



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I.

TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES.

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

2000

TRAÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES.

O ENSAIO DE TRAÇÃO OU DE COMPRESSÃO SIMPLES.

Quando se submete uma barra prismática, como a que se mostra na fig., a ensaio de tração, as seções transversais que limitam o segmento de dimensão L permanecem planas e se afastam de ΔL , de modo que é possível definir a grandeza ε - denominada *deformação longitudinal* - da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

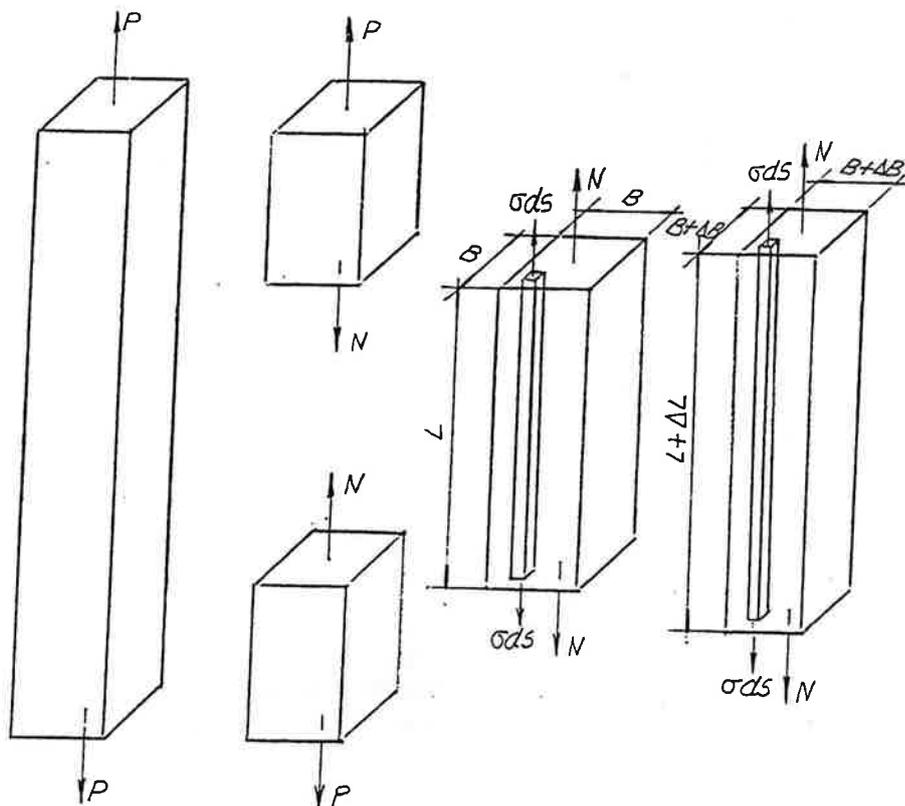
Ao mesmo tempo, a dimensão B da seção transversal varia ΔB , de modo que é possível definir a grandeza ε_T - denominada *deformação transversal* - da seguinte maneira:

$$\varepsilon_T = \frac{(B + \Delta B) - B}{B} = \frac{\Delta B}{B} \quad (2)$$

Como se verá adiante, a um alongamento longitudinal corresponde um encurtamento transversal, e vice-versa.

A força normal N , responsável pelo equilíbrio dos segmentos externos, é dada por:

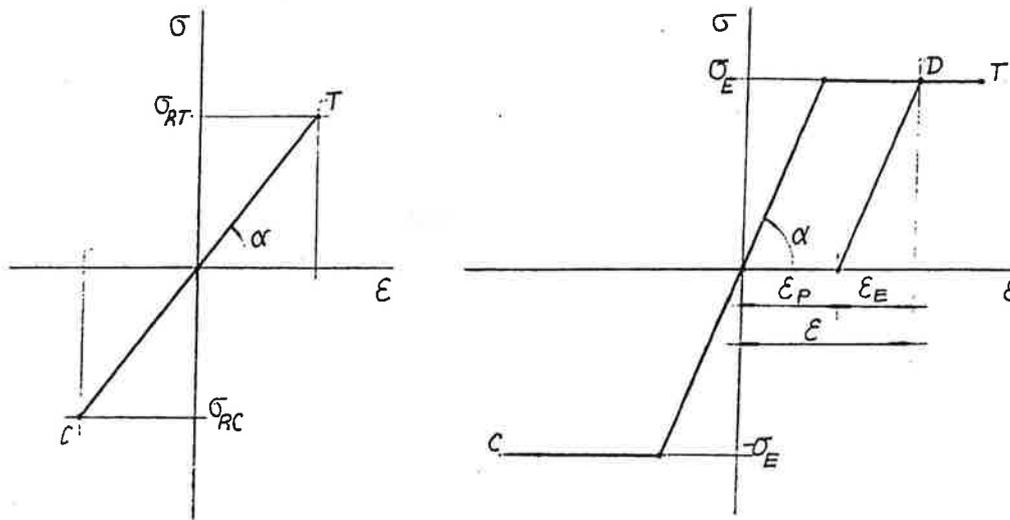
$$N = P \quad (3)$$



Uma vez que as seções planas mantêm-se planas, as infinitas fibras que compõem o segmento de dimensão L , solicitadas por forças $dN = \sigma dS$ em suas extremidades, apresentam a mesma deformação ϵ . Em consequência, é possível admitir a constância de σ , de modo que:

$$N = \int \sigma dS = \sigma \int dS = \sigma S \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S} \quad (4)$$

Para cada valor de P pode-se determinar a deformação ϵ com a expressão (1) e a tensão σ com a expressão (4), e, assim, determinar o diagrama $\sigma \times \epsilon$ para o material de que é composta a barra.



Dois tipos básicos de comportamento são apresentados na fig..

O comportamento elasto-frágil é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações, isto é:

$$\sigma = \text{tg} \alpha \epsilon = E \epsilon \quad (5)$$

onde E é o *módulo de elasticidade* do material.

A expressão anterior - denominada *lei de Hooke* - é válida até que se atinja, no ensaio de tração, a *tensão de ruptura à tração* σ_{RT} , e, no ensaio de compressão, a *tensão de ruptura à compressão* σ_{RC} .

Substituindo na expressão anterior os valores de σ e ϵ , dados pelas expressões (4) e (1), obtém-se:

$$\Delta L = \frac{PL}{ES} \quad (6)$$

A expressão anterior mostra que, para um mesmo valor de P , quanto maior for a grandeza ES - denominada *rigidez longitudinal* - tanto menor é a variação de comprimento ΔL .

Para cada material, a deformação transversal é dada por:

$$\epsilon_T = -\nu \epsilon \quad (7)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

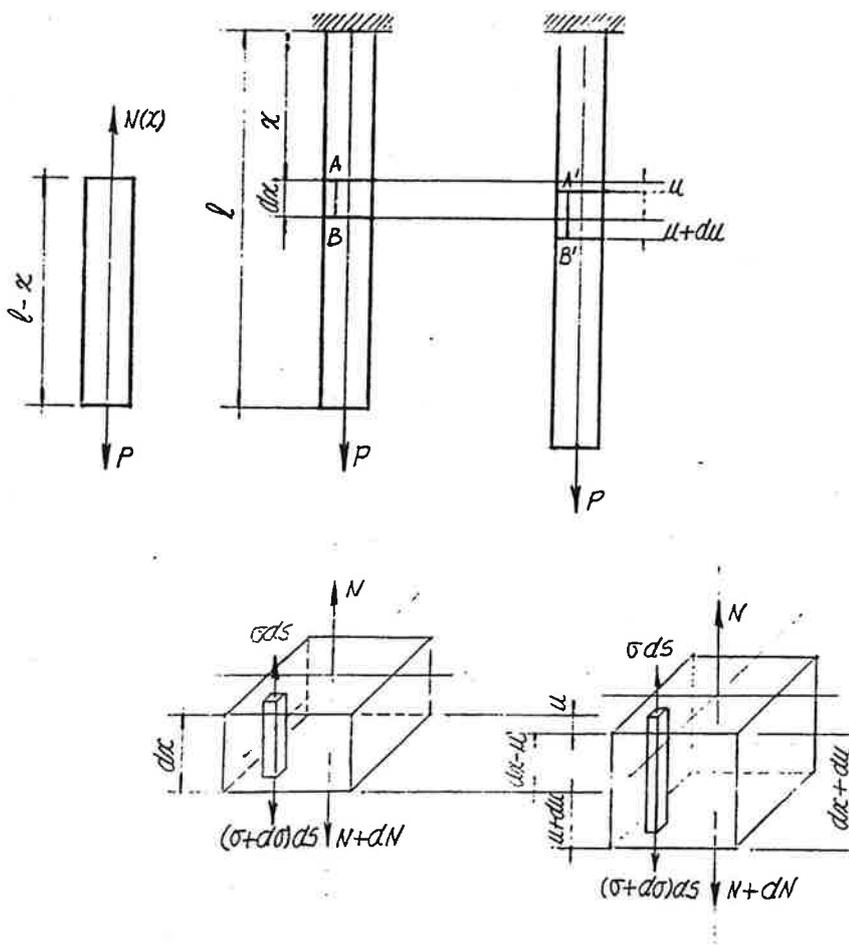
O comportamento elasto-plástico é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações até que se atinja a *tensão de escoamento* σ_E , cujo valor absoluto é o mesmo tanto no ensaio de tração como no de compressão. Atingido o valor σ_E , dá-se o escoamento do material, isto é, o aumento progressivo de deformação sob tensão constante, até que sobrevenha a ruptura. Se, atingido o ponto D, se procede ao descarregamento, este se dá segundo uma reta paralela à reta correspondente ao carregamento, de modo que, quando $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_p$. Assim, a deformação total ϵ pode ser considerada como a soma da *deformação elástica* ϵ_E (recuperável no descarregamento) e da *deformação plástica* ϵ_p (não recuperável no descarregamento).

TENSÕES, DEFORMAÇÕES E DESLOCAMENTOS NA TRACÇÃO OU COMPRESSÃO SIMPLES.

Considere-se uma barra, como a que se mostra na fig., submetida à ação do peso próprio e da força P . A força normal em uma seção caracterizada pela coordenada x é responsável pelo equilíbrio do segmento de dimensão $(l - x)$, isto é,

$$N = P + \gamma S(l - x) \quad (1)$$

onde γ é o peso próprio do material.



Deve-se notar que os esforços solicitantes, normalmente indicados na configuração indeformada, são simultâneos à deformação e deveriam, a rigor, ser indicados na configuração deformada. Entretanto, visto que as deformações são pequenas, a configuração deformada pode ser confundida - quando se escrevem as equações de equilíbrio, mediante as quais se calculam os esforços solicitantes - com a configuração indeformada.

À força normal N corresponde a tensão normal σ , dada por:

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{P}{S} + \gamma(1 - x) \quad (2)$$

de modo que

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \quad (3)$$

Considere-se, em seguida, um segmento de comprimento dx na *configuração indeformada* (anterior à aplicação do carregamento externo), e na *configuração deformada* (posterior à aplicação do carregamento externo), caracterizada pelo deslocamento longitudinal das seções transversais, as quais se mantêm planas.

A fibra genérica AB passa a ocupar a posição $A'B'$, uma vez que os pontos da seção transversal caracterizada pela coordenada x têm deslocamento longitudinal u , enquanto os pontos da seção transversal caracterizada pela coordenada $x + dx$ têm deslocamento longitudinal $u + du$.

A deformação da fibra AB é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (4)$$

onde:

$$AB = dx \quad A'B' = dx + (u + du) - u = dx + du \quad (5)$$

de modo que:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (6)$$

A fibra AB de seção transversal dS é solicitada nas extremidades pelas forças σdS e $(\sigma + d\sigma)dS$ que, juntamente com o peso próprio $\gamma dS dx$, satisfazem o equilíbrio, isto é,

$$(\sigma + d\sigma)dS + \gamma dS dx = \sigma dS \Rightarrow \frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \quad (7)$$

A tensão σ é dada, segundo a lei de Hooke, por:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (8)$$

A força normal N na seção caracterizada pela coordenada x é dada por:

$$N = \int \sigma dS = \int E \frac{du}{dx} dS = E \frac{du}{dx} \int dS = ES \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \quad (9)$$

Integrando a expressão anterior, obtém-se:

$$u(x) = u_0 + \int \frac{N(x)}{ES} dx \quad (10)$$

onde u_0 é o deslocamento em $x = 0$.

A expressão anterior é válida para o caso de barras de seção variável, isto é, $ES = ES(x)$.

Considerando na expressão anterior a força normal N dada pela expressão (1), obtém-se:

$$u(x) = \frac{Px}{ES} + \frac{\gamma S}{ES} (lx - \frac{1}{2}x^2) \quad (11)$$

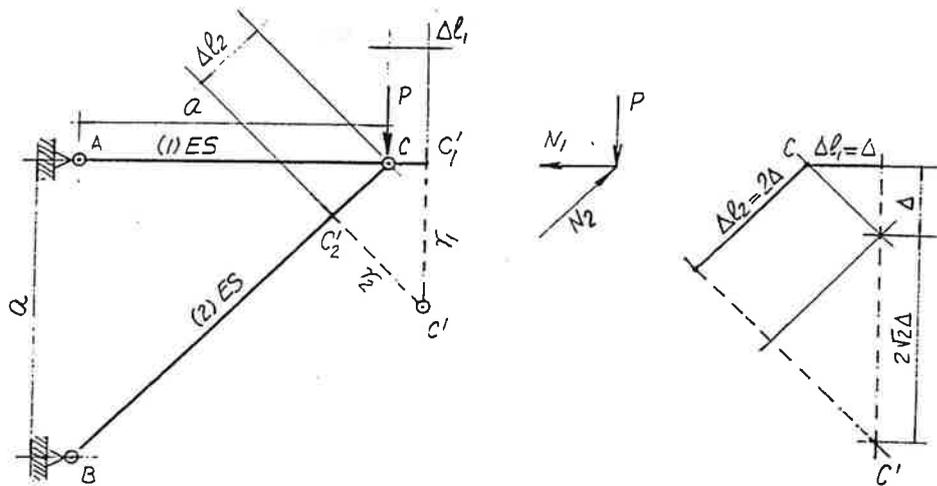
DESLOCAMENTOS DOS NÓS DE TRELIÇAS ISOSTÁTICAS.

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.

As três parcelas - translação, deformação e rotação - que compõem o movimento de uma barra genérica de uma treliça, e a partir das quais se calculam os deslocamentos nodais, são apresentadas nos dois exemplos seguintes.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento horizontal u_C e o deslocamento vertical v_C do ponto C da estrutura da figura.



O equilíbrio do nó C permite determinar as forças normais N_1 e N_2 , isto é:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 = P \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = P & (T) \\ N_2 = \sqrt{2}P & (C) \end{cases} \quad (A)$$

O alongamento Δl_1 correspondente à força normal de tração N_1 e o encurtamento Δl_2 correspondente à força normal de compressão N_2 , são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{Pa}{ES} = \Delta \quad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = 2 \frac{Pa}{ES} = 2\Delta \quad (B'')$$

Por pertencer à barra 1, o ponto C, em decorrência do alongamento Δl_1 , passa a ocupar a posição C'_1 ; em seguida, em decorrência da rotação da barra 1 em torno do ponto A, descreve o arco de círculo de raio $l_1 + \Delta l_1$, que pode ser confundido com a reta r_1 perpendicular ao raio AC'_1 .

