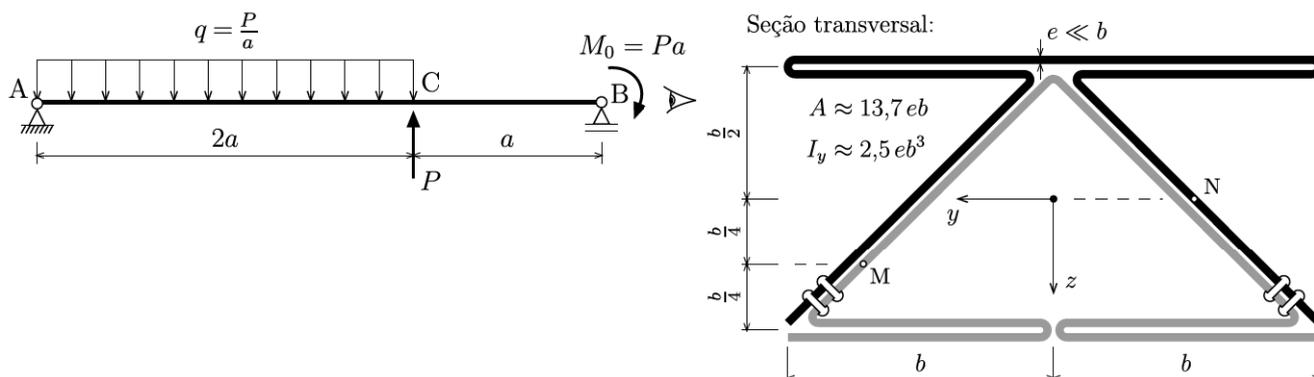


[18P3Q1, 30/11/2018; Tensões tangenciais na flexão]

Dada a viga da figura, cuja seção transversal é constituída por duas chapas dobradas de espessura  $e \ll b$  unidas por rebites, determine os valores absolutos, as direções e os sentidos das tensões tangenciais nos pontos M e N da seção mais solicitada por força cortante. Para cada tensão tangencial, ilustre a determinação da direção e do sentido com a seção vista da direita para a esquerda.



**Primeira resolução:**

[Acréscimo de momento  $dM$  obtido a partir do sentido da força cortante  $V$  na seção]

a) Diagrama de força cortante

$$\uparrow \{ R_A + R_B - 2P + P = 0$$

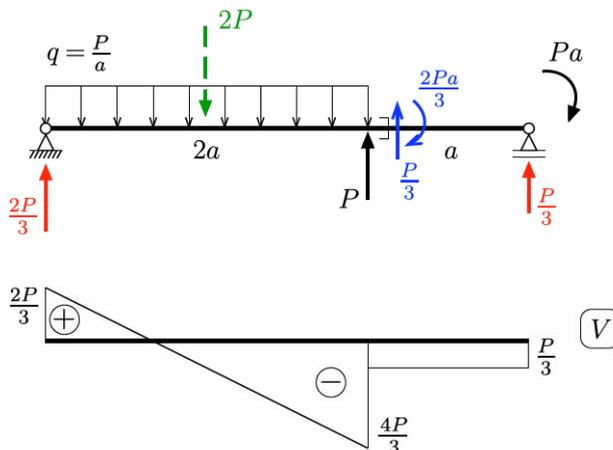
$$\curvearrow_B \{ R_A \times 3a - 2P \times 2a + P \times a + Pa = 0$$

$$R_A = \frac{2P}{3}, \quad R_B = \frac{P}{3}.$$

Verif.

$$\curvearrow_A \left\{ 2P \times a - P \times 2a + Pa - \frac{P}{3} \times 3a = 0 \right.$$

A força cortante extrema  $V = -\frac{4P}{3}$  ocorre na seção à esquerda da força aplicada  $P$ .



b) Estimativa para a tensão tangencial na alma

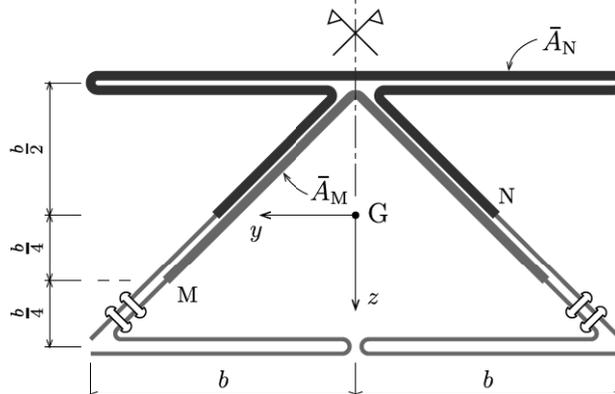
O valor médio das tensões tangenciais na alma é dado por

$$\tau \approx \frac{R}{A_{\text{alma}}} = \frac{(4P/3)\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}be)} = \frac{1}{3} \frac{P}{be} = 0,333 \frac{P}{be},$$

