

## A Revisão dos Conceitos de Tensão e Deformação

### A.1 Tensão

#### Definição — Tensão de Cauchy (1822)

Seja  $V$  um sólido em equilíbrio sob a ação de esforços externos, Fig. 28-a. Seja  $P$  um ponto de  $V$  e sejam I e II as partes em que o sólido fica dividido quando interceptado por um plano imaginário  $\alpha$  passando por  $P$ , Fig. 28-b. Seja  $A$  a figura plana resultante da intersecção de  $V$  e  $\alpha$ .

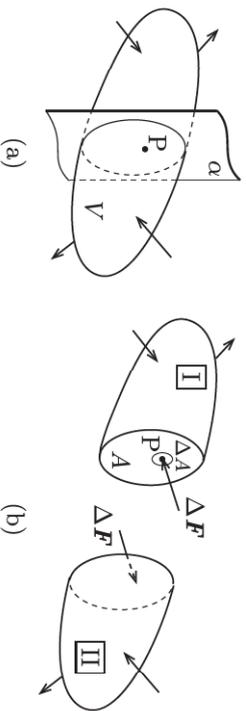


Fig. 28: Sólido  $V$  interceptado por plano imaginário e dividido em duas partes.

Se  $V$  está em equilíbrio, então as partes I e II também devem estar em equilíbrio. Como os esforços externos em I não estão necessariamente auto-equilibrados, evidencia-se a existência de esforços de interação entre I e II através de  $A$ , denominados *esforços internos*. Seja  $\Delta \mathbf{F}$  a resultante dos esforços que atuam numa pequena área  $\Delta A$  do plano  $\alpha$  ao redor do ponto  $P$ . A *tensão média* no ponto  $P$ , considerando o plano  $\alpha$  e a área  $\Delta A$ , é definida por

$$\mathbf{t}_m(P, \alpha, \Delta A) = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Admitindo uma distribuição contínua<sup>13</sup> dos esforços internos na seção  $A$ , definimos *vetor tensão no ponto  $P$  e no plano  $\alpha$*  por

$$\mathbf{t}(P, \alpha) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Diferentemente do conceito de vetor aplicado, o vetor tensão  $\mathbf{t}$  depende também do plano  $\alpha$  e seu estudo requer uma nova grandeza matemática denominada tensor de segunda ordem.

<sup>13</sup>A distribuição requer a hipótese de continuidade da matéria do sólido.

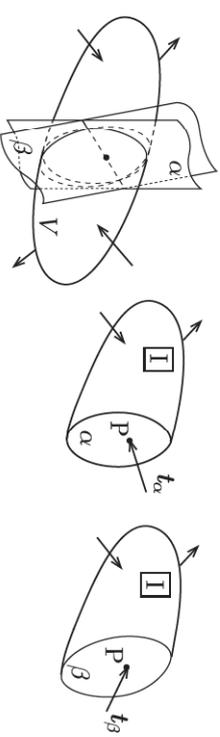


Fig. 29: Tensões  $\mathbf{t}_\alpha$  e  $\mathbf{t}_\beta$  atuando no mesmo ponto mas em planos distintos.

#### Componentes de $\mathbf{t}$ associadas ao plano $\alpha$

Fixado o plano  $\alpha$ , ou equivalentemente o seu versor normal externo  $\mathbf{n}$ , é usual decompormos o vetor tensão  $\mathbf{t}$  no ponto  $P$  nos vetores normal  $\boldsymbol{\sigma}$  e tangencial  $\boldsymbol{\tau}$ , denominados vetor *tensão normal* e vetor *tensão tangencial* ou de *cisalhamento*, Fig. 30-a.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Numa base ortonormal, obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \sigma n = \sigma n_x \mathbf{i} + \sigma n_y \mathbf{j} + \sigma n_z \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma} = (t_x - \sigma n_x) \mathbf{i} + (t_y - \sigma n_y) \mathbf{j} + (t_z - \sigma n_z) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

A tensão tangencial  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser decomposta segundo dois eixos perpendiculares contidos no plano da seção  $A$ , conforme a Fig. 30-b. A notação das componentes emprega dois índices: o primeiro indica o plano de atuação e o segundo o eixo em que é feita a projeção.

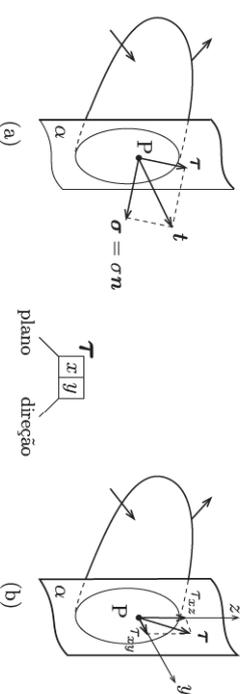


Fig. 30: Componentes normal e tangencial.