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = 2 \frac{Pa}{ES} = 2\Delta \quad (E) \quad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{Pa}{ES} = \Delta \quad (A) \quad (B''')$$

Por pertencer à barra 1, a situação do ponto C é a mesma do caso anterior.

Por pertencer à barra 2, o ponto C, em decorrência do desdocalamento $v_B = \Delta l_3$ do ponto B, passa a ocupar a posição C'_2 ; em seguida, em decorrência do encurtamento Δl_2 , passa a ocupar a posição C''_2 ; finalmente, em decorrência da rotação da barra 2 em torno do ponto B', descreve o arco de círculo de raio $l_2 - \Delta l_2$, que pode ser confundido com a reta r_2 , perpendicular ao raio $B'C''_2$.

Mais uma vez, como o ponto C pertence simultaneamente às barras 1 e 2, segue-se que a posição final C' corresponde à interseção das retas r_1 e r_2 .

De acordo com a fig., tem-se:

$$u_c = \Delta = \frac{Pa}{ES} \quad v_c = 2(1 + \sqrt{2})\Delta = 2(1 + \sqrt{2}) \frac{Pa}{ES} \quad (C)$$

2. O DIAGRAMA DE WILLIOT.

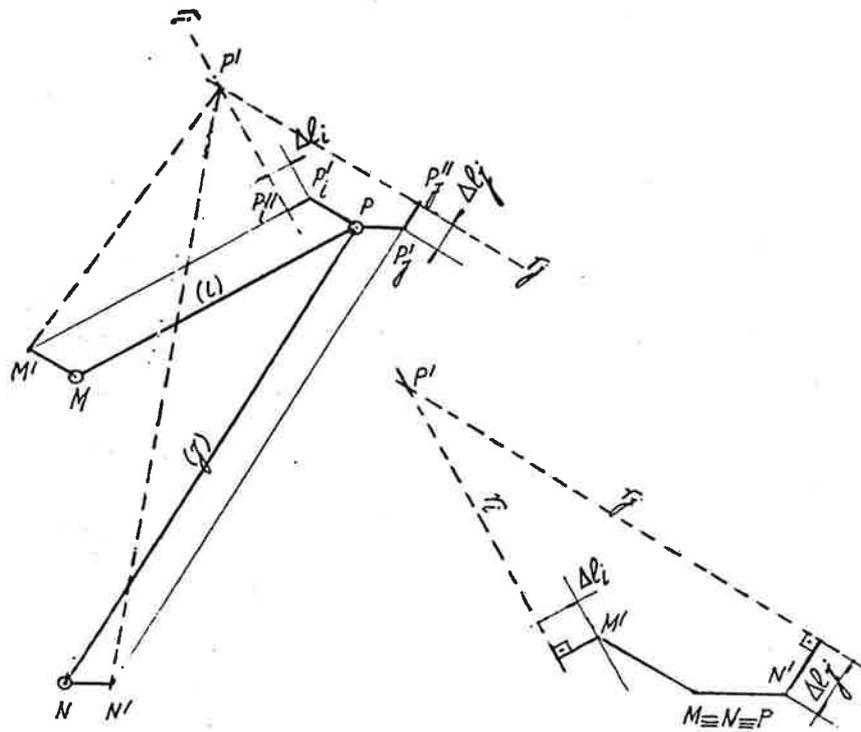
Os exemplos anteriores permitem estabelecer, como se mostra na fig., a seguinte generalização: dado um ponto P ligado pelas barras i e j aos pontos M e N, cujas posições na configuração deformada M' e N' tenham sido previamente determinadas, obtém-se a posição P', da seguinte maneira:

Por pertencer à barra i, o ponto P, em decorrência do desdocalamento δ_M do ponto M, passa a ocupar a posição P'_i ; em seguida, em decorrência do alongamento ou encurtamento Δl_i da barra i, passa a ocupar a posição P''_i ; finalmente, em decorrência da rotação da barra i em torno do ponto M', descreve o arco de círculo de raio $l_i \pm \Delta l_i$, que pode ser confundido com a reta r_i , perpendicular ao raio $M'P''_i$.

Considerado como pertencente à barra j, o ponto P, em decorrência do desdocalamento δ_N do ponto N, passa a ocupar a posição P'_j ; em seguida, em decorrência do alongamento ou encurtamento Δl_j da barra j, passa a ocupar a posição P''_j ; finalmente, em decorrência da rotação da barra j em torno do ponto N', descreve o arco de círculo de raio $l_j \pm \Delta l_j$, que pode ser confundido com a reta r_j , perpendicular ao raio $N'P''_j$.

Como o ponto P pertence simultaneamente às barras i e j, segue-se que a posição final P' corresponde à interseção das retas r_i e r_j .

No diagrama de Williot, a posição inicial de cada um dos nós é representada por um único ponto, isto é, $A=B=\dots M=N=P=\dots$

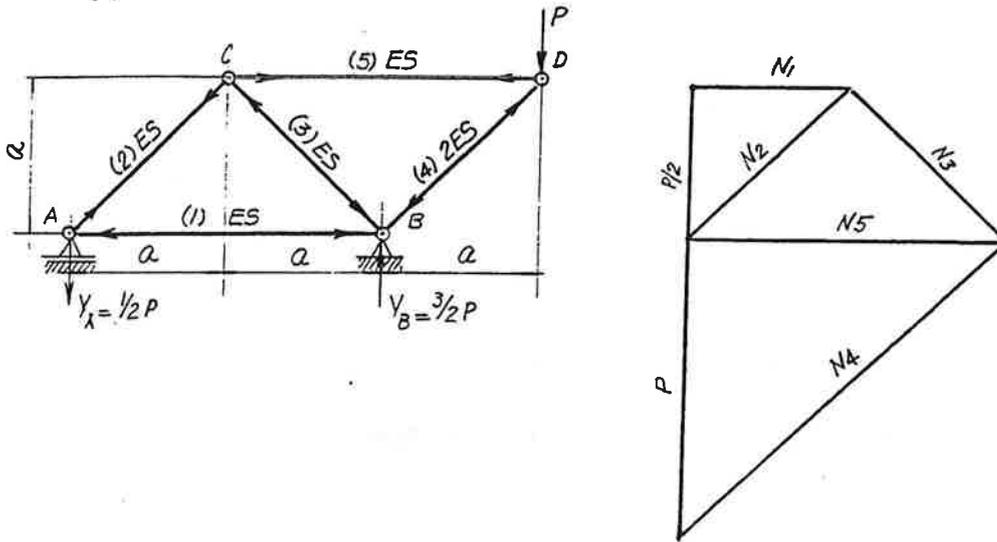


Suponha-se que tenham sido determinadas as posições finais M' e N' dos pontos M e N . Como os segmentos PP' e MM' têm o mesmo tamanho e a mesma direção, basta considerar a partir de M' o alongamento ou encurtamento Δl_i segundo a direção da barra i ; da mesma forma, como o segmento PP' e NN' têm o mesmo tamanho e a mesma direção, basta considerar a partir de N' o alongamento ou encurtamento Δl_j segundo a direção da barra j .

No exemplo da fig., Δl_i é encurtamento e Δl_j é alongamento.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento horizontal u_D e o deslocamento vertical v_D do ponto D da treliça da fig.

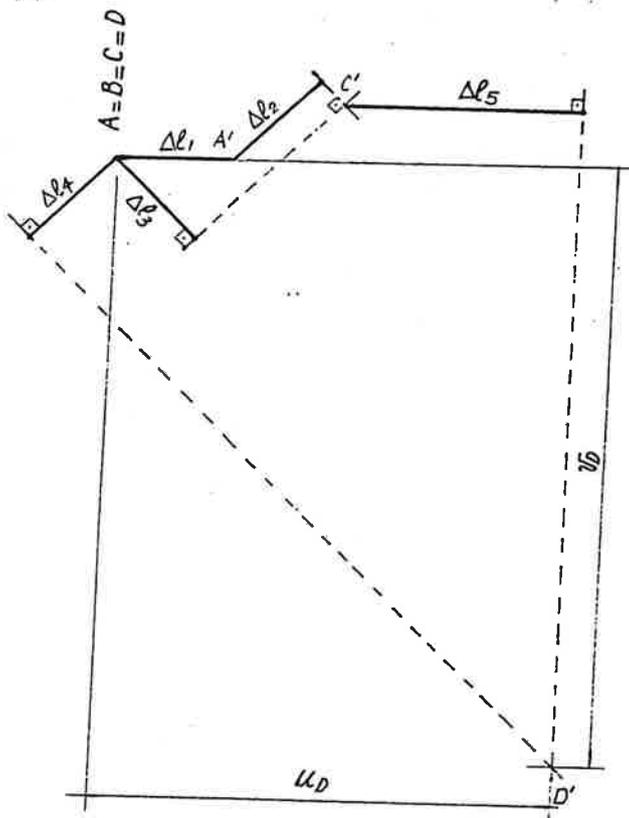
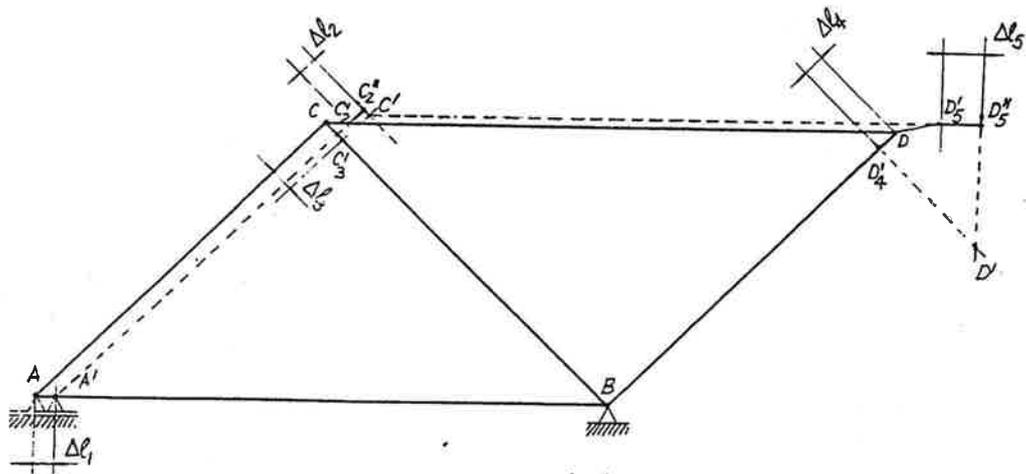


Determinadas as forças normais (por exemplo, mediante o diagrama de Cremona que se mostra na fig.), determinam-se os alongamentos e encurtamentos da tabela seguinte, a partir dos quais se constrói o diagrama de Williot.

BARRA	l_i	ES_i	N_i	$\Delta_i = \frac{N_i l_i}{ES_i}$
1	$2a$	ES	$\frac{1}{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
2	$\sqrt{2}a$	ES	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$ (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (A)
3	$\sqrt{2}a$	ES	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
4	$\sqrt{2}a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta$ (E)
5	$2a$	ES	P (T)	$2 \frac{Pa}{ES} = 2\Delta$ (A)

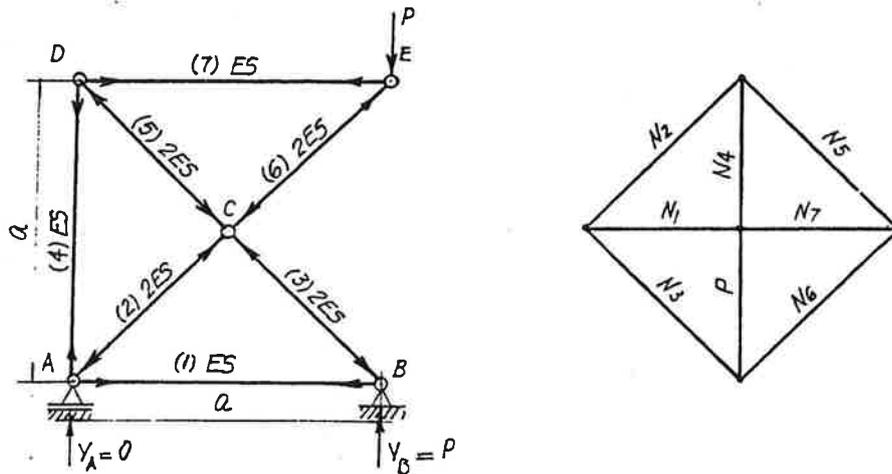
Do diagrama de Williot, indicado na fig., resulta:

$$u_c = 3.9\Delta = 3.9 \frac{Pa}{ES} \quad v_c = 5.3\Delta = 5.3 \frac{Pa}{ES}$$



EXEMPLO 2.

Determinar o deslocamento horizontal u_E e o deslocamento vertical v_E do ponto E da treliça da fig.

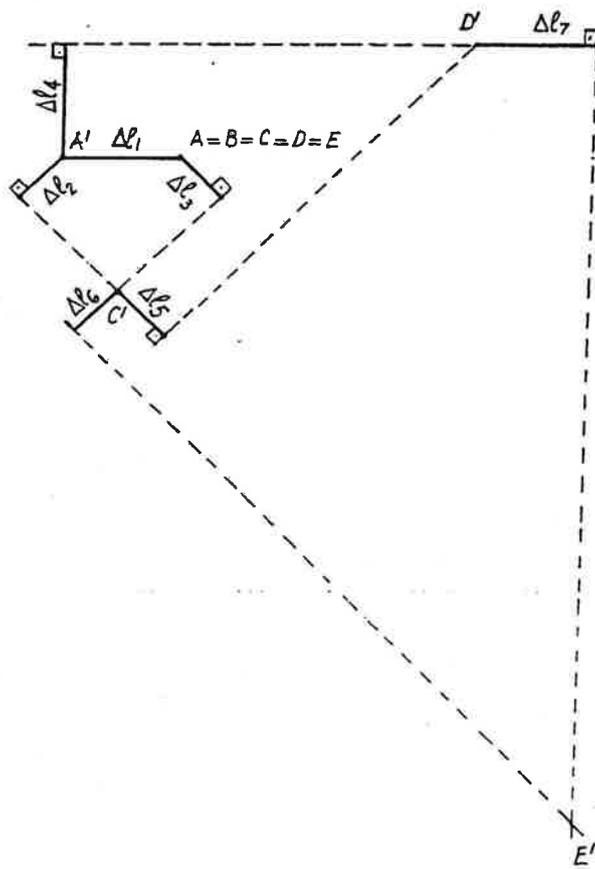
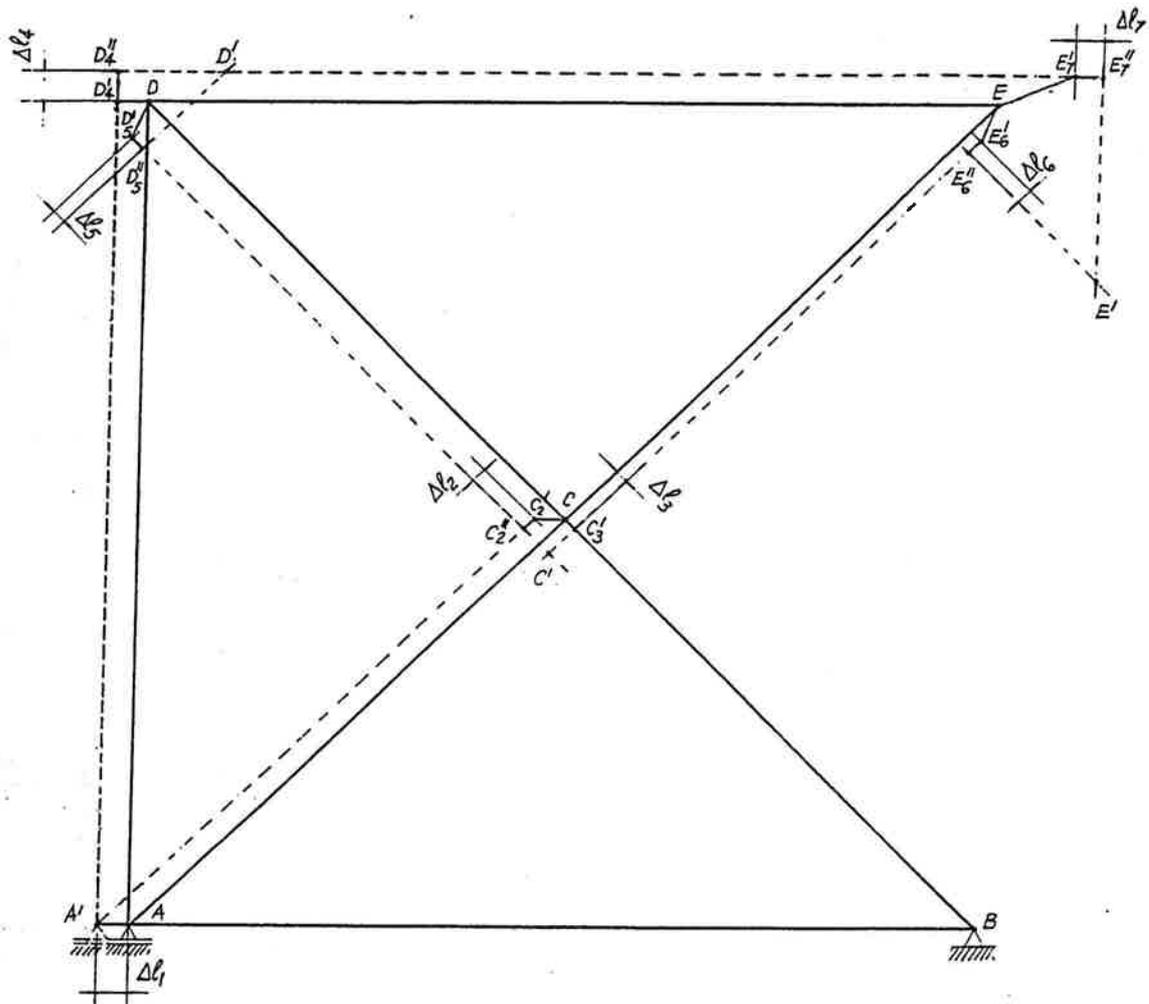


