixos obtidos estão indicadas na figura abaixo.

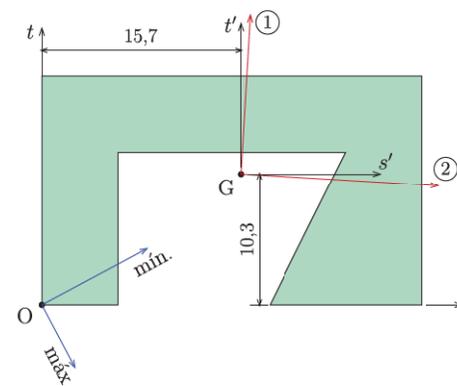


Fig. E 12-1: Eixos centrais de inércia.

4 Problemas

Formulário

A Fig. 7 condensa a maior parte das fórmulas deduzidas neste capítulo.

Problema 1 Para as seções de mesma área e altura indicadas na Fig. 8, determine a posição do centro de gravidade, os momentos centrais de inércia e as direções dos respectivos eixos.

Problema 2 Determine a posição do centro de gravidade, as direções dos eixos centrais e os momentos centrais de inércia para as seções indicadas na Fig. 9,

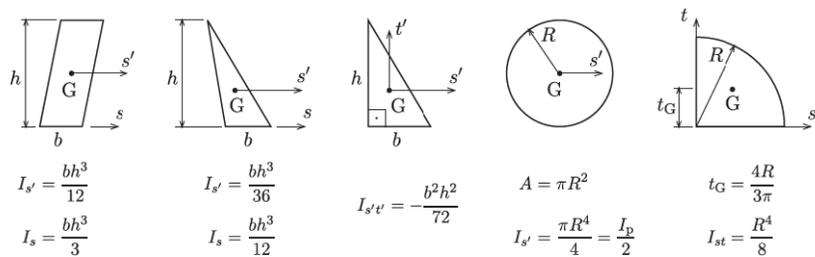


Fig. 7: Fórmulas usuais.

Medidas em mm

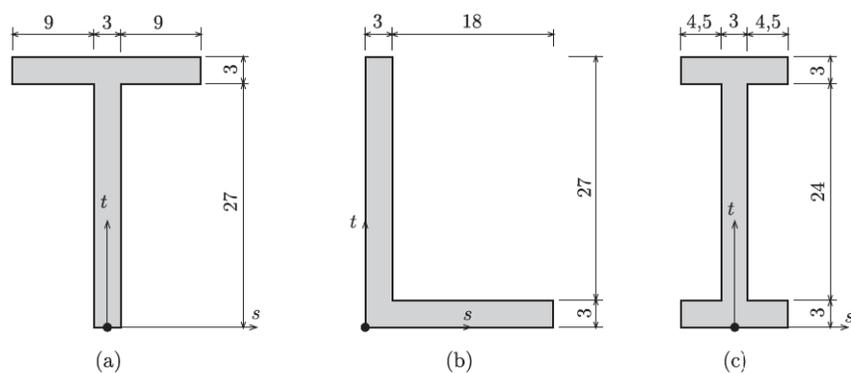


Fig. 8: Problema 1.

Problema 3 Determine a posição do centro de gravidade, as direções dos eixos centrais e os momentos centrais de inércia para a seção transversal da figura. As medidas na horizontal referem-se a pontos situados na linha média da parede da ST.

Respostas

Referências

[1] van Langendonck, Telemaco. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

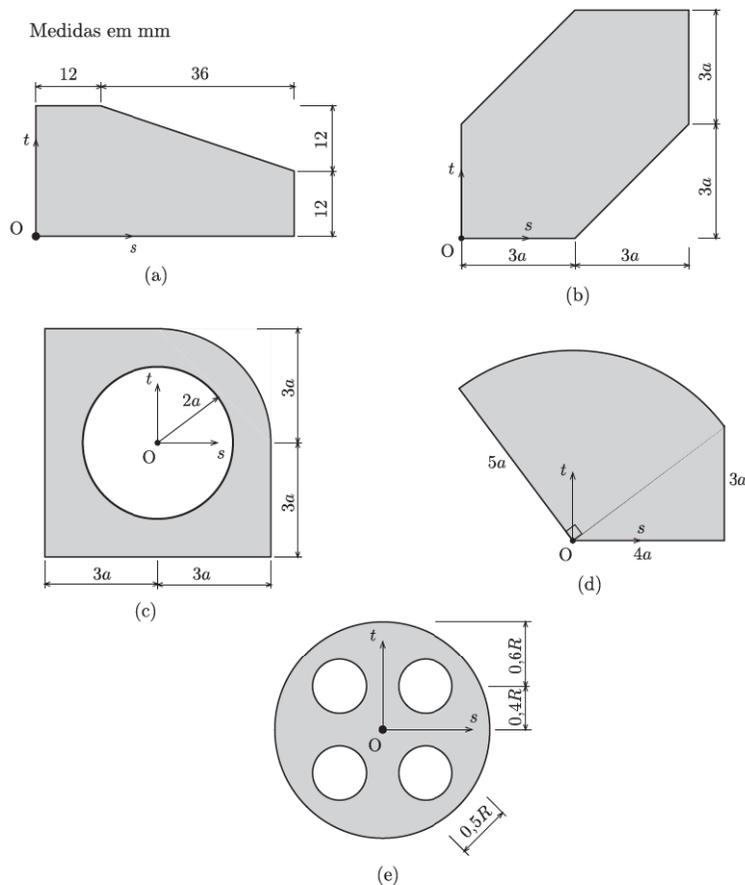


Fig. 9: Problema 2.

