

# Estruturas com Deformação Axial

Edgard Sant'Anna de Almeida Neto

Escola Politécnica da USP

9 de Agosto de 2018

## Conteúdo

1 Estruturas Isostáticas	1
2 Estruturas Hiperestáticas	9
2.1 Método dos Esforços	9
2.2 Método dos Deslocamentos	11
2.3 Exemplos	13

## 1 Estruturas Isostáticas

No caso das estruturas isostáticas<sup>1</sup>, a ordem de resolução das equações que governam seu comportamento mecânico obedece o seguinte padrão:

$$\boxed{\text{Eqs. de Equilíbrio}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. Constitutivas}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. de Compatibilidade}}$$

Desse modo, é possível dimensionar a estrutura após calcular os esforços e, posteriormente, verificar se os deslocamentos não ultrapassam os valores admissíveis.

<sup>1</sup>Ao contrário das estruturas hiperestáticas que possuem vínculos redundantes, a eliminação de qualquer vínculo interno ou externo de uma estrutura isostática transformaria a estrutura em um mecanismo, ou seja, introduziria um movimento de corpo rígido de parte ou de toda a estrutura.

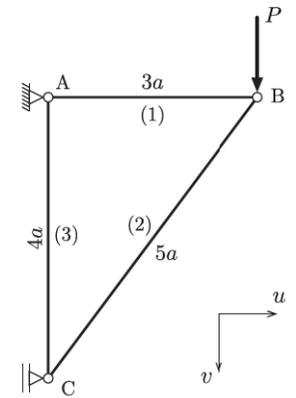


Fig. E 1: Treliça

**Exemplo 1** Calcule o deslocamento do nó B da treliça ao lado. Admita  $EA = \text{const.}$  para todas as barras.

### SOLUÇÃO

#### a) Reações

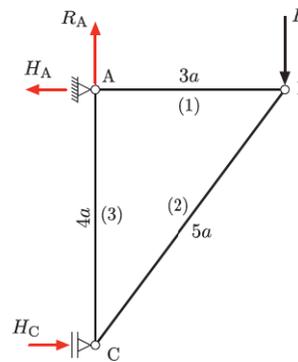


Fig. E 1-i: Reações de apoio.

$$\begin{aligned} \uparrow \{ R_A = P; \\ \curvearrowleft \{ P \times 3a - H_C \times 4a = 0 \Rightarrow H_C = \frac{3P}{4}; \\ \rightarrow \{ -H_A + H_C = 0 \Rightarrow H_A = \frac{3P}{4}. \end{aligned}$$

#### b) Forças normais

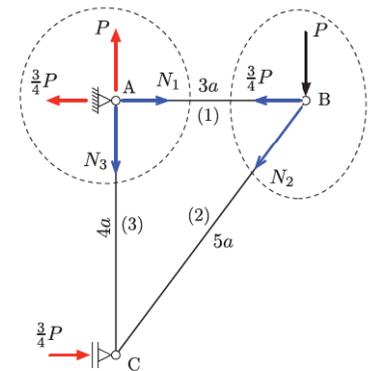


Fig. E 1-ii: Forças normais.

Nó A

$$N_1 = \frac{3P}{4}, \quad N_3 = P;$$

Nó B

$$\downarrow \left\{ P + \frac{4}{5}N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{5P}{4}; \right.$$

(verif.)

$$\leftarrow \left\{ N_2 \times \frac{3}{5} + \frac{3P}{4} = -\frac{5P}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3P}{4} = 0. \right.$$

#### c) Alongamento das barras $\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{EA_i}$

$$\Delta \ell_1 = \frac{3P}{4} \times \frac{3a}{EA} = \frac{9Pa}{4EA} = 9\beta \text{ (alonga);}$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{-5P}{4} \times \frac{5a}{EA} = -\frac{25Pa}{4EA} = -25\beta \text{ (encurta);}$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{P \times 4a}{EA} = \frac{4Pa}{EA} = 16\beta \text{ (alonga).}$$

## d) Deslocamento do ponto B

A Fig. E1-iii ilustra a construção gráfica para obter a configuração deformada da treliça. Ela tem início no apoio fixo A e considera o nó B separado em  $B_1$  e  $B_2$ . A extremidade  $B_1$  da barra 1, em decorrência da deformação  $\Delta \ell_1$ , move-se para  $B'_1$  e depois descreve um arco com centro em A que pode ser aproximado pela tangente  $r_1$  perpendicular à barra no ponto  $B'_1$ . A extremidade C da barra 3, em decorrência de  $\Delta \ell_3$ , desloca-se para  $C'$  satisfazendo a restrição do apoio simples, e leva junto a barra 2 que passa a ocupar a posição paralela  $C'B_2$ . A extremidade  $B'_2$  da barra 2, em decorrência de  $\Delta \ell_2$ , move-se para  $B'_2$  e depois descreve o arco aproximado pela tangente  $r_2$ . A posição final  $B'$  do ponto B, que é comum às barras 1 e 2, encontra-se na intersecção das retas  $r_1$  e  $r_2$ . Os três pontos A,  $B'$  e  $C'$  determinam a configuração deformada da treliça apresentada na Fig. 1-a na página 4.

Um esquema ressaltando as posições intermediárias dos pontos  $B_1$  e  $B_2$  encontra-se no canto inferior da Fig. E1-iii. A partir desse esquema, é possível deduzir as expressões das componentes de deslocamento do nó B.

**Nota 1** A obtenção gráfica dos deslocamentos de todos os nós da treliça pode ser feita em um único diagrama denominado *diagrama de Williot*. Nele, os alongamentos são representados nas direções originais das barras — as quais são omitidas do diagrama, e as rotações são indicadas por retas normais aos alongamentos, como mostra a Fig. 1-b.

**Nota 2** As relações entre os deslocamentos e os alongamentos das barras podem ser deduzidas sem calcular as forças normais considerando alongamentos positivos arbitrários  $\Delta \ell_1$ ,  $\Delta \ell_2$  e  $\Delta \ell_3$

$$u_B = \Delta \ell_1 = 9\beta = \frac{9Pa}{4EA} \quad (-);$$

$$v_B = 16\beta + 25\beta \operatorname{sen} \alpha + \frac{25\beta \cos \alpha + 9\beta}{\tan \alpha}$$

$$= 16\beta + 25\beta \times \frac{4}{5} + \left( 25\beta \times \frac{3}{5} + 9\beta \right) \div \frac{4}{3}$$

$$= 16\beta + 20\beta + (15\beta + 9\beta) \frac{3}{4}$$

$$= 54\beta = \frac{27Pa}{2EA} \quad (\downarrow).$$

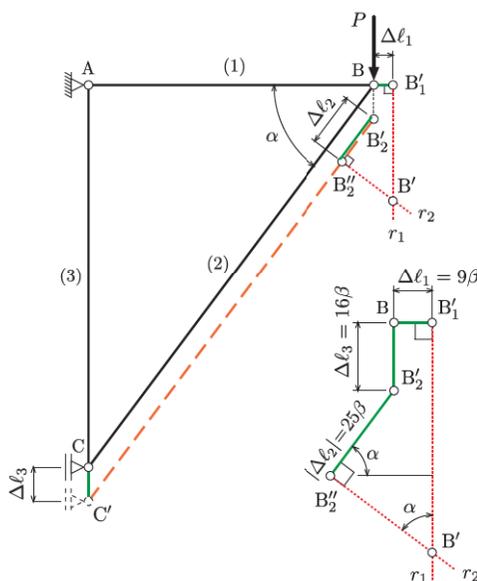


Fig. E1-iii: Deslocamentos dos nós.