Determinadas as forças normais (por exemplo, mediante o diagrama de Cremona que se mostra na fig.), determinam-se os alongamentos e encurtamentos da tabela seguinte, a partir dos quais se constrói o diagrama de Williot.

BARRA	l_i	ES_i	N_i	$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{ES_i}$
1	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta (A)$
2	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{1}{2} \frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
3	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{1}{2} \frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
4	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta (A)$
5	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{1}{2} \frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
6	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	2ES	$\sqrt{2}P$ (C)	$\frac{1}{2} \frac{Pa}{ES} = \frac{\Delta}{2}$ (E)
7	a	ES	P (T)	$\frac{Pa}{ES} = \Delta (A)$

Do diagrama de Williot, indicado na fig, resulta:

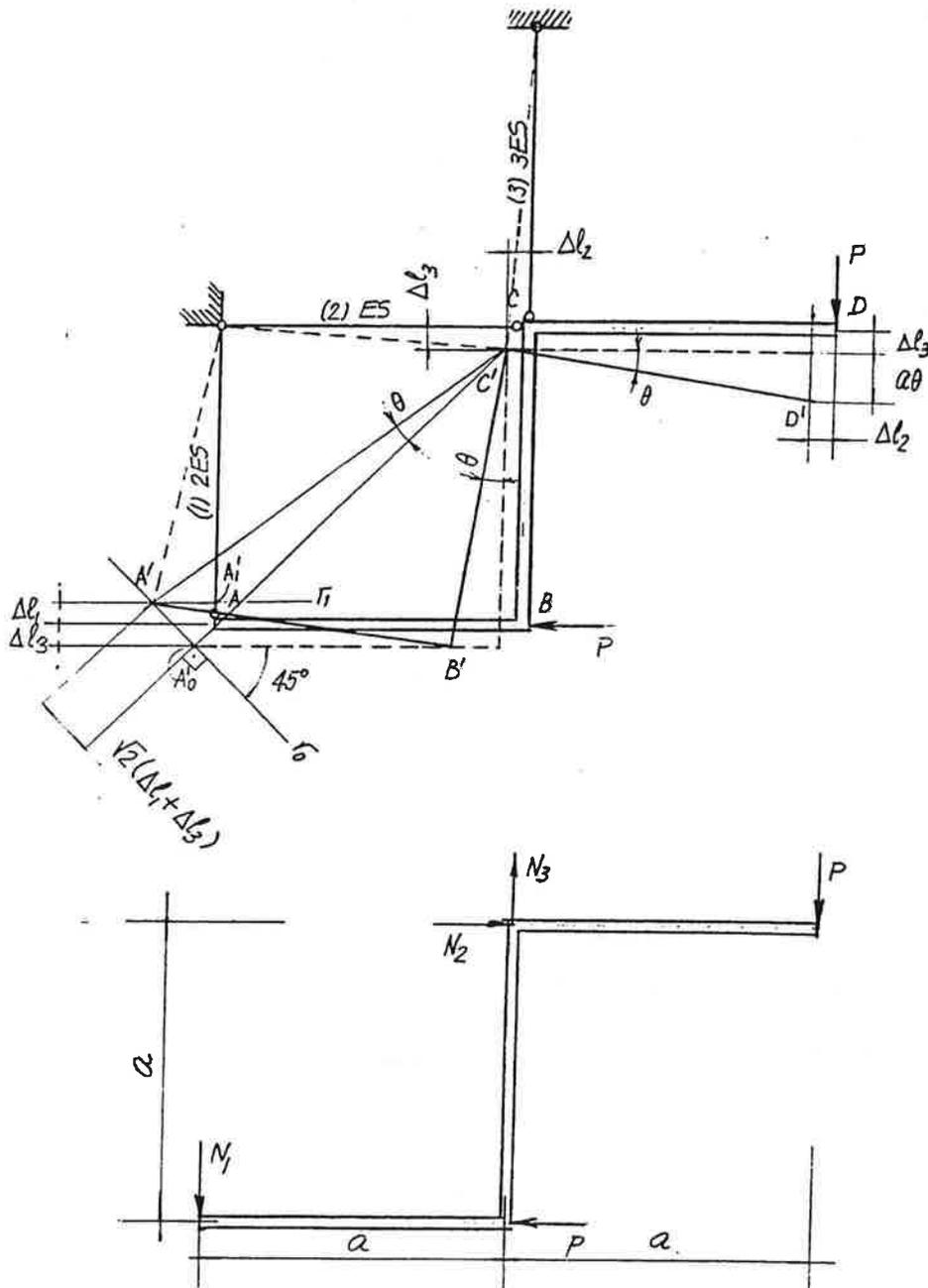
$$u_c = 3.5\Delta = 3.5 \frac{Pa}{ES} \quad v_c = 5.8\Delta = 5.8 \frac{Pa}{ES}$$



3. ESTRUTURAS COM BARRA RÍGIDA.

EXEMPLO.

Determinar o deslocamento horizontal u_D e o deslocamento vertical v_D do ponto D da estrutura da fig.



Considerando o equilíbrio da barra rígida, determinam-se as forças normais de compressão N_1 e N_2 , bem como a força normal de tração N_3 , dadas por:

$$N_1 = 2P \quad N_2 = P \quad N_3 = 3P \quad (A)$$

às quais correspondem os encurtamentos Δl_1 e Δl_2 , bem como o alongamento Δl_3 , dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_2 = \frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_3 = \frac{Pa}{ES} \quad (B)$$

A translação da barra rígida é caracterizada pelo deslocamento do ponto C, que se obtém considerando o ponto C como pertencente simultaneamente às barras 2 e 3.

De acordo com a fig.,

$$u_C = \Delta l_2 = \frac{Pa}{ES} \quad v_C = \Delta l_3 = \frac{Pa}{ES} \quad (C)$$

A rotação da barra rígida em torno do ponto C' é caracterizada pelo ângulo θ , determinado a partir do deslocamento do ponto A, que se obtém considerando o ponto A como pertencente simultaneamente à barra rígida e à barra 1.

Por pertencer à barra rígida, o ponto A, em consequência da translação, passa a ocupar a posição A₀'; em seguida, em decorrência da rotação em torno do ponto C', descreve um círculo de raio A₀'C', que se confunde com a reta r₀.

Por pertencer à barra 1, o ponto A, em consequência do encurtamento Δl_1 , passa a ocupar a posição A₁'; em seguida, em decorrência da rotação da barra 1, descreve um círculo de raio l₁ - Δl_1 , que se confunde com a reta r₁.

A interseção das retas r₀ e r₁ determina o ponto A'.

De acordo com a fig.,

$$\theta = \frac{A_0'A'}{A_0'C'} = \frac{\sqrt{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3)}{\sqrt{2}a} = \frac{2P}{ES} \quad (D)$$

de modo que:

$$u_D = u_C = \frac{Pa}{ES} \quad v_D = v_C + a\theta = 3 \frac{Pa}{ES} \quad (E)$$

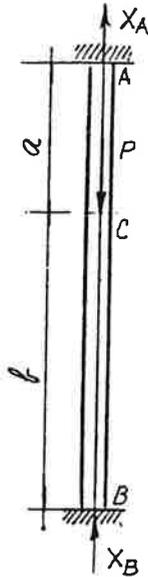
ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS.

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS.

Os conceitos fundamentais relativos à análise de estruturas hiperestáticas submetidas à tração ou compressão simples, bem como alguns aspectos importantes do comportamento de estruturas hiperestáticas são apresentados nos três exemplos seguintes.

EXEMPLO 1.

Dada a estrutura da fig., determinar as reações de apoio X_A e X_B bem como o deslocamento longitudinal u_C do ponto C.



ALTERNATIVA 1.

A única equação de equilíbrio de que se dispõe - equilíbrio de forças segundo a direção x - fornece:

$$X_A + X_B = P \quad (A)$$

Para obter uma segunda relação entre X_A e X_B , considera-se a expressão que fornece o deslocamento longitudinal em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x , dada por:

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{ES} dx \quad (0 \leq x \leq a) \quad (B')$$

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{ES} dx = u_0 + \int_0^a \frac{N}{ES} dx + \int_a^x \frac{N}{ES} dx \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (B'')$$

onde:

$$u_0 = u_A = 0 \quad (C')$$

$$N(x) = +X_A \quad ES = ES_{AC} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (C'')$$

$$N(x) = -X_B \quad ES = ES_{BC} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (C''')$$

de modo que:

$$u(x) = \frac{X_A x}{ES_{AC}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (D')$$

$$u(x) = \frac{X_A a}{ES_{AC}} - \frac{X_B (x-a)}{ES_{BC}} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (D'')$$

Uma vez que o deslocamento longitudinal no ponto B é nulo, resulta da expressão (D''):

$$X_B = \frac{ES_{BC}}{b} \frac{a}{ES_{AC}} X_A \quad (E)$$

As expressões (A) e (E) fornecem:

$$X_A = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad X_B = \frac{\frac{ES_{BC}}{b}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad (F)$$

As grandezas $\frac{ES_{AC}}{a}$ e $\frac{ES_{BC}}{b}$ são os *coeficientes de rigidez à deformação longitudinal* dos trechos AC e BC.

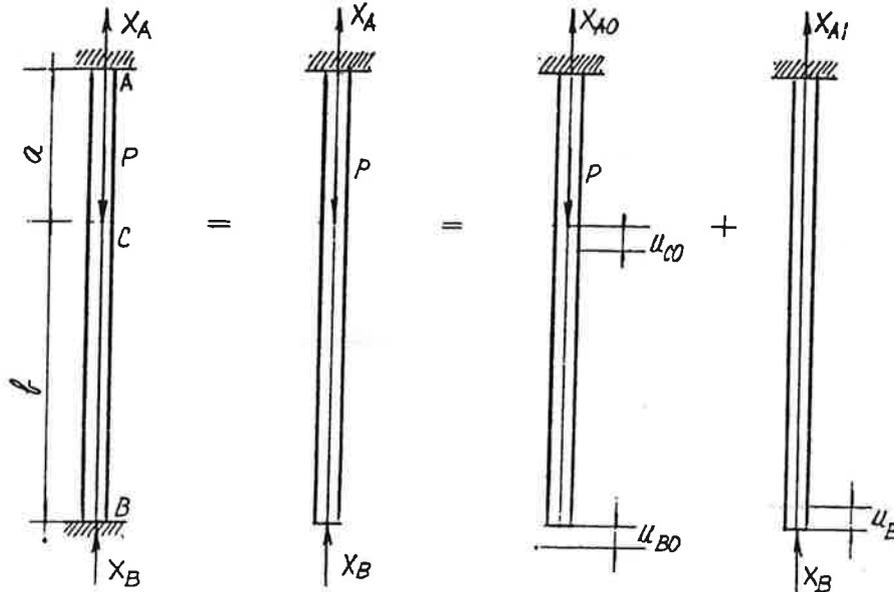
Os resultados anteriores mostram que em uma estrutura hiperestática as reações de apoio e os esforços solicitantes dependem da rigidez relativa dos elementos que compõem a estrutura.

Considerando na expressão (D') o valor de X_A dado pela expressão (F), obtém-se:

$$u_C = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} \frac{Pa}{ES_{AC}} \quad (G)$$

ALTERNATIVA 2.

O comportamento da estrutura hiperestática dada é idêntico ao comportamento da estrutura isostática que se mostra na fig. - denominada *estrutura isostática fundamental* - submetida ao carregamento externo (no caso, a força P), bem como à reação de apoio X_B - denominada *incógnita hiperestática* -, por enquanto desconhecida



Determinado o valor de X_B , a equação de equilíbrio de forças segundo a direção x fornece:

$$X_A = P - X_B \quad (A)$$

Em consequência do princípio da superposição de efeitos, pode-se considerar isoladamente os efeitos do carregamento externo e da incógnita hiperestática.