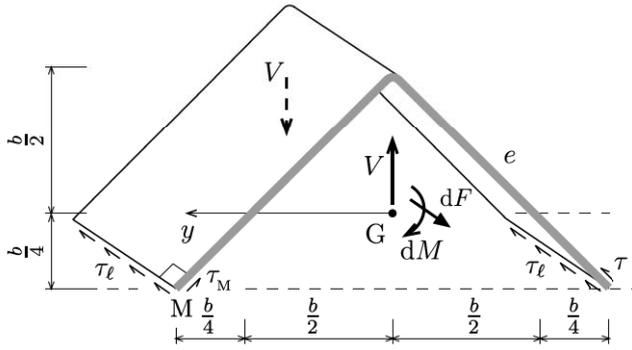
em que  $R$  é igual à soma das resultantes das tensões tangenciais nas 4 paredes inclinadas e tem projeção na direção vertical igual à  $V$ .

c) Tensões tangenciais  $\tau_M$  e  $\tau_N$

As áreas  $\bar{A}_M$  e  $\bar{A}_N$  indicadas abaixo são delimitadas por cortes longitudinais passando pelos pontos M e N, com espessura  $e$ , e por cortes longitudinais simétricos em relação ao eixo  $z$  coincidente com a direção de  $V$ .



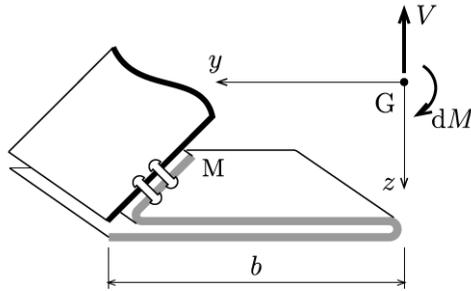
Ponto M:



$$\bar{S}_y = 2\left(\frac{3b}{4}\sqrt{2}\right)e \times \frac{b}{8} = \frac{3\sqrt{2}eb^2}{16} = 0,266eb^2$$

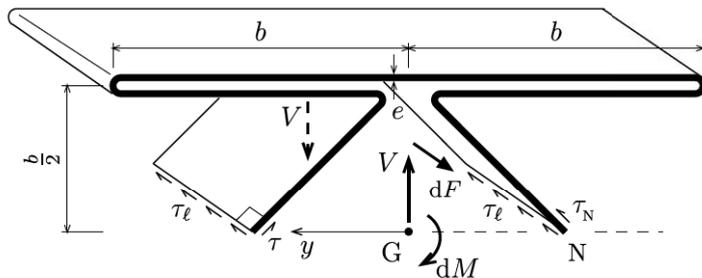
$$\tau_M = \frac{\frac{4P}{3} \times \frac{3\sqrt{2}eb^2}{16}}{2e \times \frac{5eb^3}{2}} = \frac{\sqrt{2}P}{20eb} = 0,071\frac{P}{eb} \quad (\nearrow)$$

O acréscimo de momento  $dM$  equilibra o binário das forças cortantes e gera a resultante  $dF$  dos acréscimos de tensão normal na área  $\bar{A}_M$ . O sentido de  $\tau_M$  decorre do equilíbrio longitudinal com  $dF$ , como indicado na figura.



Como a seção é fechada no trecho analisado, um único corte longitudinal em M não separaria a chapa inferior do restante da seção. Por outro lado, um corte longitudinal pelas duas chapas forneceria apenas o valor médio das tensões nas chapas.

Ponto N:



$$\bar{S}_y = 2\left[2\left(be \times \frac{b}{2}\right) + \frac{b\sqrt{2}}{2}e \times \frac{b}{4}\right] = \frac{8 + \sqrt{2}}{4}eb^2 = 2,354eb^2$$

$$\tau_N = \frac{\frac{4P}{3} \times \frac{8 + \sqrt{2}}{4}eb^2}{2e \times \frac{5eb^3}{2}} = \frac{8 + \sqrt{2}}{15} \frac{P}{eb} = 0,628\frac{P}{eb} \quad (\searrow)$$

O fato da chapa inferior não estar ligada diretamente à mesa enfraquece a seção e sobrecarrega a chapa superior com tensões tangenciais atingindo quase o dobro do valor médio estimado.

### Segunda resolução:

[Acréscimo  $dF$  da resultante das tensões normais na área  $\bar{A}$  obtido do diagrama de momentos]

a) Diagramas de estado

$$\uparrow \{R_A + R_B - 2P + P = 0$$

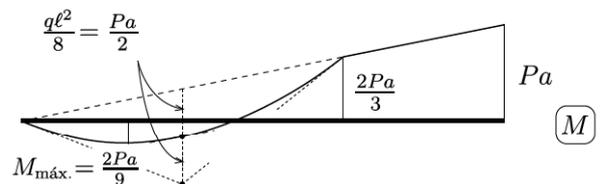
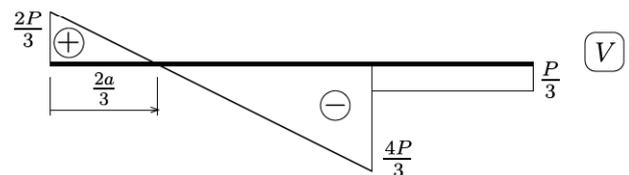
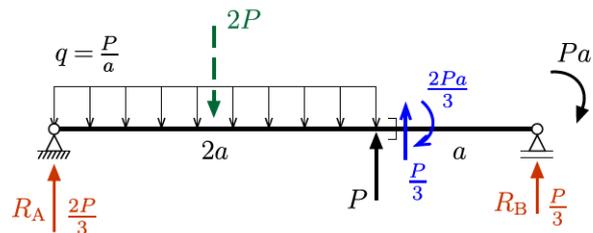
$$\curvearrow_B \{R_A \times 3a - 2P \times 2a + P \times a + Pa = 0$$