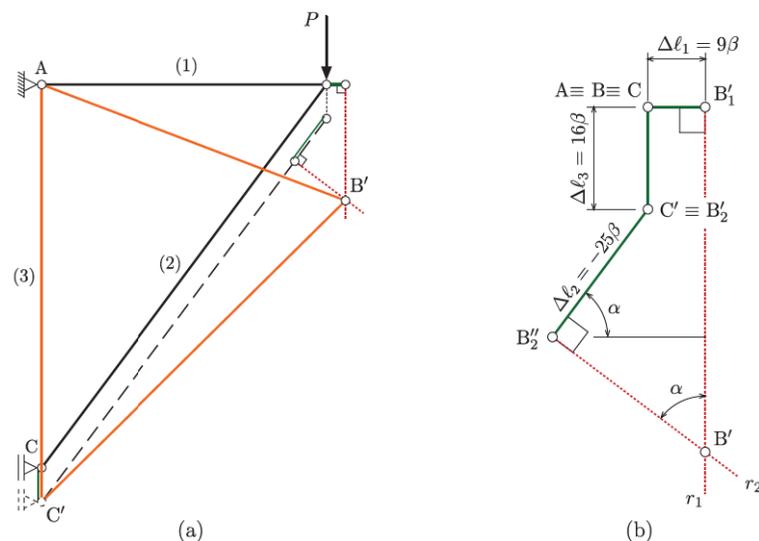


Fig. 1: (a) Configuração deformada da estrutura e (b) Diagrama de Williot

nas direções das respectivas barras com base na Fig. 2.

$$u_B = \Delta \ell_1;$$

$$v_B = \Delta \ell_3 - \Delta \ell_2 \cos(90^\circ - \alpha) + \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$= \Delta \ell_3 - \Delta \ell_2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{\Delta \ell_1 - \Delta \ell_2 \cos \alpha}{\tan \alpha}$$

$$= \Delta \ell_3 - \frac{\Delta \ell_2}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\Delta \ell_1}{\tan \alpha}.$$

Em virtude da hipótese de linearidade geométrica, em particular da substituição dos arcos pelas tangentes, os sinais dos alongamentos não afetam as relações deduzidas, embora, obviamente, alterem a posição final do ponto B no diagrama.

**Nota 3** A hipótese de linearidade geométrica também torna possível separar os efeitos dos alongamentos de cada barra. Como ilustra a Fig. 3, a separação gera três configurações deformadas da estrutura nas quais as relações trigonométricas entre os deslocamentos e os

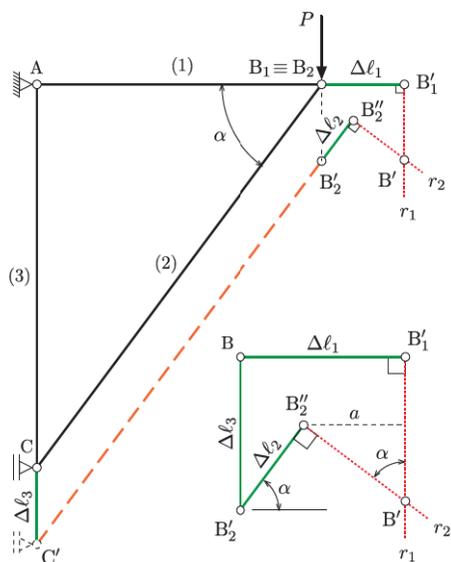


Fig. 2: Emprego de valores arbitrários dos alongamentos.

alongamentos são bem mais simples,

$$u_B = u_{B1} = \Delta l_1;$$

$$v_B = v_{B1} - v_{B2} + v_{B3} = \frac{\Delta l_1}{\tan \alpha} - \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} + \Delta l_3.$$

Os sentidos positivos das componentes  $u_{B1}, v_{B1}, v_{B2}$  e  $v_{B3}$  estão indicados na figura e não precisam coincidir com os sentidos do enunciado adotados para  $u_B$  e  $v_B$ .

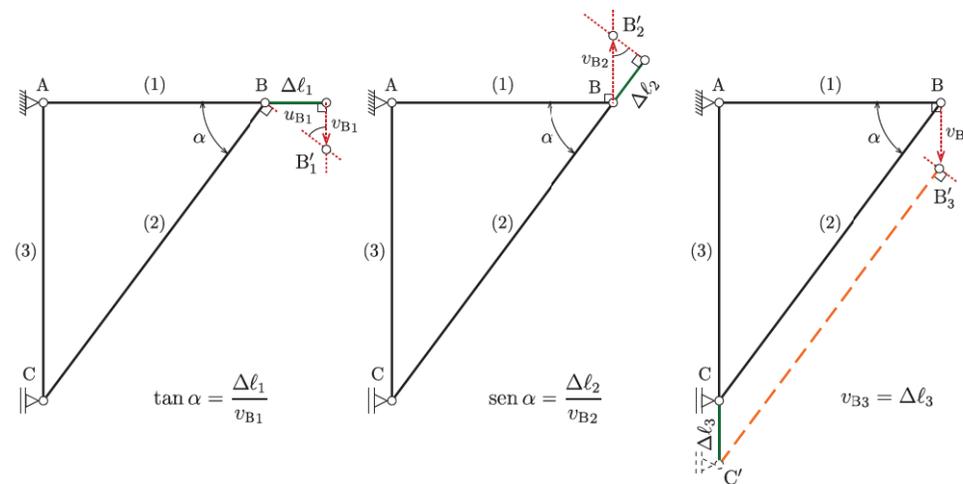


Fig. 3: Separação dos efeitos dos alongamentos.

**Problema 1** Calcule o deslocamento do ponto B da treliça ao lado. Admita  $EA = \text{const.}$  para todas as barras [Mário].

R.:  $u_B = \frac{Pa}{EA}$  ( $\rightarrow$ ),  $v_B = (2\sqrt{2} + 5)\frac{Pa}{EA}$  ( $\downarrow$ ).