O deslocamento longitudinal u_{B0} no ponto B devido à força P é igual, uma vez que o trecho BC está descarregado, ao deslocamento longitudinal u_{C0} no ponto C, isto é:

$$u_{B0} = u_{C0} = \frac{N_{AC}^0 l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES_{AC}} \quad (B)$$

O deslocamento longitudinal u_{B1} no ponto B devido à força X_B é igual ao encurtamento do trecho AC mais o encurtamento do trecho BC, isto é:

$$u_{B1} = \Delta l_{AC}^1 + \Delta l_{BC}^1 = \frac{N_{AC}^1 l_{AC}}{ES_{AC}} + \frac{N_{BC}^1 l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{X_B a}{ES_{AC}} + \frac{X_B b}{ES_{BC}} \quad (C)$$

Uma vez que o deslocamento longitudinal no ponto B é nulo, segue-se que o deslocamento longitudinal u_{B1} deve anular o deslocamento longitudinal u_{B0} , isto é:

$$u_{B1} = u_{B0} \Rightarrow X_B = \frac{\frac{ES_{BC}}{b}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad (D)$$

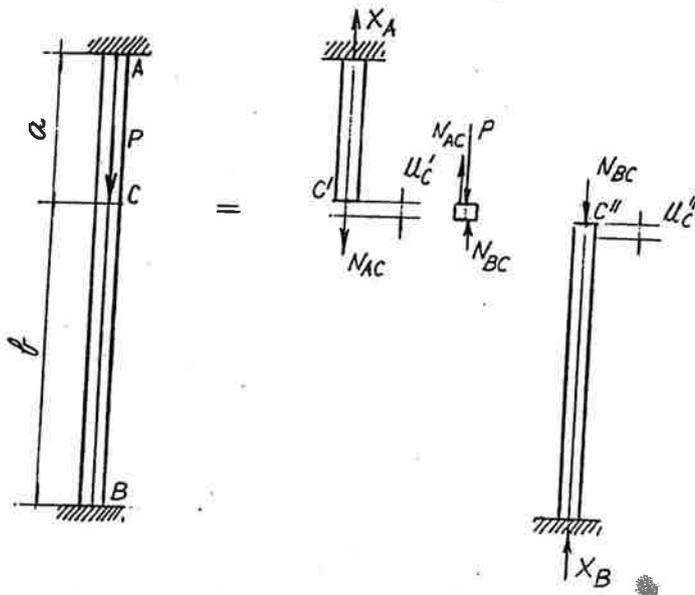
de modo que, retornando à expressão (A), obtém-se:

$$X_A = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad (E)$$

O deslocamento longitudinal no ponto C é dado por:

$$\begin{aligned} u_C = u_{C0} - u_{C1} &= \frac{N_{AC}^0 l_{AC}}{ES_{AC}} - \frac{N_{AC}^1 l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES_{AC}} - \frac{X_B a}{ES_{AC}} = \\ &= \frac{\frac{ES_{AC}}{a} Pa}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b} ES_{AC}} \quad (F) \end{aligned}$$

ALTERNATIVA 3.



Considerando o equilíbrio no ponto C, tem-se:

$$N_{AC} + N_{BC} = P \quad (A)$$

onde, em vista do equilíbrio das barras AC e BC, tem-se:

$$N_{AC} = X_A \quad N_{BC} = X_B \quad (B)$$

de modo que:

$$X_A + X_B = P \quad (C)$$

Os deslocamentos longitudinais nos pontos C' e C'' são dadas por:

$$u_C' = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{X_A a}{ES_{TAC}} \quad u_C'' = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{X_B b}{ES_{BC}} \quad (D)$$

Uma vez que esses deslocamentos são iguais, tem-se:

$$u_C' = u_C'' \Rightarrow X_B = \frac{ES_{BC}}{b} \frac{a}{ES_{AC}} X_A \quad (E)$$

As expressões (C) e (E) fornecem:

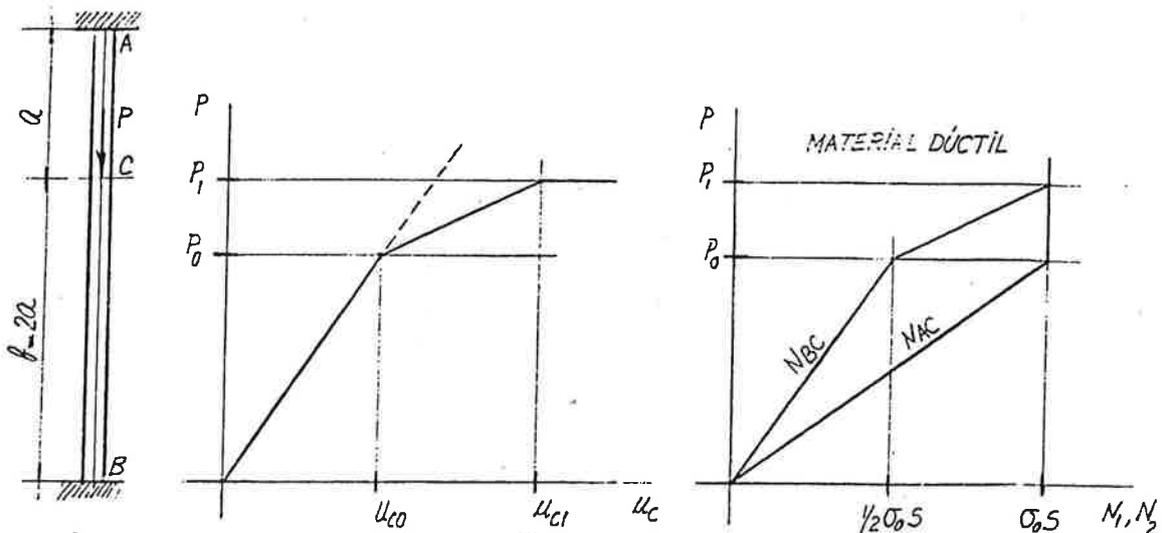
$$X_A = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad X_B = \frac{\frac{ES_{BC}}{b}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} P \quad (F)$$

Considerando nas expressões (D) os valores de M_A^* e M_B^* dados pelas expressões (F), obtém-se:

$$u_C = u_C' = u_C'' = \frac{\frac{ES_{AC}}{a}}{\frac{ES_{AC}}{a} + \frac{ES_{BC}}{b}} \frac{Pa}{ES_{AC}} \quad (G)$$

EXEMPLO 2.

Comparar o comportamento da estrutura da fig., considerando dois materiais: um elasto-frágil com $\sigma_{RT} = -\sigma_{RC} = \sigma_0$, o outro elasto-plástico com $\sigma_E = \sigma_0$.



As forças normais e as correspondentes tensões normais, para um determinado valor de P, são dadas, de acordo com os resultados do exemplo 1, por:

$$N_{AC} = \frac{2}{3}P \quad (T) \Rightarrow \sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{S_{AC}} = \frac{2}{3} \frac{P}{S} \quad (T) \quad (A')$$

$$N_{BC} = \frac{1}{3}P \quad (C) \Rightarrow \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{1}{3} \frac{P}{S} \quad (C) \quad (A'')$$

O deslocamento do ponto C é determinado considerando indiferentemente o alongamento do trecho AC ou o encurtamento do trecho BC, isto é,

$$u_C = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{2}{3} \frac{Pa}{ES} \quad (B')$$

$$u_C = \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{2}{3} \frac{Pa}{ES} \quad (B'')$$

O valor P_0 de P para o qual se dá a ruptura por tração do material elasto-frágil no trecho AC é dado por:

$$\sigma_{AC} = \sigma_0 \Rightarrow P = P_0 = \frac{3}{2} \sigma_0 S \quad (C)$$

Tendo ocorrido a ruptura por tração do trecho AC a tensão no trecho BC é dada por:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{P_0}{S} = \frac{3}{2} \sigma_0 \quad (D)$$

isto é, o valor P_0 corresponde ao colapso da estrutura devido à ruptura por tração do trecho AC, seguido de ruptura por compressão do trecho BC.

Considerando as expressões (B), obtém-se:

$$P = P_0 \Rightarrow u_C = u_{C0} = \frac{2}{3} \frac{P_0 a}{ES} \quad (E)$$

O valor P_0 de P para o qual se dá o escoamento do material elasto-plástico no trecho AC é dado por:

$$\sigma_{AC} = \sigma_0 \Rightarrow P = P_0 = \frac{3}{2} \sigma_0 S \quad (F)$$

Contrariamente ao que acontece com o material elasto-frágil, não há colapso da estrutura. Para um valor de P superior ao valor P_0 , a estrutura, anteriormente hiperestática, passa a se comportar como uma estrutura isostática. De fato, considerando o equilíbrio no ponto C, pode-se determinar a força normal N_{BC} e a correspondente tensão normal σ_{BC} , uma vez que no trecho AC a tensão normal σ_{AC} permanece igual a σ_0 . Assim:

$$N_{BC} = P - \sigma_0 S \Rightarrow \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{S_{BC}} = \frac{P}{S} - \sigma_0 \quad (G)$$

O valor P_1 de P para o qual se dá o escoamento do material no trecho BC, e o conseqüente colapso da estrutura, é dado por:

$$\sigma_{BC} = \sigma_0 \Rightarrow P = P_1 = 2\sigma_0 S = \frac{4}{3}P_0 \quad (H)$$

Para $P \leq P_0$, o deslocamento do ponto C é dado, de acordo com as expressões (B), por:

$$u_C = \frac{2 Pa}{3 ES} \quad (I)$$

Para $P_0 \leq P \leq P_1$, o deslocamento do ponto C deve ser calculado exclusivamente pelo encurtamento do trecho BC, visto que só esse trecho se mantém em regime elástico, para o qual é válido a expressão $\Delta l = Nl/ES$. Assim:

$$u_C = \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{ES_{BC}} = \frac{(P - \sigma_0 S) 2a}{ES} = \frac{(P - 2/3 P_0) 2a}{ES} \quad (J)$$

Considerando as expressões (I) e (J), tem-se:

$$P = P_0 \Rightarrow u_C = u_{C0} = \frac{2 P_0 a}{3 ES} \quad (K')$$

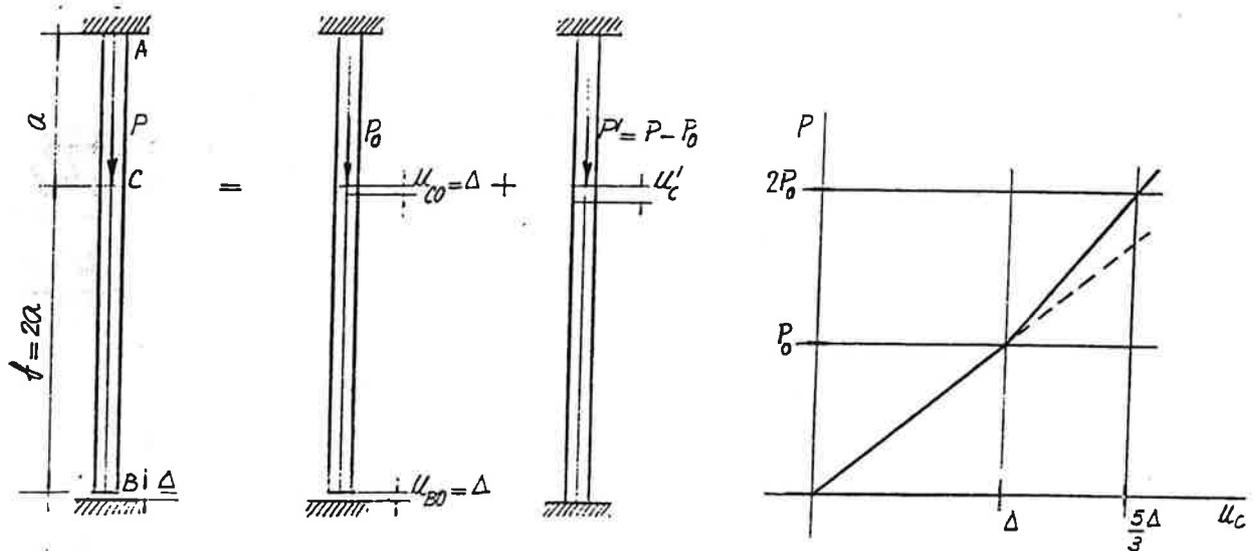
$$P = P_1 = \frac{4}{3} P_0 \Rightarrow u_C = u_{C1} = \frac{4 P_0 a}{3 ES} \quad (K'')$$

Os resultados anteriores permitem obter os diagramas que se mostram na fig.

O diagrama $P \times u_C$ permite concluir que, quando a estrutura deixa de ser hiperestática, há perda de rigidez, isto é, para $P_0 < P \leq P_1$, o deslocamento de um ponto qualquer (em particular o deslocamento do ponto C) é maior do que o correspondente ao comportamento hiperestático anterior.

EXEMPLO 3.

Dada a estrutura da fig., determinar o diagrama $P \times u_C$, onde u_C é o deslocamento longitudinal do ponto C.



Até que seja anulada a folga Δ , o deslocamento do ponto C, bem como de qualquer ponto do trecho BC, é igual ao alongamento do trecho AC, isto é,

$$u_C = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{ES_{AC}} = \frac{Pa}{ES} \quad (A)$$

O valor P_0 de P que anula a folga Δ é dado por:

$$u_B = u_C = \Delta \Rightarrow P_0 = \frac{ES}{a} \Delta \quad (B)$$

Para um valor de P superior a P_0 , pode-se decompor, como se mostra na fig., a força P nas parcelas P_0 e $P_1 = P - P_0$. À parcela P_0 corresponde o deslocamento u_{C0} , dado por:

$$u_{C0} = \Delta = \frac{P_0 a}{ES} \quad (C)$$

enquanto à parcela P_1 que solicita, agora, uma estrutura hiperestática (já analisada no exemplo 1) corresponde o deslocamento u_{C1} , dado por:

$$u_{C1} = \frac{2 P_1 a}{3 ES} = \frac{2 (P - P_0) a}{3 ES} \quad (D)$$

de modo que o deslocamento total u_C é dado por:

$$u_C = u_{C0} + u_{C1} = \frac{1 P_0 a}{3 ES} + \frac{2 Pa}{3 ES} \quad (E)$$

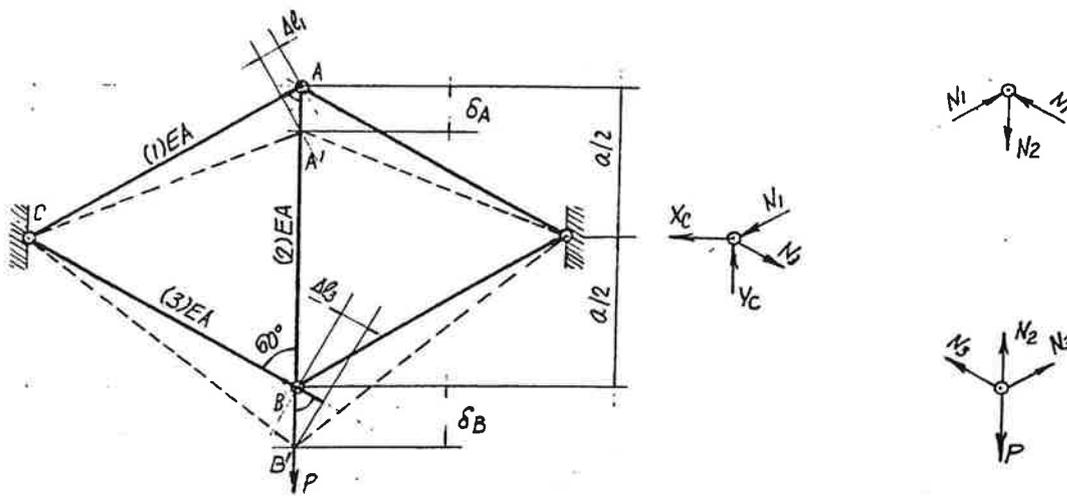
As expressões (A) e (E) permitem obter o diagrama $P \times u_C$ que se mostra na fig., do qual se pode concluir que quando a estrutura passa a ser hiperestática há ganho de

rigidez, isto é, para $P > P_0$, o deslocamento de um ponto qualquer da estrutura (em particular o deslocamento do ponto C) é menor do que o correspondente ao comportamento isostático anterior.

2. TRELIÇAS HIPERESTÁTICAS.

EXEMPLO 1.