### Convenções de sinais

As convenções de sinais das componentes de  $t$  estão indicadas na Fig. 31 para o caso bidimensional. Observe que elas fornecem sinais idênticos para as tensões nas seções opostas das partes I e II do sólido, satisfazendo implicitamente o princípio da ação e reação.

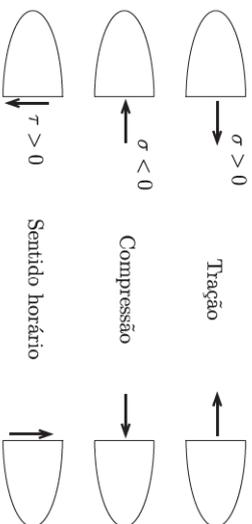


Fig. 31: Convenção de sinais.

### Unidades

A tensão tem unidade de força distribuída por unidade de área ( $[F]/[L]^2$ ). No Sistema Internacional (SI), a unidade é denominada Pascal (Pa =  $N/m^2$ ). Em virtude de seu pequeno valor para as aplicações da Resistência dos Materiais, é usual empregarmos múltiplos de Pa ou mesmo outras unidades. Por exemplo, MPa =  $10^6$  Pa (megapascal) e  $kN/cm^2$ . No sistema técnico, é comum o emprego de  $kgf/cm^2$  e  $tf/m^2 = 10^3 kgf/m^2 = 10^{-1} kgf/cm^2$ . As seguintes relações são úteis para converter unidades:

$$\begin{aligned} 1 \text{ MPa} &= 0,1 \frac{kN}{cm^2} = 1 \frac{N}{mm^2}; \\ 1 \text{ MPa} &= \frac{9,81 \times 10^{-2} cm^2}{1 kgf} \approx 10 \frac{kgf}{cm^2}; \\ 1 \frac{kN}{cm^2} &\approx 0,1 \frac{tf}{cm^2} = 100 \frac{kgf}{cm^2}; \end{aligned}$$

## A.2 Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão na Seção Transversal

Consideremos a seção transversal da Fig. 32 e um sistema de coordenadas com origem no centro de gravidade G da seção. De acordo com a figura, os esforços aplicados na área infinitesimal

$dA$  são mecanicamente equivalentes a

$$\begin{aligned} dN &= \sigma dA, & dV_y^* &= \tau_{xy} dA, & dV_z^* &= \tau_{xz} dA, \\ dM_y &= \sigma z dA, & dM_z &= -\sigma y dA, & dM_x &= (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \end{aligned} \quad (24)$$

em que os sinais dos momentos seguem a regra da mão direita e um asterisco é usado para indicar que os sentidos positivos das forças cortantes concordam com os dos respectivos eixos. Os esforços solicitantes<sup>14</sup> são obtidos integrando-se as relações (24),

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA, & V_y^* &= \int_A \tau_{xy} dA, & V_z^* &= \int_A \tau_{xz} dA, \\ M_y &= \int_A \sigma z dA, & M_z &= - \int_A \sigma y dA, & M_x &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \end{aligned} \quad (25)$$

em que as forças  $V_y^*$  e  $V_z^*$  são iguais em módulo às cortantes  $V_y$  e  $V_z$  mas são positivas quando orientados no sentido dos eixos.

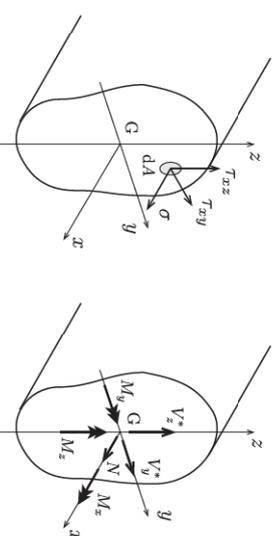


Fig. 32: Componentes de tensão e esforços solicitantes na seção transversal.

### A.3 Deformação

A Fig. 33 apresenta as configurações indeformada e deformada de um sólido sujeito a esforços externos [2].

Definimos *deslocamento* de um ponto como sendo a mudança de sua posição no espaço. Assim, os vetores  $\overrightarrow{AA'}$  e  $\overrightarrow{BB'}$  representam os deslocamentos dos pontos A e B. Usualmente,

<sup>14</sup>Mais adiante, quando o momento  $M_x$  for substituído pelo momento de torção,  $M_T$ , as forças cortantes passarão a ser definidas no centro de cisalhamento, ou centro de torção, da ST.