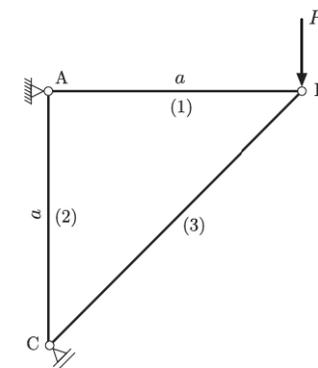


Fig. E 1: Treliça

**Exemplo 2** Determine o deslocamento do ponto C e a rotação  $\theta$  da barra ABC. Considere  $EA = \text{const.}$  para as barras flexíveis [Mário].

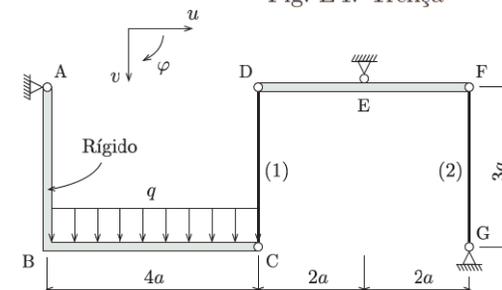


Fig. E2: Estrutura com trechos rígidos

## SOLUÇÃO

## a) Forças normais

Isolando os trechos rígidos e substituindo as barras deformáveis pelas respectivas forças normais chegamos à Fig. E2-i. O equilíbrio de momentos do trecho ABC em relação ao nó A fornece

$$\curvearrowleft \{ 4qa \times 2a - N_1 \times 4a = 0 \Rightarrow N_1 = 2qa.$$

O equilíbrio de momentos do trecho DEF em relação ao ponto E fornece

$$\curvearrowleft \{ -2qa \times 2a + N_2 \times 2a = 0 \Rightarrow N_2 = 2qa.$$

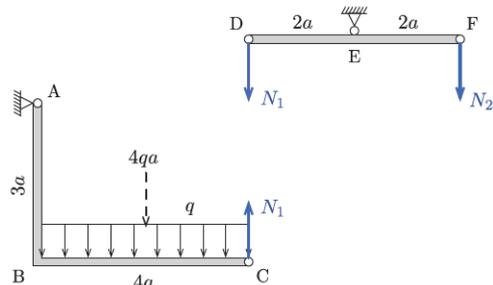


Fig. E2-i: Forças normais.

b) Alongamento das barras  $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i}$ 

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{2qa \times 3a}{EA} = \frac{6qa^2}{EA} = 6\beta.$$

## c) Deslocamento e rotação pedidos

A obtenção da configuração deformada da estrutura está indicada na Fig. E2-ii. Ela tem início

no apoio fixo G e admite a estrutura cortada em C. A extremidade F da barra 2, em decorrência de  $\Delta l_2 = 6\beta$ , move-se para F'. A rotação da barra rígida DEF determina a posição D' e provoca a translação vertical da barra 1 que passa a ocupar o segmento D'C'. A extremidade inferior da barra 1, em decorrência de  $\Delta l_1 = 6\beta$ , desloca-se para C'' e depois descreve o arco aproximado pela reta  $r_1$ . O arco descrito pela extremidade do trecho rígido ABC pode ser aproximado por uma reta  $r_2$  normal à hipotenusa AC no ponto C. A posição C' procurada encontra-se na intersecção das retas  $r_1$  e  $r_2$ .

$$u_C = -9\beta = -\frac{9qa^2}{EA} \quad (\leftarrow)$$

$$v_C = 12\beta = \frac{12qa^2}{EA} \quad (\downarrow)$$

$$\theta = \frac{12\beta}{\cos \alpha} = \frac{15\beta}{5a} = \frac{3qa}{EA} \quad (\curvearrowright)$$

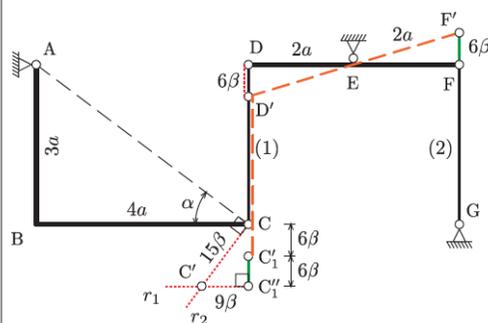


Fig. E2-ii: Deslocamentos dos nós.

**Problema 2** Refaça o exemplo anterior considerando os alongamentos  $\Delta l_1$  e  $\Delta l_2$  separadamente na resolução.

**Exemplo 3** Determine o deslocamento do ponto B. Considere  $EA = \text{const.}$  para as barras flexíveis.

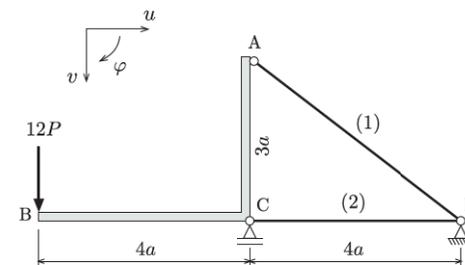


Fig. E3: Estrutura com trecho rígido BCA.

## SOLUÇÃO

## a) Forças normais

As forças normais são obtidas isolando-se o trecho rígido BCA, como mostrado na Fig. E3-i.

$$\curvearrowleft_C \begin{cases} \frac{4}{5}N_1 \times 3a - 12P \times 4a = 0 \\ \Rightarrow N_1 = 20P; \\ \frac{4}{5}N_1 + N_2 = 0 \\ \Rightarrow N_2 = -16P; \end{cases}$$

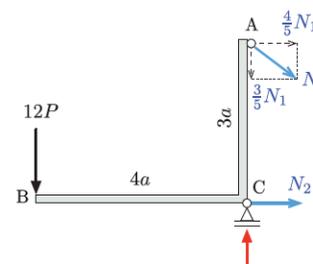


Fig. E3-i: Forças normais.

b) Alongamento das barras  $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i}$ 

$$\Delta l_1 = \frac{20P \times 5a}{EA} = 100 \frac{Pa}{EA} = 100\beta;$$

$$\Delta l_2 = \frac{-16P \times 4a}{EA} = -64 \frac{Pa}{EA} = -64\beta.$$

## c) Compatibilidade de deslocamentos

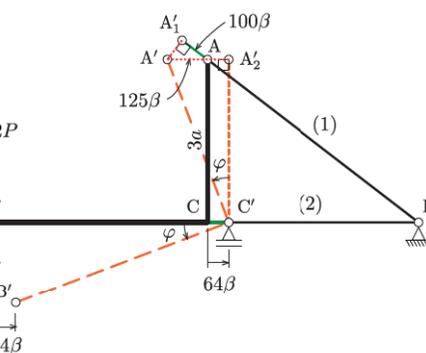


Fig. E3-ii: Deslocamentos dos nós.