Determinar as forças normais N_1, N_2 e N_3 , e os deslocamentos v_A e v_B na estrutura da fig.



O número de incógnitas n_I do problema é dado por:

$$n_I = n_B + n_R = 5 + 4 = 9$$

onde n_B é o número de barras, ou seja, o número de forças normais, e n_R é o número de reações de apoio.

O número de equações de equilíbrio n_E é dado por:

$$n_E = 2n_N = 2 \times 4 = 8$$

onde n_N é o número de nós, para os quais se pode escrever duas equações de equilíbrio.

A configuração deformada - caracterizada, em consequência da simetria da estrutura e do carregamento, pelo deslocamento vertical v_A do ponto A e pelo deslocamento vertical v_B do ponto B - sugere que a força normal N_1 é de compressão e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

As únicas equações de equilíbrio úteis, por enquanto, são as relativas ao equilíbrio dos nós A e B segundo a direção vertical, já que as referentes ao equilíbrio segundo a direção horizontal são automaticamente satisfeitas em vista da simetria da estrutura e do carregamento, e as referentes ao equilíbrio do nó C permitem determinar as reações X_C e Y_C , a partir das forças normais N_1 e N_3 . Assim, tem-se:

$$\text{nó A } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2N_1 \cos 60^\circ = N_2 \Rightarrow N_1 = N_2 \quad (\text{A}')$$

$$\text{nó B } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 + 2N_3 \cos 60^\circ = P \Rightarrow N_2 + N_3 = P \quad (\text{A}'')$$

O encurtamento Δl_1 correspondente à força normal de compressão N_1 , o alongamento Δl_2 correspondente à força normal de tração N_2 , e o alongamento Δl_3 correspondente à força normal de tração N_3 são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1 a}{ES} \quad (\text{B}')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2 a}{ES} \quad (\text{B}'')$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{N_3 a}{ES} \quad (\text{B}''')$$

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 com os deslocamentos v_A e v_B , da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = v_A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} v_A \quad (\text{C}')$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \quad (\text{C}'')$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2} v_B \quad (\text{C}''')$$

As expressões (C) permitem escrever:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_3 - 2\Delta l_1 \Rightarrow 2\Delta l_1 + \Delta l_2 - 2\Delta l_3 = 0 \quad (\text{D})$$

A equação acima - denominada *equação de compatibilidade* - estabelece a relação entre $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 de modo que seja possível a configuração deformada adotada.

Considerando na equação de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$2N_1 + N_2 - 2N_3 = 0 \quad (\text{E})$$

Com as equações de equilíbrio (A) e a equação de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{2}{5}P \quad N_2 = \frac{2}{5}P \quad N_3 = \frac{3}{5}P \quad (\text{F})$$

Os valores positivos de N_1, N_2 e N_3 indicam que, efetivamente, a força normal N_1 é de compressão, e que as forças N_2 e N_3 são de tração.

Considerando os valores de N_1, N_2 e N_3 nas expressões (B), obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{2 \text{ Pa}}{5 ES} \quad \Delta l_2 = \frac{2 \text{ Pa}}{5 ES} \quad \Delta l_3 = \frac{3 \text{ Pa}}{5 ES} \quad (\text{G})$$

Os valores positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 indicam que, efetivamente, Δl_1 é encurtamento, e que Δl_2 e Δl_3 são alongamentos.

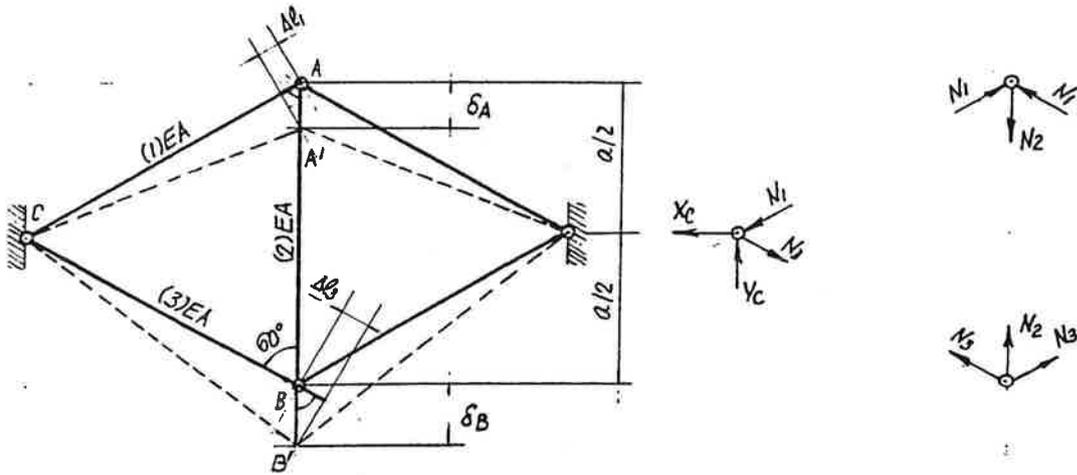
Considerando os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 nas expressões (C), obtém-se:

$$v_A = \frac{4 Pa}{5 ES} \quad v_B = \frac{6 Pa}{5 ES} \quad (H)$$

Os valores positivos de v_A e v_B indicam que, efetivamente, os pontos A e B deslocam-se para baixo.

EXEMPLO 2.

Determinar as forças normais N_1, N_2 e N_3 , e os deslocamentos v_A e v_B , decorrentes do aquecimento Δt^* da estrutura do exemplo 1.



Pode-se adotar a configuração deformada do exemplo 1, embora seja claro que o deslocamento vertical do ponto A é para cima.

As equações de equilíbrio (A) passam a ser :

$$N_1 = N_2 \quad (A')$$

$$N_2 + N_3 = 0 \quad (A'')$$

As expressões (B) passam a se escritas da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} - \alpha \Delta t_1 l_1 = \frac{N_1 a}{ES} - \alpha \Delta t^* a \quad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} + \alpha \Delta t_2 l_2 = \frac{N_2 a}{ES} + \alpha \Delta t^* a \quad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} + \alpha \Delta t_3 l_3 = \frac{N_3 a}{ES} + \alpha \Delta t^* a \quad (B''')$$

que devem ser lidas da seguinte maneira: o encurtamento Δl_1 corresponde ao efeito da força normal de compressão N_1 , minorado pelo efeito do aquecimento Δt^* ; o alongamento Δl_2 corresponde ao efeito da força normal de tração N_2 , majorado pelo efeito do

aquecimento Δt^* ; o alongamento Δl_3 corresponde ao efeito da força normal de tração N_3 , majorado pelo efeito do aquecimento Δt^* .

As expressões (C) permanecem validas, isto é:

$$\Delta l_1 = v_A \cos 60^\circ = \frac{1}{2} v_A \quad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \quad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2} v_B \quad (C''')$$

O mesmo acontece com a equação de compatibilidade:

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_3 - 2\Delta l_1 \Rightarrow 2\Delta l_1 + \Delta l_2 - 2\Delta l_3 = 0 \quad (D)$$

Considerando na equação de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$2N_1 + N_2 - 2N_3 = 3ES\alpha\Delta t^* \quad (E)$$

Com as equações de equilíbrio (A) e a equação de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{3}{5} ES\alpha\Delta t^* \quad N_2 = \frac{3}{5} ES\alpha\Delta t^* \quad N_3 = -\frac{3}{5} ES\alpha\Delta t^* \quad (F)$$

Os sinais positivos de N_1 e N_2 indicam que as forças normais N_1 e N_2 são, como se supôs, de compressão e de tração, respectivamente; o sinal negativo de N_3 indica que a força normal N_3 , que se supôs ser de tração, é, na verdade, de compressão.

Considerando os valores de N_1, N_2 e N_3 nas expressões (B), obtém-se:

$$\Delta l_1 = -\frac{2}{5} \alpha\Delta t^* a \quad \Delta l_2 = \frac{8}{5} \alpha\Delta t^* a \quad \Delta l_3 = \frac{2}{5} \alpha\Delta t^* a \quad (G)$$

O sinal negativo de Δl_1 indica que Δl_1 , que se supôs ser encurtamento, é, na verdade, alongamento; os sinais positivos de Δl_2 e Δl_3 indicam que Δl_2 e Δl_3 são, como se supôs, alongamentos.

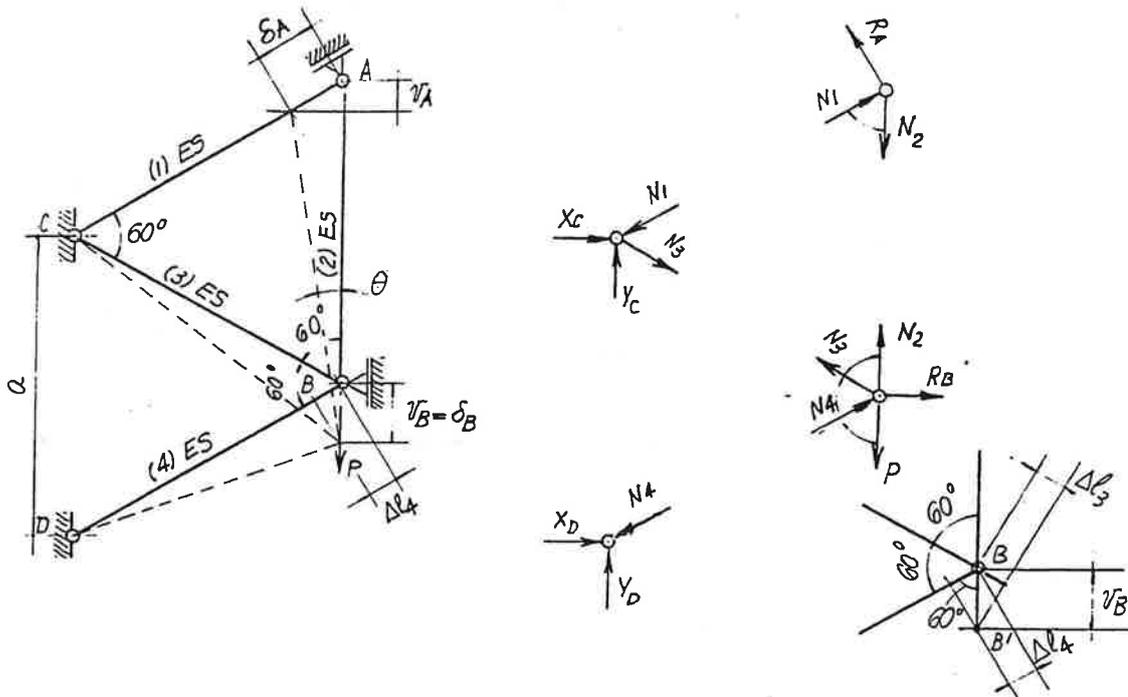
Considerando os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 nas expressões (C), obtém-se:

$$v_A = -\frac{4}{5} \alpha\Delta t^* a \quad v_B = \frac{4}{5} \alpha\Delta t^* a \quad (H)$$

O sinal negativo de v_A indica que o ponto A, contrariamente ao que se supôs, sobe; o sinal positivo de v_B indica que o ponto B, como se supôs, desce.

EXEMPLO 3.

Determinar as forças normais N_1, N_2, N_3 e N_4 e os deslocamentos v_A e v_B na treliça da fig.



Como se viu no exemplo 1, o número de incógnitas n_i é dado por:

$$n_i = n_B + n_R = 4 + 6 = 10$$

enquanto o número de equações de equilíbrio n_E é dado por:

$$n_E = 2n_N = 2 \times 4 = 8$$

A configuração deformada - caracterizada pelo deslocamento $\delta_A = v_A / \cos 60^\circ$ do ponto A e pelo deslocamento $\delta_B = v_B$ do ponto B - sugere que as forças normais N_1 e N_4 são de compressão e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

As únicas equações de equilíbrio úteis, por enquanto, são as referentes ao equilíbrio do nó A segundo a direção da barra 1 e do nó B segundo a direção vertical; as demais permitem determinar as reações de apoio a partir das forças normais N_1, N_2, N_3 e N_4 . Assim, tem-se:

$$\text{nó A: } N_1 = N_2 \cos 60^\circ \Rightarrow 2N_1 = N_2 \quad (A')$$

$$\text{nó B: } N_2 + N_3 \cos 60^\circ + N_4 \cos 60^\circ = P \Rightarrow$$

$$2N_2 + N_3 + N_4 = 2P \quad (A'')$$

Os encurtamentos Δl_1 e Δl_4 correspondentes às forças normais de compressão N_1 e N_4 , bem como os alongamentos Δl_2 e Δl_3 correspondentes às forças normais de tração N_2 e N_3 são dadas por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1 a}{ES} \quad \Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{ES_4} = \frac{N_4 a}{ES} \quad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2 a}{ES} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \frac{N_3 a}{ES} \quad (B'')$$

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 com os deslocamentos $v_A = \delta_A \cos 60^\circ$ e v_B , da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = \delta_A = v_A / \cos 60^\circ \quad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B - v_A \quad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_B \cos 60^\circ \quad (C''')$$

$$\Delta l_4 = v_B \cos 60^\circ \quad (C''''')$$

A expressão (C''') é obtida, considerando que o ângulo θ é muito pequeno, da seguinte maneira:

$$AB + v_B = A'B' \cos \theta + v_A \Rightarrow$$

$$l_2 + v_B = (l_2 + \Delta l_2) \cos \theta + v_A = l_2 + \Delta l_2 + v_A$$

As expressões (C) permitem obter as seguintes equações de compatibilidade:

$$\Delta l_1 + 2\Delta l_2 - 4\Delta l_3 = 0 \quad (D')$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_4 \quad (D'')$$

Considerando nas equações de compatibilidade (D) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$N_1 + 2N_2 - 4N_3 = 0 \quad (E')$$

$$N_3 = N_4 \quad (E'')$$

Com as equações de equilíbrio (A) e as equações de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{4}{13}P \quad N_2 = \frac{8}{13}P \quad N_3 = \frac{5}{13}P \quad N_4 = \frac{5}{13}P \quad (F)$$

Os sinais positivos de N_1, N_2, N_3 e N_4 indicam que as forças normais N_1 e N_4 são, como se supôs, de compressão, e que as forças normais N_2 e N_3 são de tração.

Considerando-se nas expressões (B) os valores de N_1, N_2, N_3 e N_4 , obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{4}{13} \frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_2 = \frac{8}{13} \frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_3 = \frac{5}{13} \frac{Pa}{ES} \quad \Delta l_4 = \frac{5}{13} \frac{Pa}{ES} \quad (G)$$

Os sinais positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 indicam que Δl_1 e Δl_4 são, como se supôs, encurtamentos, e que Δl_2 e Δl_3 são alongamentos.