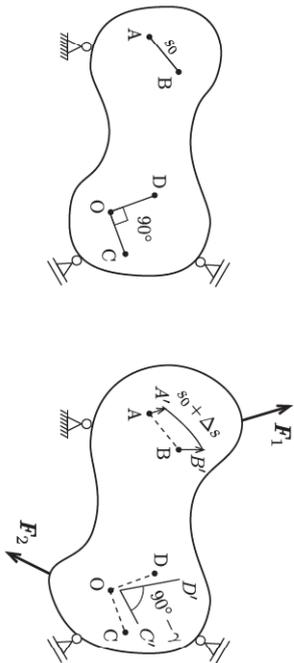


Fig. 33: Configurações indeformada e deformada.

trabalhamos com as componentes do vetor deslocamento em relação a três eixos cartesianos,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overrightarrow{AA'} = u_i \mathbf{i} + v_j \mathbf{j} + w_k \mathbf{k} \\ &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  ( $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ ) são as componentes segundo as direções dos versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , e  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ ).

Dizemos que um sólido se *deforma* quando a distância relativa entre dois pontos quaisquer se altera. A deformação traduz-se em mudança de forma ou tamanho do sólido, em contraste com o *movimento de corpo rígido* em que as distâncias entre os pontos não se altera.

### A.3.1 Deformação Linear

A *deformação linear média* entre dois pontos mede a variação do comprimento do segmento que os une (Fig. 33). Sendo  $s_0$  e  $s'$  os comprimentos antes e depois da deformação, temos

$$\epsilon_m = \frac{s' - s_0}{s_0} = \frac{\Delta s}{s_0}.$$

A *deformação linear específica* ou simplesmente *deformação linear* ou ainda *alongamento linear* no ponto A e direção  $\overrightarrow{AB}$  é igual ao limite de  $\epsilon_m$  quando  $s_0$  tende a zero,

$$\epsilon = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s_0}.$$

Ao contrário de  $\epsilon_m$ , a deformação linear  $\epsilon$  independe do comprimento inicial  $s_0$  adotado, dependendo apenas de sua direção.

### A.3.2 Distorção

Definimos *distorção*, ou deformação angular, como sendo a variação angular  $\gamma$  sofrida por um ângulo originalmente reto com vértice no ponto examinado.

$$\gamma_{\text{cod}} = \lim_{OC'D \rightarrow 0} (\widehat{COD} - \widehat{C'O'D'}) = \lim_{OC'D \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \widehat{C'O'D'} \right)$$

Note que as deformações longitudinais e distorções dependem do ponto e também das direções escolhidas. No caso de pequenas deformações, o valor em radianos da distorção pode ser confundido com o seno ou a tangente,

$$\gamma \approx \text{sen } \gamma \approx \tan \gamma \quad \text{para } \gamma[\text{rad}] \ll 1.$$

### A.3.3 Deformações Longitudinal e Transversal das Barras

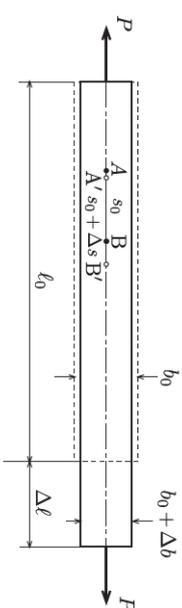


Fig. 34: Deformações longitudinais e transversais.

A deformação longitudinal de uma barra corresponde à deformação linear de seu eixo. Assim, de acordo com a Fig. 34, definimos

**Deformação longitudinal média,**

$$\epsilon_m = \frac{\Delta s}{s_0}.$$

**Deformação longitudinal num ponto do eixo,**

$$\epsilon = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s_0}.$$

Para uma barra prismática sujeita a esforços atuando apenas em suas extremidades, temos

$$\epsilon_m = \epsilon = \frac{\Delta \ell}{l_0}.$$

**Deformação transversal** Para a maioria dos materiais estruturais, uma deformação longitudinal  $\epsilon$  de uma barra origina uma *deformação transversal*  $\epsilon_t$  dada por

$$\epsilon_t = \frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \epsilon,$$

em que a constante  $\nu$ , denominada *coeficiente de Poisson*, é uma propriedade do material e varia entre 0 a 0,5 no caso de materiais isotrópicos. O sinal negativo indica que as deformações têm sentidos opostos. Ou seja, um estiramento longitudinal é acompanhado de uma contração lateral enquanto um encurtamento longitudinal o é de uma expansão lateral.