A Fig. E3-ii ilustra a construção da configuração deformada da estrutura. Como o apoio em D é fixo, o encurtamento  $\Delta l_2$  define a posição de C' enquanto o alongamento  $\Delta l_1$ , após a divisão do nó A nos pontos A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub>, define a posição de A'<sub>1</sub>. A translação horizontal da parte rígida, que acompanha o ponto C', define a posição de A'<sub>2</sub>. Finalmente, a rotação de C'A'<sub>2</sub> em torno de C' e a rotação da barra 1 em torno do nó D, com os arcos aproximados pelas tangentes, determinam o ponto A'.

$$\varphi = \frac{(125 + 64)\beta}{3a} = 63 \frac{P}{EA} \quad (\curvearrowright);$$

$$u_B = \Delta l_2 = 64 \frac{Pa}{EA} \quad (\rightarrow);$$

$$v_B = \varphi \times 4a = 252 \frac{Pa}{EA} \quad (\downarrow).$$

## 2 Estruturas Hiperestáticas

### 2.1 Método dos Esforços

No método dos esforços, as equações que governam o comportamento da estrutura são resolvidas na seguinte ordem:

$$\boxed{\text{Eqs. de Equilíbrio}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. Constitutivas}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. de Compatibilidade}}$$

**Exemplo 4** Determine as forças normais e o deslocamento do ponto B para a barra com  $EA = \text{const.}$  da figura.

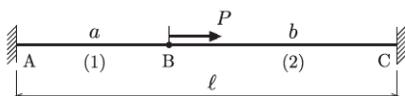
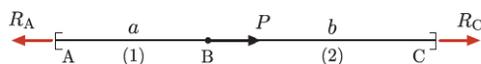


Fig. E4: Barra hiperestática.

Repare o diagrama de corpo livre da Fig. E4-i já evidencia a indeterminação estática do problema: duas reações horizontais e uma única equação de equilíbrio.



$$\rightarrow \{-R_A + P + R_C = 0\}$$

Fig. E4-i: Indeterminação estática.

#### Etapas do Método dos Esforços:

1. Determine o grau de hiperestaticidade (GH) da estrutura

O grau de hiperestaticidade é igual ao número de *vínculos redundantes*<sup>2</sup>. Como o vínculo horizontal<sup>3</sup> esquerdo é suficiente para impedir o movimento de translação horizontal no problema unidimensional, o vínculo direito é redundante (GH = 1).

2. Escolha a estrutura isostática fundamental (EIF)

A *estrutura isostática fundamental* é aquela que resulta da eliminação de GH vínculos redundantes e da introdução dos esforços incógnitos que seriam mobilizados por esses vínculos. Os esforços introduzidos são denominados *incógnitas hiperestáticas*.

<sup>2</sup>Vínculos que podem ser eliminados sem que a estrutura se torne hipostática.

<sup>3</sup>Repare que os vínculos verticais e de rotação não são mobilizados pelo carregamento considerado.

Na Fig. E4-ii, a força horizontal no apoio esquerdo foi escolhida como incógnita hiperestática  $X$ .

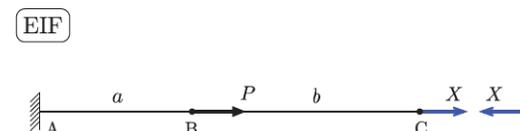


Fig. E4-ii: EIF e incógnita hiperestática  $X$

3. Calcule os deslocamentos associados aos vínculos eliminados

O deslocamento horizontal  $u_C$  decorre dos alongamentos de dois trechos,

$$\begin{aligned} u_C &= \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 \\ &= \frac{(P+X)a}{EA} + \frac{Xb}{EA} \\ &= \frac{Pa}{EA} + \frac{X(a+b)}{EA} \\ &= \frac{Pa}{EA} + \frac{X\ell}{EA} \end{aligned}$$

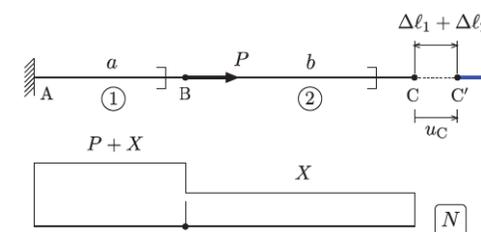


Fig. E4-iii: Forças normais na EIF.

4. Imponha as equações de compatibilidade

GH equações de compatibilidade devem ser impostas de modo a restabelecer a vinculação eliminada.

No problema, o vínculo eliminado impede o deslocamento horizontal do ponto C,

$$\boxed{u_C = 0} \Rightarrow \frac{Pa}{EA} + \frac{X\ell}{EA} = 0 \Rightarrow X = -\frac{Pa}{\ell}$$

5. Calcule os esforços solicitantes

Da Fig. E4-iii, temos

$$N_1 = P + X = \frac{P(\ell - a)}{\ell} = \frac{Pb}{\ell} \quad (\text{tração}) \quad N_2 = X = -\frac{Pa}{\ell} \quad (\text{compressão})$$

Repare que a reação é proporcional ao comprimento do **trecho oposto** ao do apoio no caso de  $EA = \text{const.}$

6. Obtenha o deslocamento  $u_B$

$$u_B = \Delta\ell_1 = \frac{N_1 a}{EA} = \frac{Pab}{\ell EA} \quad (\rightarrow)$$

**Nota 4** Existe sempre uma correspondência entre a incógnita hiperestática e a equação de compatibilidade. Por exemplo, uma força incógnita requer a compatibilidade de deslocamentos no mesmo ponto e direção; e um momento incógnito requer a compatibilidade de rotações em relação ao mesmo eixo.

## 2.2 Método dos Deslocamentos

No método dos deslocamentos, as equações que governam o comportamento da estrutura são resolvidas na seguinte ordem:

$$\boxed{\text{Eqs. de Compatibilidade}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. Constitutivas}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. de Equilíbrio}}$$

**Exemplo 5** Refaça o exemplo anterior empregando o método dos deslocamentos.

**Etapas do Método dos Deslocamentos:**

1. Determine o número de graus de liberdade (nGL) da estrutura

Os deslocamentos independentes que determinam o movimento da estrutura são denominados *graus de liberdade* da estrutura. Eles são as incógnitas do método dos deslocamentos.

Uma vez conhecido o deslocamento horizontal  $u$  do ponto B na Fig. E 5-i, ficam determinados os deslocamentos das extremidades dos dois trechos e, conseqüentemente, a configuração deformada da estrutura.

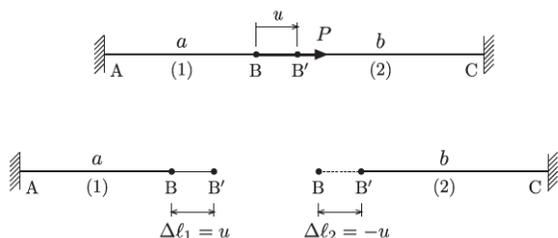


Fig. E 5-i: Grau de liberdade  $u$ .