Considerando nas expressões (C) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ e Δl_4 , obtém-se:

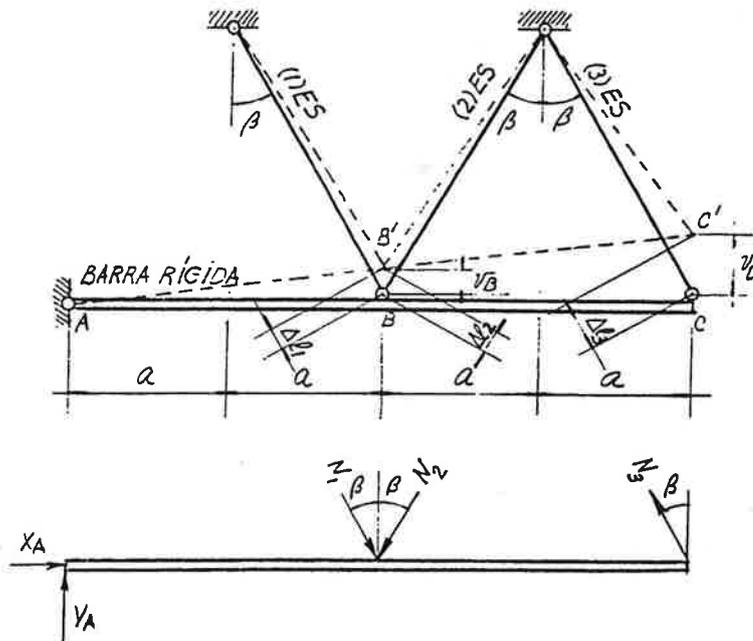
$$v_A = \frac{8}{13} \frac{Pa}{ES} \quad v_B = \frac{10}{13} \frac{Pa}{ES} \quad (H)$$

Os valores positivos de v_A e v_B indicam que a configuração deformada adotada é correta.

3. ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS COM BARRA RÍGIDA.

EXEMPLO.

Determinar as forças normais N_1, N_2 e N_3 , e os deslocamentos v_B e v_C , decorrentes do esfriamento Δt^* da barra 3 da estrutura da fig.



Considerando o equilíbrio da barra rígida, o número de incógnitas é dado por:

$$n_i = n_B + n_R = 3 + 2 = 5$$

onde n_B é o número de barras ligadas à barra rígida e n_R é o número de reações de apoio.

O número de equações de equilíbrio é dados por:

$$n_e = 3$$

a saber: duas equações de equilíbrio de forças (as quais permitem determinar as reações de apoio a partir das forças normais N_1, N_2 , e N_3) e a equação de equilíbrio de momentos:

$$\begin{aligned} (\Sigma M)_A = 0 &\Rightarrow N_1 2a \cos \beta + N_2 2a \cos \beta = N_3 4a \cos \beta \\ &\Rightarrow N_1 + N_2 = 2N_3 \end{aligned} \quad (A)$$

A configuração deformada, caracterizada pela rotação θ , sugere que as forças normais N_1 e N_2 são de compressão e que a força normal N_3 - que representa a ação do

restante da estrutura sobre a barra 3 no sentido de impedir o encurtamento devido ao esfriamento Δt^* - é de tração.

Os encurtamentos $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 são dados por:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1}{ES} \frac{a}{\sin \beta} \quad (B')$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2}{ES} \frac{a}{\sin \beta} \quad (B'')$$

$$\Delta l_3 = \alpha \Delta t_3 l_3 - \frac{N_3 l_3}{ES_3} = \alpha \Delta t^* \frac{a}{\sin \beta} - \frac{N_3}{ES} \frac{a}{\sin \beta} \quad (B''')$$

A expressão (B''') mostra claramente que o encurtamento Δl_3 é igual ao encurtamento que a barra 3 apresentaria se não estivesse ligada ao resto da estrutura minorado pelo alongamento devido à força normal de tração N_3 .

A partir da configuração deformada, pode-se relacionar $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 com os deslocamentos v_B e v_C , e estes com a rotação θ , da seguinte maneira:

$$\Delta l_1 = v_B \cos \beta = 2a\theta \cos \beta \quad (C')$$

$$\Delta l_2 = v_B \cos \beta = 2a\theta \cos \beta \quad (C'')$$

$$\Delta l_3 = v_C \cos \beta = 4a\theta \cos \beta \quad (C''')$$

As expressões (C) permitem obter as seguintes equações de compatibilidade:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \quad (D')$$

$$\Delta l_3 = 2\Delta l_1 \quad (D'')$$

Considerando nas equações de compatibilidade os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 dados pelas expressões (B), obtém-se:

$$N_2 = N_1 \quad (E')$$

$$N_3 = ES\alpha\Delta t^* - 2N_1 \quad (E'')$$

Com as equações de equilíbrio (A) e as equações de compatibilidade (E), obtém-se:

$$N_1 = \frac{1}{3} ES\alpha\Delta t^* \quad N_2 = \frac{1}{3} ES\alpha\Delta t^* \quad N_3 = \frac{1}{3} ES\alpha\Delta t^* \quad (F)$$

Os sinais positivos de N_1, N_2 e N_3 indicam que as forças normais N_1 e N_2 são, como se supôs, de compressão, e que a força normal N_3 é de tração.

Considerando-se nas expressões (B) os valores de N_1, N_2 e N_3 , obtém-se:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{3} \frac{\alpha a \Delta t^*}{\sin \alpha} \quad \Delta l_2 = \frac{1}{3} \frac{\alpha a \Delta t^*}{\sin \alpha} \quad \Delta l_3 = \frac{2}{3} \frac{\alpha a \Delta t^*}{\sin \alpha} \quad (G)$$

Os sinais positivos de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 indicam que $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 são, como se supôs, encurtamentos.

Considerando nas expressões (C) os valores de $\Delta l_1, \Delta l_2$ e Δl_3 , obtém-se:

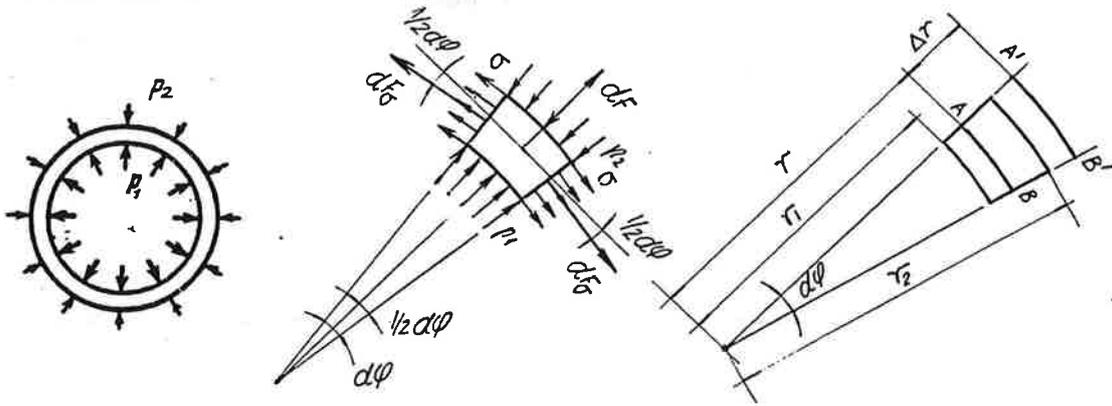
$$v_B = \frac{1}{3} \frac{\alpha a \Delta t^*}{\sin \beta \cos \beta} \quad v_C = \frac{2}{3} \frac{\alpha a \Delta t^*}{\sin \beta \cos \beta} \quad (H)$$

Os valores positivos de v_B e v_C indicam que a configuração deformada adotada é correta.

TUBO DE PAREDE FINA.

Em um tubo de parede fina, como o que se mostra na fig., de raio interno r_1 e raio externo r_2 , submetido a pressão interna p_1 e a pressão externa p_2 , a tensão normal σ pode ser considerada constante ao longo da espessura $\delta = r_2 - r_1$.

Considere-se o elemento, que se extrai de um segmento de dimensão dx , limitado pelo ângulo $d\theta$.



A resultante dF_r das pressões p_1 e p_2 e a resultante dF_θ das tensões normais σ são dadas por:

$$dF_r = p_1 r_1 d\theta dx - p_2 r_2 d\theta dx = (p_1 r_1 - p_2 r_2) d\theta dx \quad (1')$$

$$dF_\theta = \sigma \delta dx \quad (1'')$$

de modo que se pode escrever a seguinte equação de equilíbrio segundo a direção radial:

$$dF_r = 2 dF_\theta \sin\left(\frac{1}{2} d\theta\right) = 2 dF_\theta \left(\frac{1}{2} d\theta\right) = dF_\theta d\theta \quad (2)$$

ou seja:

$$\sigma = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{\delta} \quad (3)$$

Sendo r_0 o raio médio, é lícito considerar $r_1 \approx r_2 \approx r_0$, de modo que:

$$\sigma = \frac{(p_1 - p_2) r_0}{\delta} \quad (4)$$

Aplicado o carregamento, os pontos A e B, caracterizados pela coordenada r , têm deslocamento radial $u = \Delta r$

A deformação do segmento AB é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (5)$$

onde:

$$AB = r d\theta \quad A'B' = (r + u) d\theta = (r + \Delta r) d\theta \quad (6)$$

de modo que:

$$\varepsilon = \frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r} \quad (7)$$

Considerando a relação entre tensões e deformações expressa pela lei de Hooke, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{E \delta} \quad (8)$$

Considerando as expressões (7) e (8), obtém-se:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{E \delta} \quad (9)$$

No caso de variação de temperatura Δt , sendo α o coeficiente de dilatação linear do material, tem-se:

$$AB = r d\varphi \quad A'B' = r d\varphi + \alpha \Delta t r d\varphi \quad (10)$$

de modo que, segundo a expressão (5),

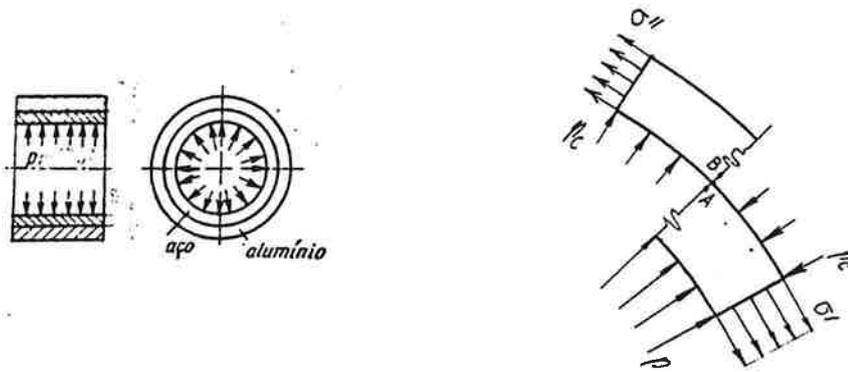
$$\varepsilon = \alpha \Delta t \quad (11)$$

Considerando as expressões (7) e (11), obtém-se:

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha \Delta t \quad (12)$$

EXEMPLO 1.

Determinar as tensões normais no tubo interno e no tubo externo da fig., decorrentes da aplicação da pressão p .



As tensões normais no tubo interno e no tubo externo, são dadas por:

$$\sigma' = \frac{p_1 r_1' - p_2 r_2'}{\delta'} = \frac{p r_1' - p_c r_2'}{\delta'} \quad (A')$$

$$\sigma'' = \frac{p_1 r_1'' - p_2 r_2''}{\delta''} = \frac{p_c r_1''}{\delta''} \quad (A'')$$

enquanto as variações radiais são dadas por:

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \frac{\sigma'}{E'} = \frac{p r_1' - p_c r_2'}{E' \delta'} \quad r_1' \leq r' \leq r_2' \quad (B')$$

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \frac{\sigma''}{E''} = \frac{p_c r_1''}{E'' \delta''} \quad r_1'' \leq r'' \leq r_2'' \quad (B'')$$

Considerando que o deslocamento radial do ponto A - numericamente igual à variação do raio externo do tubo interno - deve ser igual ao deslocamento radial do ponto B - numericamente igual à variação do raio interno do tubo externo -, obtém-se:

$$\Delta r_2' = \Delta r_1'' \Rightarrow \frac{\sigma'}{E'} r_2' = \frac{\sigma''}{E''} r_1'' \quad (C)$$

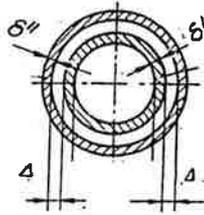
Dado que $r_2' = r_1''$, resulta:

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{\sigma''}{E''} \Rightarrow \frac{p r_1' - p_c r_2'}{E' \delta'} = \frac{p_c r_1''}{E'' \delta''} \Rightarrow p_c = \frac{r_1'}{r_2'} \frac{p}{1 + \frac{E' \delta'}{E'' \delta''}} \quad (D)$$

Retornando às expressões (A), obtêm-se as tensões normais σ' e σ'' :

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões normais no tubo interno e no tubo externo da fig., decorrentes do esfriamento Δt^* no tubo externo.



Até que seja anulada a folga Δ , tem-se:

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \alpha'' \Delta t'' \quad r_1'' \leq r'' \leq r_2'' \quad (A)$$

O valor Δt_0 de Δt^* que anula a folga Δ é dado por:

$$\Delta r_1'' = \Delta \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{1}{\alpha''} \frac{\Delta}{r_1''} \quad (B)$$

Em decorrência do esfriamento adicional $\Delta t_1 = \Delta t^* - \Delta t_0$, há interação entre os tubos, de modo que as tensões normais no tubo interno e no externo, são dadas por:

$$\sigma' = \frac{p_1 r_1' - p_2 r_2'}{\delta'} = -\frac{p_c r_2'}{\delta'} \quad (C')$$

$$\sigma'' = \frac{p_1 r_1'' - p_2 r_2''}{\delta''} = \frac{p_c r_1''}{\delta''} \quad (C'')$$

enquanto as variações radiais são dadas por:

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \frac{\sigma'}{E'} = -\frac{p_c r_2'}{E' \delta'} \quad r_1' \leq r' \leq r_2' \quad (D')$$

$$\frac{\Delta r''}{r''} = \frac{\sigma''}{E''} - \alpha'' \Delta t_1 = \frac{p_c r_1''}{E'' \delta''} - \alpha'' \Delta t_1 \quad r_1'' \leq r'' \leq r_2'' \quad (D'')$$

Mais uma vez, igualando a variação do raio externo do tubo interno à variação do raio interno do tubo externo obtém-se:

$$\Delta r_2' = \Delta r_1'' \Rightarrow \frac{\sigma'}{E'} r_2' = \frac{\sigma''}{E''} r_1'' \quad (E)$$

Dado que $r_2' = r_1''$, resulta:

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{\sigma''}{E''} \Rightarrow -\frac{p_c r_2'}{E' \delta'} = \frac{p_c r_1''}{E'' \delta''} - \alpha'' \Delta t_1 \Rightarrow p_c = \frac{\alpha'' \Delta t_1}{\frac{r_2'}{E' \delta'} + \frac{r_1''}{E'' \delta''}} \quad (F)$$

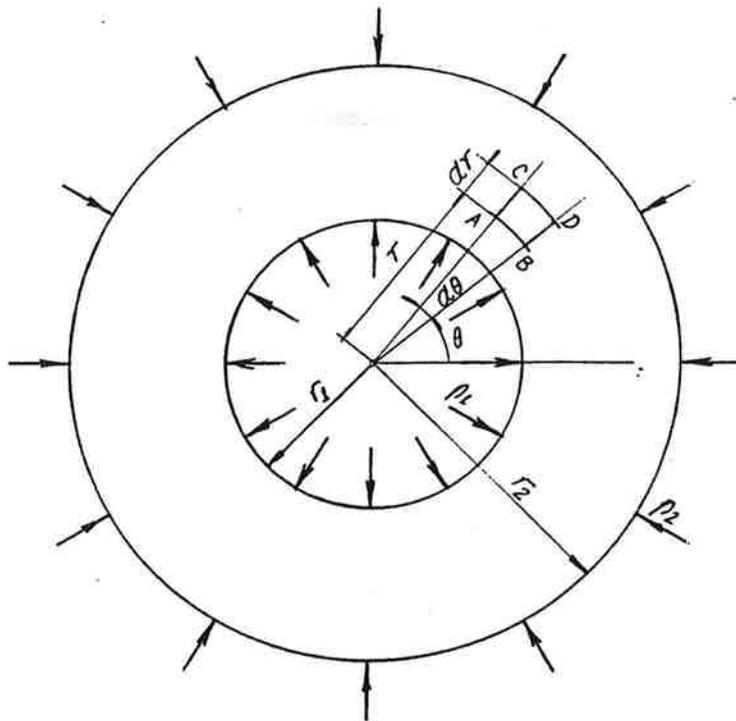
Retornando às expressões (A), obtém-se as tensões normais σ' e σ'' .