$$R_A = \frac{2P}{3}, \quad R_B = \frac{P}{3}.$$

Verif.

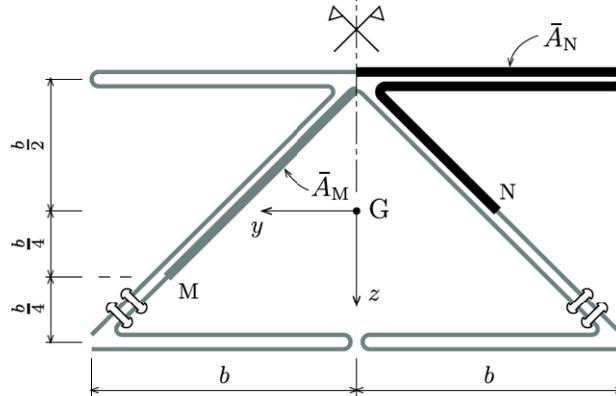
$$\curvearrow_A \left\{ 2P \times a - P \times 2a + Pa - \frac{P}{3} \times 3a = 0 \right.$$

A força cortante extrema  $V = -\frac{4P}{3}$  ocorre na seção à esquerda da força aplicada  $P$ .

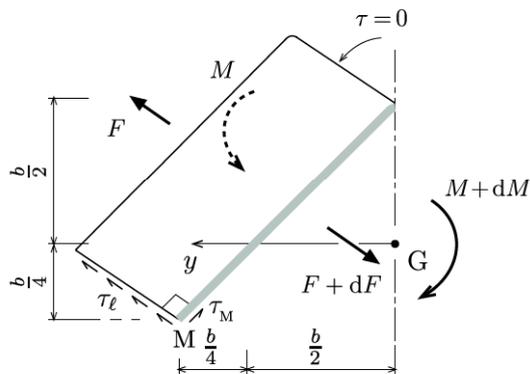


c) Tensões tangenciais  $\tau_M$  e  $\tau_N$

Fazendo uso da simetria em relação ao eixo vertical  $z$ , que coincide com a direção de  $V$ , demarcamos as áreas  $\bar{A}_M$  e  $\bar{A}_N$  na figura abaixo. Apenas cortes longitudinais passando pelos pontos M e N são considerados, já que as tensões tangenciais são nulas em cortes longitudinais sobre o eixo de simetria  $z$ .



Ponto M:

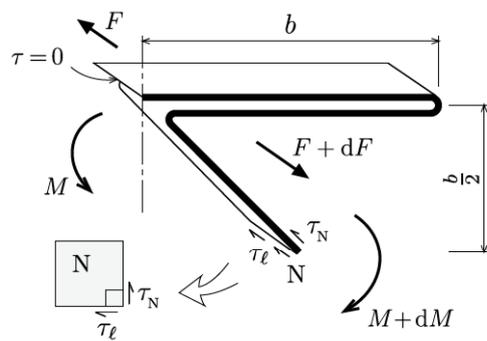


$$\bar{S}_y = \left( \frac{3b}{4} \sqrt{2} \right) e \times \frac{b}{8} = \frac{3\sqrt{2}eb^2}{32} = 0,133eb^2$$

$$\tau_M = \frac{\frac{4P}{3} \times \frac{3\sqrt{2}eb^2}{32}}{e \times \frac{5eb^3}{2}} = \frac{\sqrt{2} P}{20 eb} = 0,071 \frac{P}{eb} \quad (\swarrow)$$

O sentido de  $\tau_M$  decorre do equilíbrio longitudinal das resultantes  $F$  e  $F + dF$  das tensões normais nas faces de área  $\bar{A}_M$ . As resultantes são de tração já que os momentos fletores dos dois lados tracionam as fibras superiores.

Ponto N:



$$\bar{S}_y = 2 \left( be \times \frac{b}{2} \right) + \frac{b\sqrt{2}}{2} e \times \frac{b}{4} = \frac{8 + \sqrt{2}}{8} eb^2 = 1,177eb^2$$

$$\tau_N = \frac{\frac{4P}{3} \times \frac{8 + \sqrt{2}}{8} eb^2}{e \times \frac{5eb^3}{2}} = \frac{8 + \sqrt{2} P}{15 eb} = 0,628 \frac{P}{eb} \quad (\searrow)$$