2. Escreva as equações de compatibilidade em função dos graus de liberdade

As relações entre os alongamentos das barras e o deslocamento  $u$  podem ser inferidos da Fig. E 5-i,

$$\Delta\ell_1 = u, \quad \Delta\ell_2 = -u.$$

3. Escreva as equações constitutivas

As forças normais nas barras são obtidas empregando as equações constitutivas,

$$N_1 = EA \frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} = EA \frac{u}{a}, \quad N_2 = EA \frac{\Delta\ell_2}{\ell_2} = -EA \frac{u}{b}.$$

4. Imponha as equações de equilíbrio

nGL equações de equilíbrio associadas aos graus de liberdade são necessárias para resolver o problema. O equilíbrio do nó B representado na Fig. E 5-ii fornece

$$\rightarrow \left\{ - \left( EA \frac{u}{a} \right) + P + \left( -EA \frac{u}{b} \right) = 0 \right.$$

$$EA \left( \frac{a+b}{ab} \right) u = P \quad \Rightarrow \quad u = \frac{Pab}{\ell EA}.$$

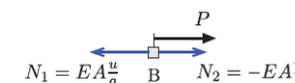


Fig. E 5-ii: Equilíbrio do nó B.

5. Obtenha os esforços solicitantes e alongamentos

Empregando as equações deduzidas acima, chegamos a

$$N_1 = EA \frac{u}{a} = \frac{Pb}{\ell} \quad (\text{tração}),$$

$$\Delta\ell_1 = u = \frac{Pab}{\ell EA},$$

$$N_2 = -EA \frac{u}{b} = -\frac{Pa}{\ell} \quad (\text{compressão}),$$

$$\Delta\ell_2 = -u = -\frac{Pab}{\ell EA}.$$

**Nota 5** Existe sempre uma correspondência entre o grau de liberdade e a equação de equilíbrio. Por exemplo, um deslocamento incógnito requer o equilíbrio de forças na mesma direção e ponto de aplicação; e uma rotação incógnita requer o equilíbrio de momentos em relação ao mesmo eixo de rotação.

### 2.3 Exemplos

**Exemplo 6** Empregando os dois métodos de resolução, obtenha o deslocamento do ponto D e as forças normais nas barras da treliça ao lado. Admita  $EA = \text{const.}$  para todas as barras.

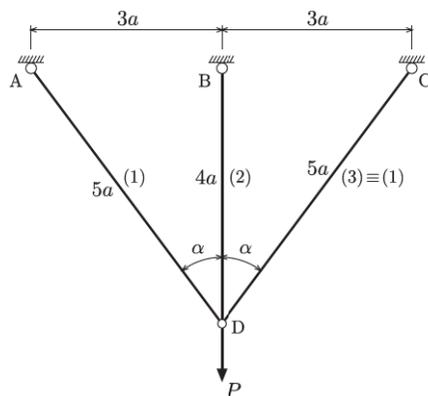


Fig. E6: Treliça simétrica.

#### SOLUÇÃO

##### A. Método dos Deslocamentos

Embora a treliça possua  $nGL = 2$ , apenas o deslocamento vertical  $v$  é diferente de zero por causa da simetria, como mostrado na Fig. E6-i,

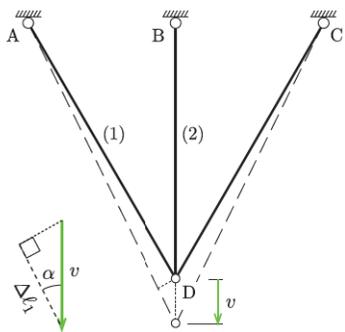


Fig. E6-i: Grau de liberdade  $v$  e compatibilidade para a barra 1.

##### Equações de compatibilidade

Podemos admitir que a barra 1 sofre uma rotação seguida do alongamento  $\Delta\ell_1$ , conforme a Fig. E6-i, ou vice-versa, conforme a Fig. E6-ii; as relações não se alteram em decorrência da hipótese de pequenas rotações,

quenas rotações,

$$\begin{aligned} \Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 &= v \cos \alpha = \frac{4}{5}v; \\ \Delta\ell_2 &= v. \end{aligned}$$

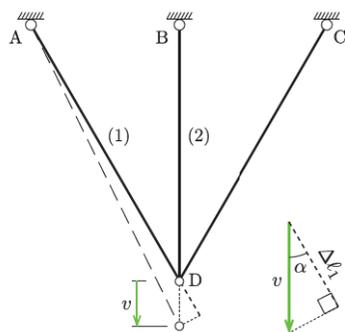


Fig. E6-ii: Compatibilidade alternativa.

##### Equações constitutivas

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= EA \frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} = EA \frac{\frac{4}{5}v}{5a} = \frac{4}{25} \frac{EA}{a} v; \quad (a) \\ N_2 &= EA \frac{\Delta\ell_2}{\ell_2} = \frac{EA}{4a} v. \end{aligned}$$

##### Equação de equilíbrio

O deslocamento  $v$  está associado ao equilíbrio das forças verticais do nó D,

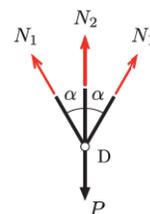


Fig. E6-iii: Equilíbrio do nó D.

$$\uparrow \left\{ 2N_1 \frac{4}{5} + N_2 = P \Rightarrow \frac{8}{5}N_1 + N_2 = P. \right.$$

Introduzindo as Eqs. (a) na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{32}{125} + \frac{1}{4} \right) \frac{EA}{a} v = P &\Rightarrow \frac{253}{500} \frac{EA}{a} v = P \\ \Rightarrow v &= \frac{500}{253} \frac{Pa}{EA} \quad (1). \end{aligned}$$

##### Resultados

As forças normais são obtidas introduzindo o valor de  $v$  nas Eqs. (a),

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 &= \frac{4}{25} \times \frac{500}{253} P = \frac{80}{253} P \quad (\text{tração}); \\ N_2 &= \frac{1}{4} \times \frac{500}{253} P = \frac{125}{253} P \quad (\text{tração}). \end{aligned}$$

O deslocamento do nó D é o próprio deslocamento vertical  $v$ ,

$$v_D = \frac{500}{253} \frac{Pa}{EA} \quad (1).$$

##### B. Método dos Esforços

A treliça tem  $GH = 1$ . Na Fig. E6-iv, o vínculo interno correspondente à ligação axial da barra 2 ao nó D foi substituído pela incógnita hiperestática  $X$  para chegarmos à EIF. Assim a equação de compatibilidade do problema é

$$v_{D1} = v_{D2}. \quad (b)$$

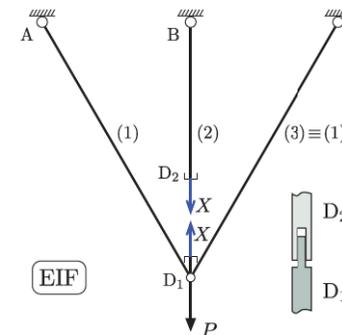


Fig. E6-iv: EIF.

##### Equação de equilíbrio

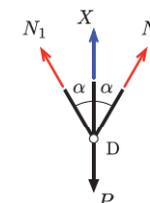


Fig. E6-v: Equilíbrio do nó D.