TUBO DE PAREDE ESPESSA.

A análise de estruturas que não pertencem à categoria das barras é feita pela teoria da elasticidade.

O problema do tubo de parede espessa permite ilustrar o procedimento normalmente utilizado (semelhante em linhas gerais ao utilizado na solução de treliças hiperestáticas), que consiste basicamente na solução de equações diferenciais de equilíbrio e equações diferenciais de compatibilidade

Em um tubo de parede espessa, como o que se mostra na fig., de raio interno r_1 e raio externo r_2 , submetido a pressão interna p_1 e pressão externa p_2 , as tensões normais σ_r e σ_θ variam ao longo da espessura $\delta = r_2 - r_1$.



Considere-se o elemento ABCD, que se extrai de um segmento de dimensão dx , limitado pelos raios r e $r + dr$ bem como pelo ângulo $d\theta$.

Na face AB, caracterizada pela coordenada r , tem-se tensão normal σ_r , enquanto na face CD, caracterizada pela coordenada $r + dr$, tem-se tensão normal $\sigma_r + d\sigma_r$; nas faces AC e BD tem-se, em decorrência da simetria axial, a mesma tensão normal σ_θ .

As resultantes dF_r e dF_θ das tensões normais σ_r e σ_θ são dadas por:

$$dF_r = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dx - \sigma_r r d\theta dx = (\sigma_r dr + d\sigma_r r)d\theta dx \quad (1')$$

$$dF_\theta = \sigma_\theta dr dx \quad (1'')$$

de modo que se pode escrever a seguinte *equação de equilíbrio* segundo a direção radial:

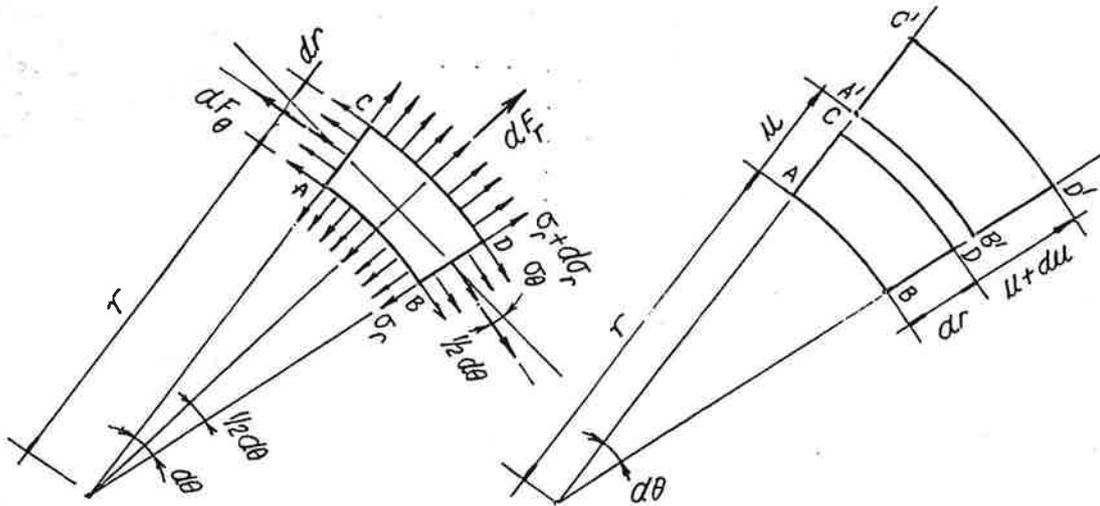
$$dF_r = 2 dF_\theta \sin\left(\frac{1}{2}d\theta\right) = 2 dF_\theta \left(\frac{1}{2}d\theta\right) = dF_\theta d\theta \quad (2)$$

ou, em vista das expressões (1),

$$\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta \quad (3)$$

onde as condições de contorno são dadas por:

$$\sigma_r(r_1) = -p_1 \quad \sigma_r(r_2) = -p_2 \quad (4)$$



Trata-se de uma estrutura internamente hiperestática, uma vez que se tem duas incógnitas (σ_r e σ_θ) e uma única equação de equilíbrio.

Aplicado o carregamento, os pontos A e B, caracterizados pela coordenada r , têm deslocamento radial u , enquanto os pontos C e D, caracterizados pela coordenada $r + dr$, têm deslocamento radial $u + du$.

A deformação radial ε_r é dada por:

$$\varepsilon_r = \frac{A'C' - AC}{AC} \quad (5)$$

onde:

$$AC = dr \quad A'C' = AC + CC' - AA' = dr + (u + du) - u = dr + du \quad (6)$$

de modo que:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (7)$$

A deformação tangencial ε_θ é dada por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (8)$$

onde:

$$AB = r d\theta \quad A'B' = (r + u) d\theta = (r + \Delta r) d\theta \quad (9)$$

de modo que:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{\Delta r}{r} \quad (10)$$

Considerando as expressões (7) e (10), pode-se escrever a seguinte *equação de compatibilidade*:

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r} \left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right] \Rightarrow \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \quad (11)$$

que expressa a relação entre as deformações ε_r e ε_θ , a fim de que a configuração deformada A'B'C'D' seja possível.

À tensão σ_r estão associadas as deformações ε_r' e ε_θ' , dadas por:

$$\varepsilon_r' = \frac{\sigma_r}{E} \quad \varepsilon_\theta' = -\nu \frac{\sigma_r}{E} \quad (12)$$

enquanto à tensão σ_θ estão associadas as deformações ε_r'' e ε_θ'' , dadas por:

$$\varepsilon_\theta'' = \frac{\sigma_\theta}{E} \quad \varepsilon_r'' = -\nu \frac{\sigma_\theta}{E} \quad (13)$$

de modo que são válidas as seguintes *relações entre tensões e deformações*:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + \varepsilon_r'' = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (14')$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta' + \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (14'')$$

Considerando na expressão (11) as expressões (14), pode-se escrever a seguinte equação de compatibilidade em termos de tensões:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (15)$$

Considerando a equação de equilíbrio e a equação de compatibilidade, dadas pelas expressões (3) e (15), bem como as condições de contorno, dadas pela expressão (4), obtêm-se as tensões normais σ_r e σ_θ , dadas por:

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \quad (16')$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p_1 - p_2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \quad (16'')$$

Retornando às expressões (14), obtêm-se as deformações ε_r e ε_θ , que, consideradas na expressão (7) ou na expressão (10), fornecem o deslocamento radial u .

Sendo r_0 o raio médio, tem-se:

$$r_1 = r_0 - \frac{1}{2} \delta \quad r_2 = r_0 + \frac{1}{2} \delta \quad (17')$$

$$r_2 + r_1 = 2r_0 \quad r_2 - r_1 = \delta \quad (17'')$$

de modo que o denominador das expressões (16) é dado por:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2r_0\delta \quad (18)$$

Em um tubo de parede fina, é lícito considerar $r_1 \approx r_2 \approx r_0$, de modo que, retornando às expressões (16), obtém-se:

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = \frac{(p_1 - p_2)r_0}{\delta} \quad (19)$$

como se viu no item precedente.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II.

TORÇÃO.

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

2000

TORÇÃO.

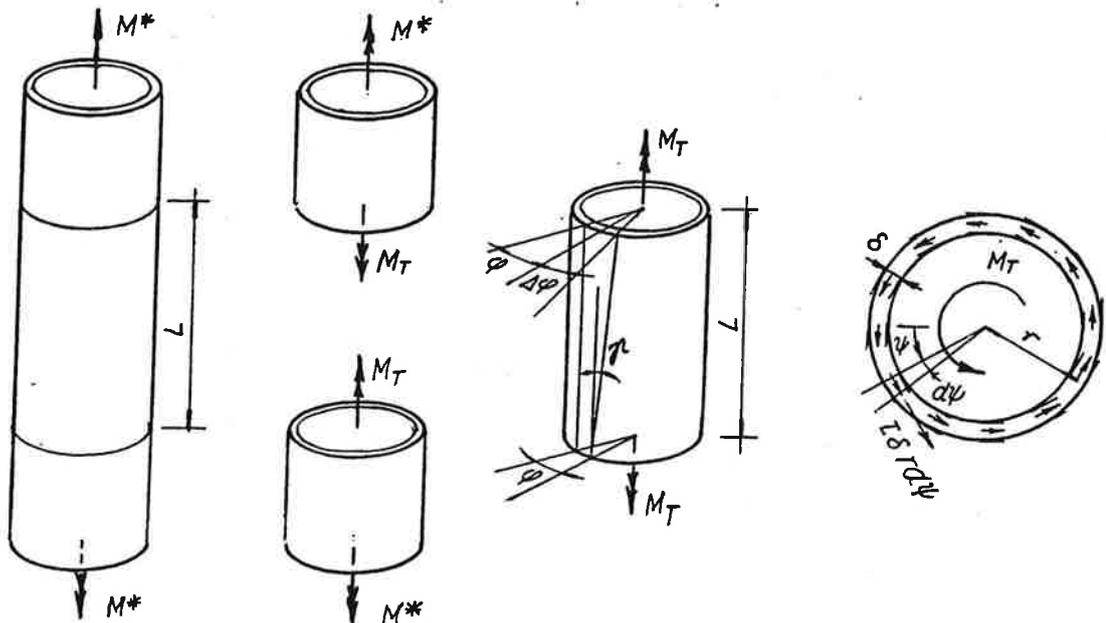
O ENSAIO DE TORÇÃO.

Quando se submete um tubo de parede fina, como o que se mostra na fig., a ensaio de torção, as seções transversais que limitam o segmento de dimensão L permanecem planas e giram uma em relação à outra de um ângulo $\Delta\varphi$, de modo que é possível definir a grandeza γ - denominada *distorção* - da seguinte maneira:

$$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{L} \quad (1)$$

O momento de torção, responsável pelo equilíbrio dos segmentos externos, é dado por:

$$M_T = M^* \quad (2)$$



As tensões tangenciais são consideradas constantes ao longo da espessura δ , por ser esta pequena em relação ao raio r .

Além disso, como se viu anteriormente, são válidas as seguintes propriedades, das quais a segunda é consequência da primeira.

P1. As tensões tangenciais em planos perpendiculares têm mesmo valor absoluto, direção perpendicular à intersecção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à intersecção dos planos.

P2. As tensões tangenciais são tangentes ao contorno da seção.

O momento de torção, resultante da distribuição de tensões tangenciais τ , é obtido da seguinte maneira:

$$dM_T = \tau dS r = \tau (\delta r d\psi) r \Rightarrow M_T = \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \tau \delta r^2 d\psi \quad (3)$$

Considerando a independência de τ em relação a ψ , decorrente da simetria axial, pode-se escrever:

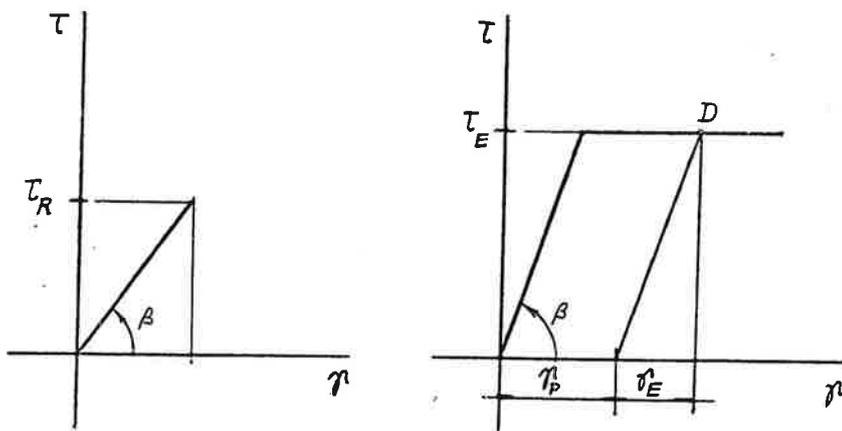
$$M_T = \tau \delta r^2 \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d\psi = 2\pi \tau \delta r^2 \quad (4)$$

de modo que:

$$\tau = \frac{M_T}{2\pi r^2 \delta} = \frac{M^*}{2\pi r^2 \delta} \quad (5)$$

Para cada valor de M^* , pode-se medir a distorção γ bem como determinar a tensão τ com a expressão anterior, e, assim, obter o diagrama $\tau \times \gamma$ para o material de que é composto o tubo.

Dois tipos de comportamento são apresentados na fig.



O comportamento *elasto-frágil* é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações, expressa da seguinte maneira:

$$\tau = \text{tg} \beta \gamma = G \gamma \quad (6)$$

onde G é o *módulo de distorção* do material.

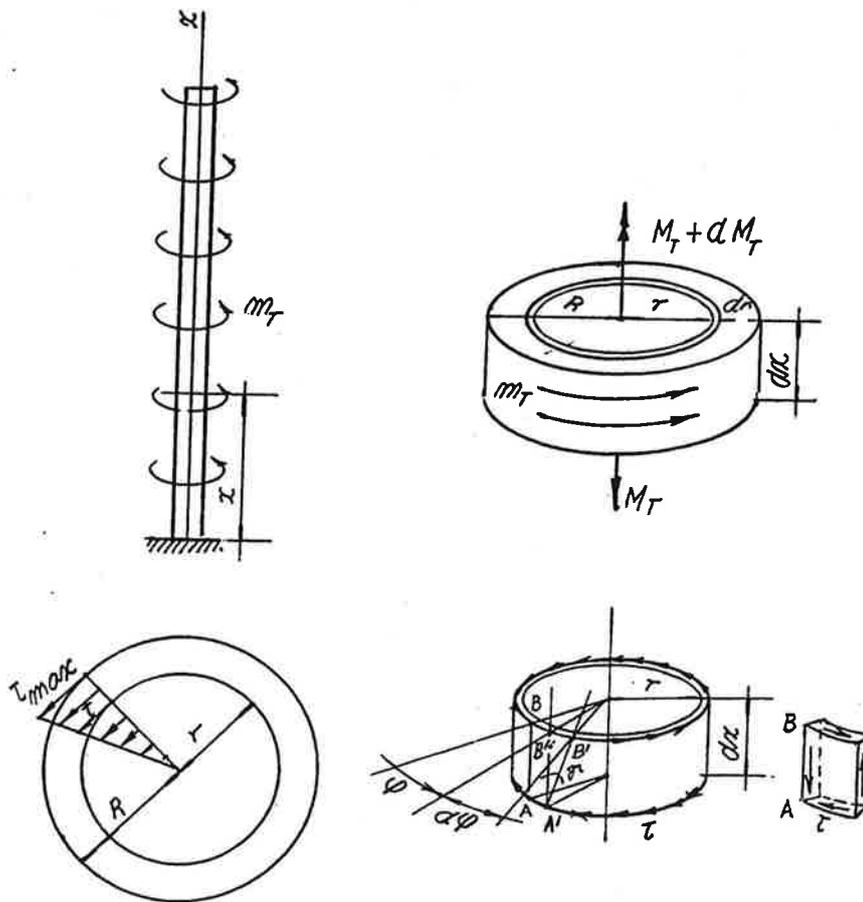
A expressão anterior é válida até que se atinja a tensão de ruptura τ_R .