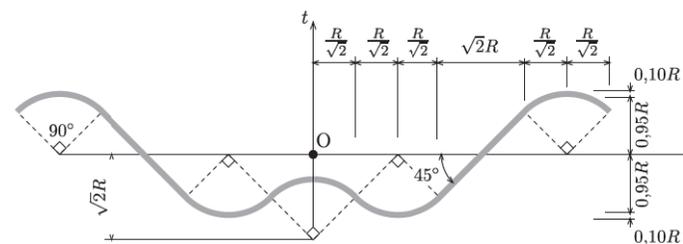


Fig. 10: Problema 3.

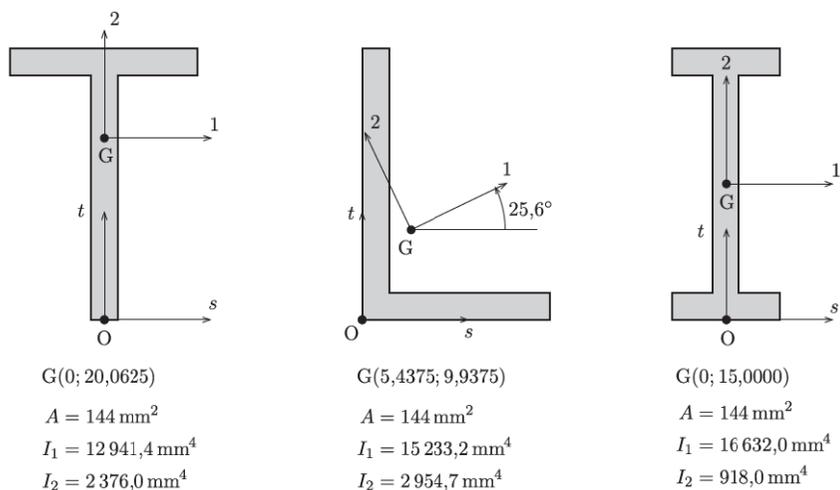


Fig. 11: Respostas do problema 1.

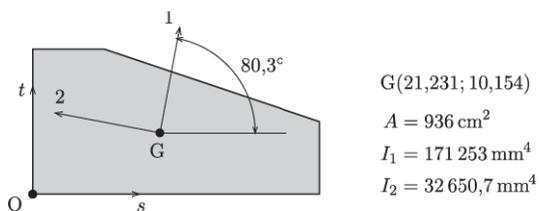


Fig. 12: Respostas do problema 2-a.

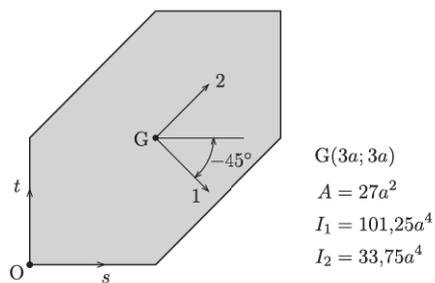


Fig. 13: Respostas do problema 2-b.

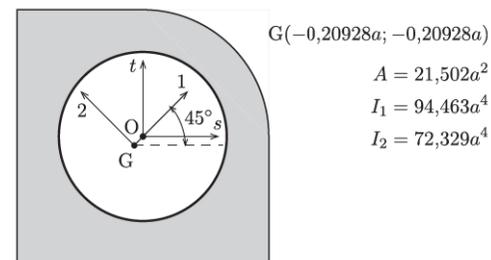


Fig. 14: Respostas do problema 2-c.

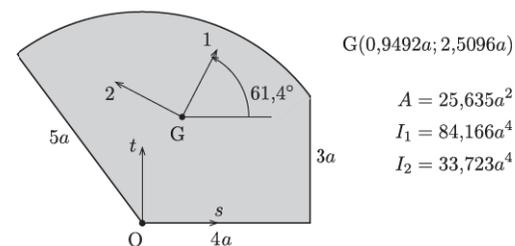


Fig. 15: Respostas do problema 2-d.

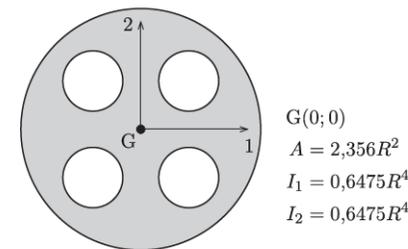


Fig. 16: Respostas do problema 2-e.

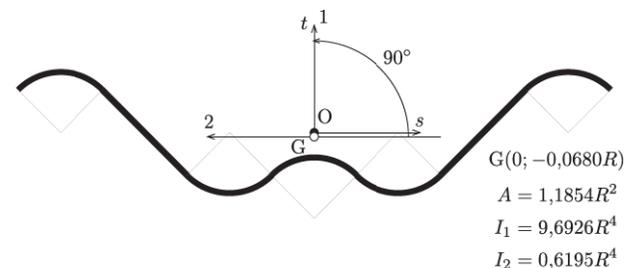


Fig. 17: Respostas do problema 3.

Index

área, 2

centro de gravidade, 3

círculo

momento axial de inércia, 10

momento polar de inércia, 10

decomposição algébrica, 4

eixo

central de inércia, 18

principal de inércia, 18

momento

axial de inércia, 6

central de inércia, 18

central-principal de inércia, 18

centrífugo de inércia, 8

de inércia, 6

propriedades, 19

de primeira ordem, 3

de segunda ordem, 6

estático, 2

polar de inércia, 9

principal de inércia, 18

produto de inércia, 8

raio de giração, 11

retângulo

momento axial de inércia, 7

setor circular

centro de gravidade, 5

triângulo

centro de gravidade, 3

momento axial de inércia, 7

momento centrífugo, 8