O equilíbrio vertical do nó D nas duas partes da EIF fornece,

$$\begin{aligned} \uparrow \{ N_2 = X; \\ \uparrow \left\{ 2N_1 \frac{4}{5} + X = P \Rightarrow N_1 = \frac{5}{8}(P - X). \right. \quad (c) \end{aligned}$$

##### Equações constitutivas

$$\begin{aligned} \Delta\ell_1 &= \frac{N_1 \ell_1}{EA} = \frac{\frac{5(P-X)}{8} 5a}{EA} = \frac{25}{8} \frac{(P-X)a}{EA}; \\ \Delta\ell_2 &= \frac{N_2 \ell_2}{EA} = \frac{4Xa}{EA}. \end{aligned}$$

##### Equação de compatibilidade

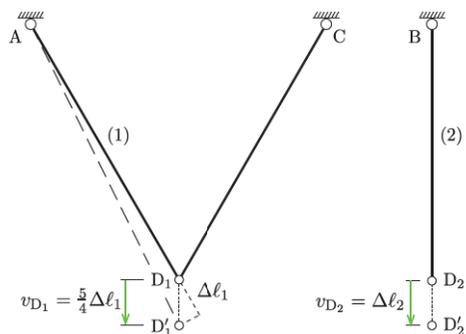


Fig. E6-vi: Compatibilidade em D.

Inserindo as expressões de  $v_{D1}$  e  $v_{D2}$  indicadas na Fig. E6-vi na equação Eq. (b), temos

$$\frac{5}{4}\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \Rightarrow \frac{125(P-X)a}{32EA} = \frac{4Xa}{EA} \Rightarrow \frac{128 + 125}{32}X = \frac{125}{32}P \Rightarrow X = \frac{125}{253}P.$$

**Problema 3** Determine as forças normais nas barras flexíveis da estrutura da figura. O produto de rigidez axial das barras 1 e 2 é igual a  $EA$ , enquanto o da barra 3 é igual  $3EA$  [Britto].

R.:

$$N_1 = \frac{300}{1369}P, \\ N_2 = -\frac{240}{1369}P, \\ N_3 = \frac{1000}{1369}P.$$

**Resultados**

As forças normais são obtidas substituindo  $X$  nas Eqs. (c),

$$N_1 = N_3 = \frac{5}{8}(P-X) = \frac{80}{253}P \quad (\text{tração}); \\ N_2 = X = \frac{125}{253}P \quad (\text{tração}).$$

E o deslocamento do nó D pode ser obtido a partir de  $v_{D1}$  ou de  $v_{D2}$ ,

$$v_D = v_{D2} = \Delta\ell_2 = \frac{4Xa}{EA} = \frac{500}{253} \frac{Pa}{EA} \quad (\downarrow).$$

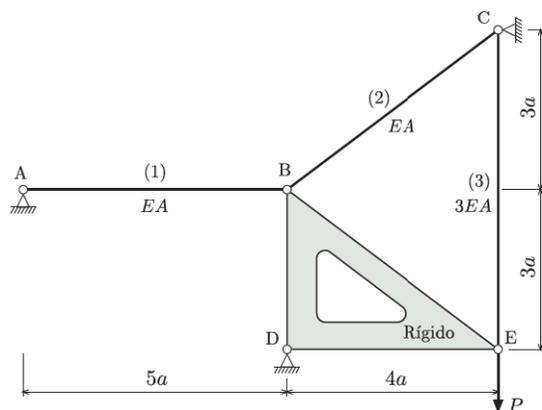


Fig. E6: Estrutura com peça rígida.

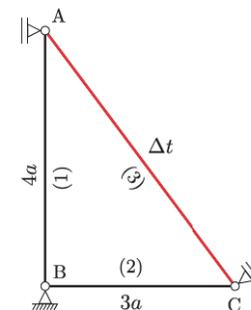


Fig. E7: Treliça com suporte inclinado em C.

**Exemplo 7** As barras da treliça ao lado têm produto de rigidez axial  $EA = \text{const.}$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha$ . Determine as forças normais e o deslocamento do ponto A em decorrência de um aumento de temperatura  $\Delta t$  da barra 3.

**SOLUÇÃO** A treliça será resolvida primeiro pelo método dos deslocamentos e depois pelo dos esforços considerando duas EIFs distintas.

**A. Método dos Deslocamentos**

A treliça possui  $nGL = 2$  pois os deslocamentos  $d_1$  e  $d_2$  indicados na Fig. E7-i determinam sua configuração deformada.

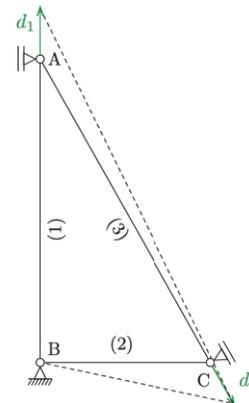


Fig. E7-i: Graus de liberdade.

radamente,

$$\Delta\ell_1^I = d_1, \quad \Delta\ell_1^{II} = 0, \\ \Delta\ell_2^I = 0, \quad \Delta\ell_2^{II} = \frac{3}{5}d_2, \\ \Delta\ell_3^I = \frac{4}{5}d_1, \quad \Delta\ell_3^{II} = d_2.$$

Repare que a treliça foi desenhada fora de escala para facilitar a distinção entre os catetos do triângulo. Os superescritos  $I$  e  $II$  referem-se aos graus de liberdade  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. As equações de compatibilidade procuradas são obtidas somando-se os alongamentos parciais,

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_1^I + \Delta\ell_1^{II} = d_1, \\ \Delta\ell_2 = \Delta\ell_2^I + \Delta\ell_2^{II} = \frac{3}{5}d_2, \\ \Delta\ell_3 = \Delta\ell_3^I + \Delta\ell_3^{II} = \frac{4}{5}d_1 + d_2. \quad (a)$$

**Equações de compatibilidade**

As relações entre os deslocamentos e os alongamentos nas barras são estabelecidas com base na Fig. E7-ii considerando cada deslocamento sepa-

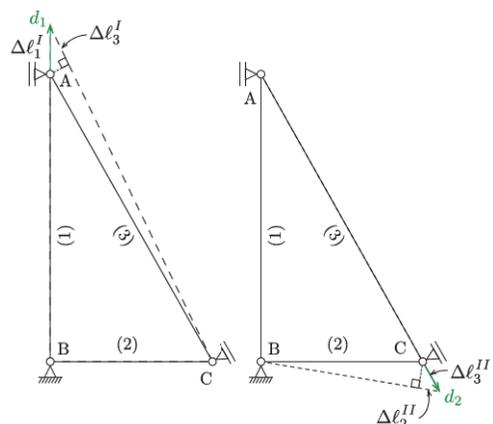


Fig. E 7-ii: Compatibilidade.

**Equações constitutivas**

O alongamento  $\Delta \ell$  de uma barra submetida a uma força normal  $N$  e uma variação de temperatura  $\Delta t$  é dado por

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} + \alpha \Delta t \ell \quad (b)$$

Logo,

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta \ell - \alpha \Delta t EA.$$

Lembrando que apenas a barra 3 sofre aumento de temperatura e usando as Eqs. (a), chegamos às seguintes relações:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{EA}{4a} d_1, \\ N_2 &= \frac{EA}{3a} \left( \frac{3}{5} d_2 \right) = \frac{EA}{5a} d_2, \\ N_3 &= \frac{EA}{5a} \left( \frac{4}{5} d_1 + d_2 \right) - \alpha \Delta t EA. \end{aligned} \quad (c)$$

**Equações de equilíbrio**

$$149 d_1 = 150 \alpha \Delta t \Rightarrow d_1 = \frac{150}{149} \alpha \Delta t.$$

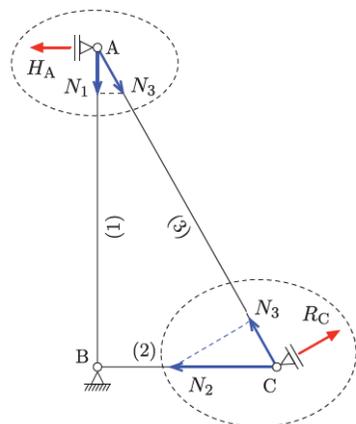


Fig. E 7-iii: Equilíbrio.

O equilíbrio dos nós A e C está indicado na Fig. E 7-iii. O grau de liberdade  $d_1$  está associado ao equilíbrio de forças na direção vertical em A,

$$\uparrow \left\{ N_1 = -\frac{4}{5} N_3. \right.$$

Inserindo as forças normais dadas pelas Eqs. (c), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{EA d_1}{a} &= -\frac{16}{125} \frac{EA d_1}{a} - \frac{4}{25} \frac{EA d_2}{a} + \frac{4}{5} \alpha \Delta t EA \\ \Rightarrow 189 d_1 + 80 d_2 &= 400 \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (d)$$

O grau de liberdade  $d_2$  está associado ao equilíbrio de forças na direção da barra 3 em C,

$$\swarrow \left\{ N_3 = -\frac{3}{5} N_2. \right.$$

Substituindo as forças normais, temos

$$\begin{aligned} \frac{4}{25} \frac{EA d_1}{a} + \frac{1}{5} \frac{EA d_2}{a} - \alpha \Delta t EA &= -\frac{3}{25} \frac{EA d_2}{a} \\ \Rightarrow 4 d_1 + 8 d_2 &= 25 \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (e)$$

Multiplicando a Eq. (e) por 10 e subtraindo da Eq. (d), temos

E inserindo  $d_1$  na Eq. (e), obtemos

$$\frac{600}{149} \alpha \Delta t + 8 d_2 = 25 \alpha \Delta t \Rightarrow d_2 = \frac{3125}{1192} \alpha \Delta t.$$

**Resultados**

As forças normais são obtidas introduzindo as expressões de  $d_1$  e  $d_2$  nas Eqs. (c),

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{75}{298} \alpha \Delta t EA, & N_2 &= \frac{625}{1192} \alpha \Delta t EA, \\ N_3 &= -\frac{375}{1192} \alpha \Delta t EA. \end{aligned}$$

E o deslocamento do nó A é o próprio deslocamento vertical  $d_1$ ,

$$v_A = d_1 = \frac{150}{149} \alpha \Delta t (\uparrow).$$

**B. Método dos Esforços EIF<sub>1</sub>**

Como a treliça tem  $GH = 1$ , a EIF é obtida substituindo um vínculo redundante por uma incógnita hiperestática. Na EIF<sub>1</sub> da Fig. E 7-iv, o vínculo externo em C foi eliminado e a incógnita  $X$  foi introduzida. Portanto, a equação de compatibilidade do método dos esforços deve restaurar em C a condição de deslocamento nulo na direção perpendicular à da barra 3.

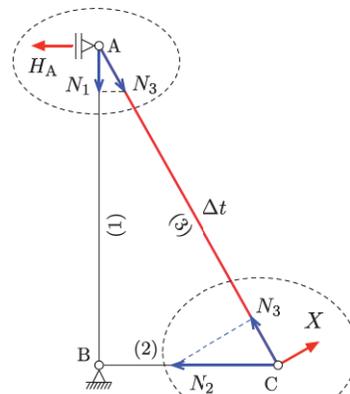


Fig. E 7-iv: EIF<sub>1</sub>

**Equações de equilíbrio**

Nó C

$$\nearrow \left\{ X - \frac{4}{5} N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{5}{4} X; \quad (f-1)$$

$$\swarrow \left\{ \frac{3}{5} N_2 + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = -\frac{3}{4} X. \quad (f-2)$$

Nó A

$$\uparrow \left\{ \frac{3}{4} X \times \frac{4}{5} = N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{3}{5} X. \quad (f-3)$$

**Equações constitutivas**

Empregando a Eq. (b), chegamos a

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{3}{5} \frac{X(4a)}{EA} = \frac{12}{5} \frac{Xa}{EA}, \\ \Delta \ell_2 &= \frac{5}{4} \frac{X(3a)}{EA} = \frac{15}{4} \frac{Xa}{EA}, \\ \Delta \ell_3 &= \frac{-\frac{3}{4} X(5a)}{EA} + \alpha(5a) \Delta t \\ &= -\frac{15}{4} \frac{Xa}{EA} + 5 \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (g)$$

**Equação de compatibilidade**

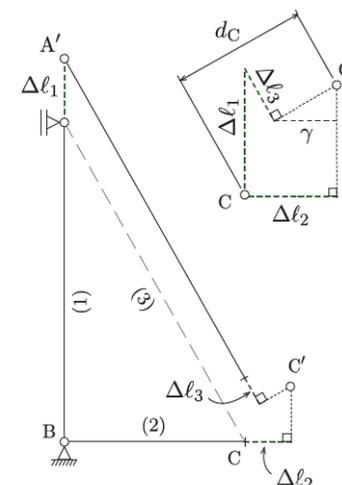


Fig. E 7-v: Compatibilidade da EIF<sub>1</sub> e detalhe do nó C.

A configuração deformada encontra-se na Fig. E 7-v. Ela foi obtida determinando-se pri-

meiro o nó  $A'$ , que deve permanecer na mesma vertical de  $A$  e percorrer uma distância  $\Delta\ell_1$ . Depois, determinando-se o nó  $C'$  mediante a intersecção das barras 3 e 2: a barra 3 translada verticalmente  $\Delta\ell_1$ , deforma-se de  $\Delta\ell_3$  e gira em torno do ponto  $A'$ ; a barra 2 deforma-se de  $\Delta\ell_2$  e gira em torno  $B$  até encontrar a extremidade inferior da barra 3 em  $C'$ . Por conveniência foram admitidos sentidos positivos para todos os alongamentos  $\Delta\ell_i$ .

A equação de compatibilidade que restabelece o comportamento da treliça original é

$$d_C = 0.$$

O detalhe na Fig. Fig. E7-v ajuda a expressá-la em função dos alongamentos  $\Delta\ell_i$ ,

$$\begin{aligned}\gamma &= \Delta\ell_2 - \frac{3}{5}\Delta\ell_3 \\ d_C &= \frac{3}{5}\Delta\ell_1 + \frac{5}{4}\gamma = \frac{3}{5}\Delta\ell_1 + \frac{5}{4}\Delta\ell_2 - \frac{3}{4}\Delta\ell_3\end{aligned}$$

Inserindo as Eqs. (g), obtemos

$$\begin{aligned}d_C &= \left(\frac{36}{25} + \frac{75}{16} + \frac{45}{16}\right) \frac{Xa}{EA} - \frac{15}{4}\alpha a\Delta t = 0 \\ \Rightarrow \frac{576 + 3000}{400} \frac{Xa}{EA} &= \frac{15}{4}\alpha a\Delta t\end{aligned}$$

Logo,

$$X = \frac{125}{298}\alpha\Delta t EA.$$

#### Resultados

As forças normais são obtidas substituindo a variável  $X$  nas Eqs. (f),

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{3}{5} \times \frac{125}{298}\alpha\Delta t EA = \frac{75}{298}\alpha\Delta t EA, \\ N_2 &= \frac{5}{4} \times \frac{125}{298}\alpha\Delta t EA = \frac{625}{1292}\alpha\Delta t EA, \\ N_3 &= -\frac{3}{4} \times \frac{125}{298}\alpha\Delta t EA = -\frac{375}{1292}\alpha\Delta t EA.\end{aligned}$$

O deslocamento do nó  $A$  é igual ao alongamento da barra 1,

$$v_A = \Delta\ell_1 = \frac{12}{5} \frac{Xa}{EA} = \frac{150}{149}\alpha a\Delta t \quad (\dagger).$$

### C. Método dos Esforços EIF<sub>2</sub>

Na EIF<sub>2</sub> da Fig. E7-vi, o vínculo interno que corresponde à ligação longitudinal da barra 3 com o nó  $A$  foi eliminado e seu efeito substituído pela incógnita hiperestática  $N_3 = Y$ .

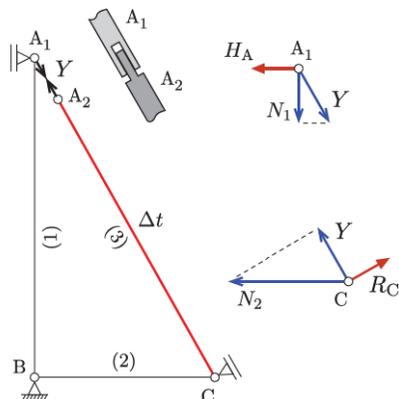


Fig. E 7-vi: EIF<sub>2</sub>

#### Equações de equilíbrio

Nó A<sub>1</sub>

$$\downarrow \left\{ N_1 + \frac{4}{5}Y = 0 \Rightarrow N_1 = -\frac{4}{5}Y. \right.$$

Nó C

$$\uparrow \left\{ Y + \frac{3}{5}N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{5}{3}Y. \right.$$

#### Equações constitutivas

Empregando a Eq. (b), chegamos a

$$\begin{aligned}\Delta\ell_1 &= -\frac{4}{5} \frac{Y(4a)}{EA} = -\frac{16}{5} \frac{Ya}{EA}, \\ \Delta\ell_2 &= -\frac{5}{3} \frac{Y(3a)}{EA} = -5 \frac{Ya}{EA}, \\ \Delta\ell_3 &= \frac{Y(5a)}{EA} + \alpha(5a)\Delta t \\ &= 5 \frac{Ya}{EA} + 5\alpha a\Delta t.\end{aligned} \quad (h)$$

#### Equação de compatibilidade

A configuração deformada encontra-se na

Fig. E7-vii. As posições dos nós  $A'_1$  e  $A'_2$ , o primeiro no topo da barra 1 e o segundo no topo da barra 3, são determinadas separadamente. Por conveniência foram admitidos sentidos positivos para todos os alongamentos  $\Delta\ell_i$ .

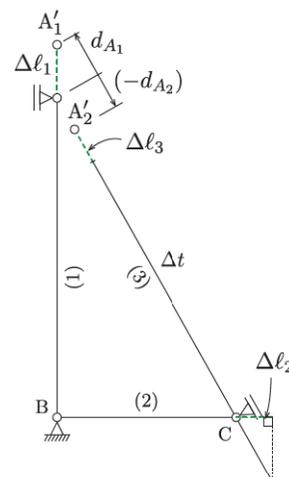


Fig. E 7-vii: Compatibilidade da EIF<sub>2</sub>.

A equação de compatibilidade, que restabelece o comportamento da treliça original, iguala os deslocamentos em  $A$  na direção da barra cortada,

$$d_{A_1} = d_{A_2},$$

ou ainda,

$$\frac{4}{5}\Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 - \frac{5}{3}\Delta\ell_2.$$

A substituição dos alongamentos fornece

$$\begin{aligned}-\frac{64}{25} \frac{Ya}{EA} &= 5 \frac{Ya}{EA} + 5\alpha a\Delta t + \frac{25}{3} \frac{Ya}{EA} \\ \left(\frac{-192 - 375 - 625}{75}\right) \frac{Ya}{EA} &= 5\alpha a\Delta t.\end{aligned}$$

Logo,

$$Y = -\frac{375}{1192}\alpha\Delta t EA.$$

#### Resultados

Introduzindo  $Y$  nas expressões das forças normais, temos

$$\begin{aligned}N_1 &= -\frac{4}{5}Y = \frac{75}{298}\alpha\Delta t EA, \\ N_2 &= -\frac{5}{3}Y = \frac{625}{1292}\alpha\Delta t EA, \\ N_3 &= Y = -\frac{375}{1292}\alpha\Delta t EA.\end{aligned}$$

E o deslocamento do nó  $A$  é igual ao alongamento da barra 1,

$$v_A = \Delta\ell_1 = -\frac{16}{5} \frac{Ya}{EA} = \frac{150}{149}\alpha a\Delta t \quad (\ddagger).$$

## Referências

- [1] Diogo, Luiz Antônio Cortese. *Resistência dos Materiais*, Apostila do PEF, São Paulo, 2000.
- [2] Costa, Henrique de Britto Costa. *Notas de Aula de Resistência dos Materiais*, São Paulo, 2014.
- [3] Soares, Mário Eduardo Senatore. *Notas de Aula de Resistência dos Materiais*, São Paulo, 1996.

## Index

diagrama de Williot, 3

estrutura isostática fundamental, 9

grau de hiperestaticidade, 9

grau de liberdade, 11

incógnita hiperestática, 9

vínculo redundante, 9