O comportamento elasto-plástico é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações até que se atinja a *tensão de escoamento* τ_E . Atingido o valor τ_E , dá-se o escoamento do material, isto é, o aumento progressivo de deformação sob tensão constante, até que sobrevenha a ruptura. Se, atingido o ponto D, se procede ao descarrega-

mento, este se dá segundo uma reta paralela à reta correspondente ao carregamento, de modo que, quando $\tau = 0$, $\gamma = \gamma_p$. Assim, a deformação total γ pode ser considerada como a soma da deformação elástica γ_E (recuperável no descarregamento) e da deformação plástica γ_p (não recuperável no descarregamento).

TORÇÃO DE BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR OU EM COROA DE CÍRCULO.

Considere-se em uma barra de seção circular ou em coroa de círculo, como a que se mostra na fig., submetida a torção, um segmento de dimensão dx na *configuração indeformada* (anterior à introdução do carregamento externo) e na *configuração deformada* (posterior à introdução do carregamento externo).



Verifica-se que as seções transversais permanecem planas e realizam um movimento de corpo rígido caracterizado pela rotação $\varphi = \varphi(x)$ segundo o eixo x .

Na face caracterizada pela coordenada x , solicitada por momento de torção M_T , tem-se rotação φ , enquanto na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, solicitada por momento de torção $M_T + dM_T$, tem-se rotação $\varphi + d\varphi$.

Considere-se, em seguida, nesse segmento o elemento anular indicado na fig., de raio r e espessura dr .

O ponto A, em decorrência da rotação φ , passa a ocupar a posição A', enquanto o ponto B, em decorrência da rotação $\varphi + d\varphi$, passa a ocupar a posição B'.

A distorção γ é dada por:

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{B'B''}{AB} = \frac{(rd\varphi)}{dx} = r \frac{d\varphi}{dx} = r\theta \quad (1)$$

onde θ é a rotação por unidade de comprimento.

À distorção γ corresponde a tensão τ na face do elemento anular, dada por:

$$\tau = G\gamma = G\theta r \quad (2)$$

isto é, o elemento anular, solicitado pelo momento dM_T , dado, em decorrência da expressão (4) do item anterior, por:

$$dM_T = \tau 2\pi r^2 dr \quad (3)$$

apresenta a rotação γ .

Considerando a infinidade de elementos anulares de raio r e espessura dr , obtém-se:

$$M_T = \int_0^R \tau 2\pi r^2 dr = 2\pi G\theta \int_0^R r^3 dr = G\theta \left(\frac{1}{2}\pi R^4\right) \quad (4)$$

de modo que:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GI_T} \quad (5)$$

onde:

$$I_T = \frac{1}{2}\pi R^4 \quad (6)$$

é o momento de inércia à torção.

De acordo com a expressão (5), quanto maior a grandeza GI_T - denominada *rigidez à torção* - tanto menor a rotação por unidade de comprimento.

Substituindo na expressão (2) o valor de θ dado pela expressão (5), obtém-se:

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r \quad (7)$$

Nos pontos do contorno tem-se a máxima tensão tangencial, dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T} R = \frac{M_T}{W_T} \quad (8)$$

A grandeza W_T denomina-se *módulo de resistência à torção*.

Integrando a equação diferencial que aparece na expressão (5), obtém-se:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (9)$$

No caso de uma barra de seção constante submetida a momento de torção constante, tem-se:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_T x}{GI_T} \quad (10)$$

de modo que a rotação relativa entre duas seções que limitam um segmento de dimensão Δx é dada por:

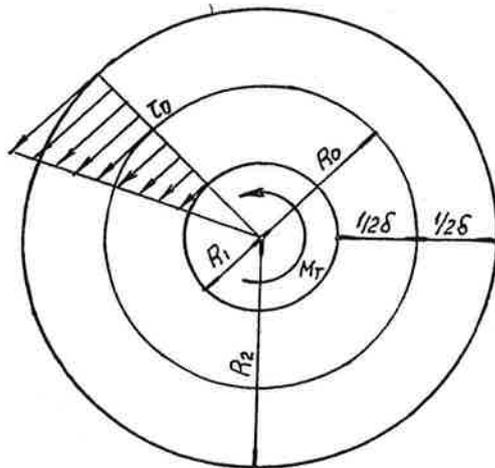
$$\Delta\varphi = \frac{M_T}{GI_T} \Delta x \quad (11)$$

No caso de seção em coroa de círculo, os limites de integração da expressão (4) são o raio interno R_1 , e o raio externo R_2 , de modo que o momento de inércia à torção é dado por:

$$I_T = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \quad (12)$$

ou, de acordo com a fig.,

$$I_T = \frac{1}{2} \pi [(R_0 + \frac{1}{2} \delta)^4 - (R_0 - \frac{1}{2} \delta)^4] \quad (13)$$



Quando a espessura δ é pequena em relação ao raio R_0 , obtém-se, mediante o desenvolvimento da expressão anterior em série:

$$I_T = I_T(\delta) \approx I_{T(\delta=0)} + \left(\frac{dI_T}{d\delta} \right)_{(\delta=0)} \delta = 2\pi R_0^3 \delta \quad (14)$$

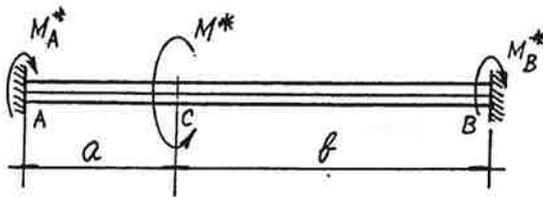
de modo que, considerando a expressão (7) calculada em $r = R_0$, obtém-se:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} R_0 = \frac{M_T}{2\pi R_0^2 \delta} \quad (15)$$

que é o resultado, obtido anteriormente, correspondente ao tubo de parede fina.

EXEMPLO.

Dada a estrutura da fig., determinar as reações de apoio M_A^* e M_B^* , bem como a rotação no ponto C.



ALTERNATIVA 1.

A única equação de equilíbrio de que se dispõe - equilíbrio de momentos segundo a direção x - fornece:

$$M_A^* + M_B^* = M^* \quad (A)$$

Para obter uma segunda relação entre M_A^* e M_B^* , considera-se a expressão que fornece a rotação em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x , dada por:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (0 \leq x \leq a) \quad (B')$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_T}{GI_T} dx = \varphi_0 + \int_0^a \frac{M_T}{GI_T} dx + \int_a^x \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (B'')$$

onde:

$$\varphi_0 = \varphi_A = 0 \quad (C')$$

$$M_T(x) = +M_A^* \quad GI_T = GI_{TAC} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (C'')$$

$$M_T(x) = -M_B^* \quad GI_T = GI_{TBC} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (C''')$$

de modo que:

$$\varphi(x) = \frac{M_A^* x}{GI_{TAC}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (D')$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A^* a}{GI_{TAC}} - \frac{M_B^* (x-a)}{GI_{TBC}} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (D'')$$

Uma vez que a rotação no ponto B é nula, resulta da expressão (D''):

$$M_B^* = \frac{GI_{TBC}}{b} \frac{a}{GI_{TAC}} M_A^* \quad (E)$$

As expressões (A) e (E) fornecem:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (F)$$

As grandezas $\frac{GI_{TAC}}{a}$ e $\frac{GI_{TBC}}{b}$ são os *coeficientes de rigidez à torção* dos trechos AC e BC.

Os resultados anteriores mostram, uma vez mais, que em uma estrutura hiperestática as reações de apoio e os esforços solicitantes dependem da rigidez relativa dos elementos que compõem a estrutura.

Considerando na expressão (D') o valor de M_A^* dado pela expressão (F), obtém-se:

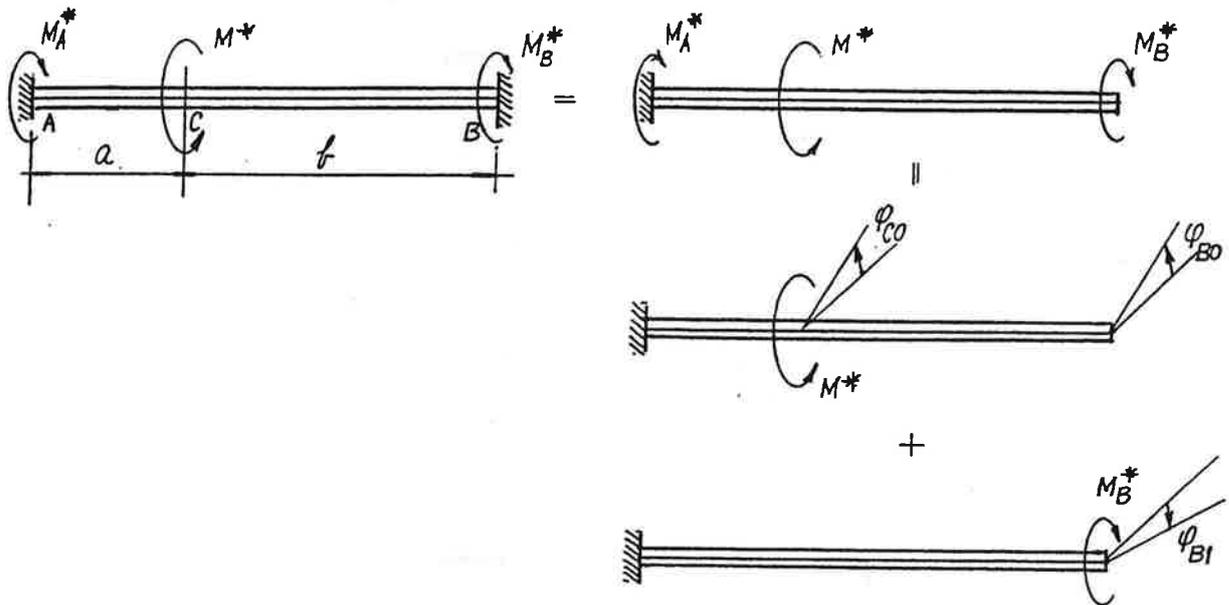
$$\varphi_C = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (G)$$

ALTERNATIVA 2.

O comportamento da estrutura hiperestática dada é idêntico ao comportamento da estrutura isostática que se mostra na fig. - denominada *estrutura isostática fundamental* - submetida ao carregamento externo (no caso, o momento M^*), bem como à reação de apoio (no caso o momento M_B^*) - denominada *incógnita hiperestática* -, por enquanto desconhecida.

Determinado o valor de M_B^* , a equação de equilíbrio de momentos segundo a direção x fornece:

$$M_A^* = M^* - M_B^* \quad (A)$$



Em consequência do princípio da superposição de efeitos, pode-se considerar isoladamente os efeitos do carregamento externo e da incógnita hiperestática.

A rotação φ_{B0} no ponto B devida ao momento M^* é igual, uma vez que o trecho BC está descarregado, à rotação φ_{C0} no ponto C, isto é:

$$\varphi_{B0} = \frac{M_{TAC}^0 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (B)$$

A rotação φ_{B1} no ponto B devida ao momento M_B^* é igual à rotação φ_{C1} no ponto C mais a rotação relativa das seções que limitam o trecho BC, isto é:

$$\varphi_{B1} = \frac{M_{TAC}^1 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} + \frac{M_{TBC}^1 \ell_{BC}}{GI_{TBC}} = \frac{M_B^* a}{GI_{TAC}} + \frac{M_B^* b}{GI_{TBC}} \quad (C)$$

Uma vez que a rotação no ponto B é nula, segue-se que a rotação φ_{B1} deve anular a rotação φ_{B0} , isto é:

$$\varphi_{B1} = \varphi_{B0} \Rightarrow M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (D)$$

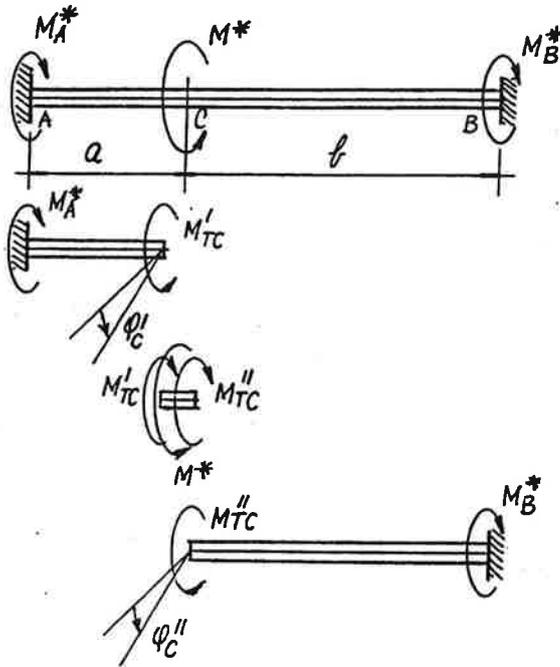
de modo que, retornando à expressão (A), obtém-se:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (E)$$

A rotação no ponto C é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_{C0} - \varphi_{C1} = \frac{M_{TAC}^0 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} - \frac{M_{TAC}^1 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M^* a}{GI_{TAC}} - \frac{M_B^* a}{GI_{TAC}} = \\ &= \frac{\frac{GI_{TAC}}{a} M^* a}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \end{aligned} \quad (F)$$

ALTERNATIVA 3.



Considerando o equilíbrio no ponto C, tem-se:

$$M_{TAC} + M_{TBC} = M^* \quad (A)$$

onde, em vista do equilíbrio das barras AC e BC, tem-se:

$$M_{TAC} = M_A^* \quad M_{TBC} = M_B^* \quad (B)$$

de modo que:

$$M_A^* + M_B^* = M^* \quad (C)$$

As rotações nos pontos C' e C'' são dadas por:

$$\varphi_{C'} = \frac{M_{TAC} \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M_A^* a}{GI_{TAC}} \quad \varphi_{C''} = \frac{M_{TBC} \ell_{BC}}{GI_{TBC}} = \frac{M_B^* b}{GI_{TBC}} \quad (D)$$

Uma vez que essas rotações são iguais, tem-se:

$$\varphi_C = \varphi_C \Rightarrow M_B^* = \frac{GI_{TBC}}{b} \frac{a}{GI_{TAC}} M_A^* \quad (E)$$

As expressões (C) e (E) fornecem:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (F)$$

Considerando nas expressões (D) os valores de M_A^* e M_B^* dados pelas expressões (F), obtém-se:

$$\varphi_C = \varphi_C = \varphi_C = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (G)$$

TORÇÃO UNIFORME DE BARRAS DE SEÇÃO GENÉRICA.

As seções de uma barra submetida à torção, salvo raras exceções (entre as quais a mais importante é a seção circular), deixam de ser planas, isto é, empenam. A intensidade do empenamento varia de seção para seção, a não ser que se tenha torção uniforme, a qual é caracterizada pela ocorrência simultânea das seguintes condições:

seção transversal constante,

momento de torção constante,

empenamento livre das seções transversais.

O empenamento variável provoca a interação longitudinal das seções transversais, representada por uma distribuição de tensões normais σ . Os esforços solicitantes relativos a essa distribuição de tensões normais, a saber:

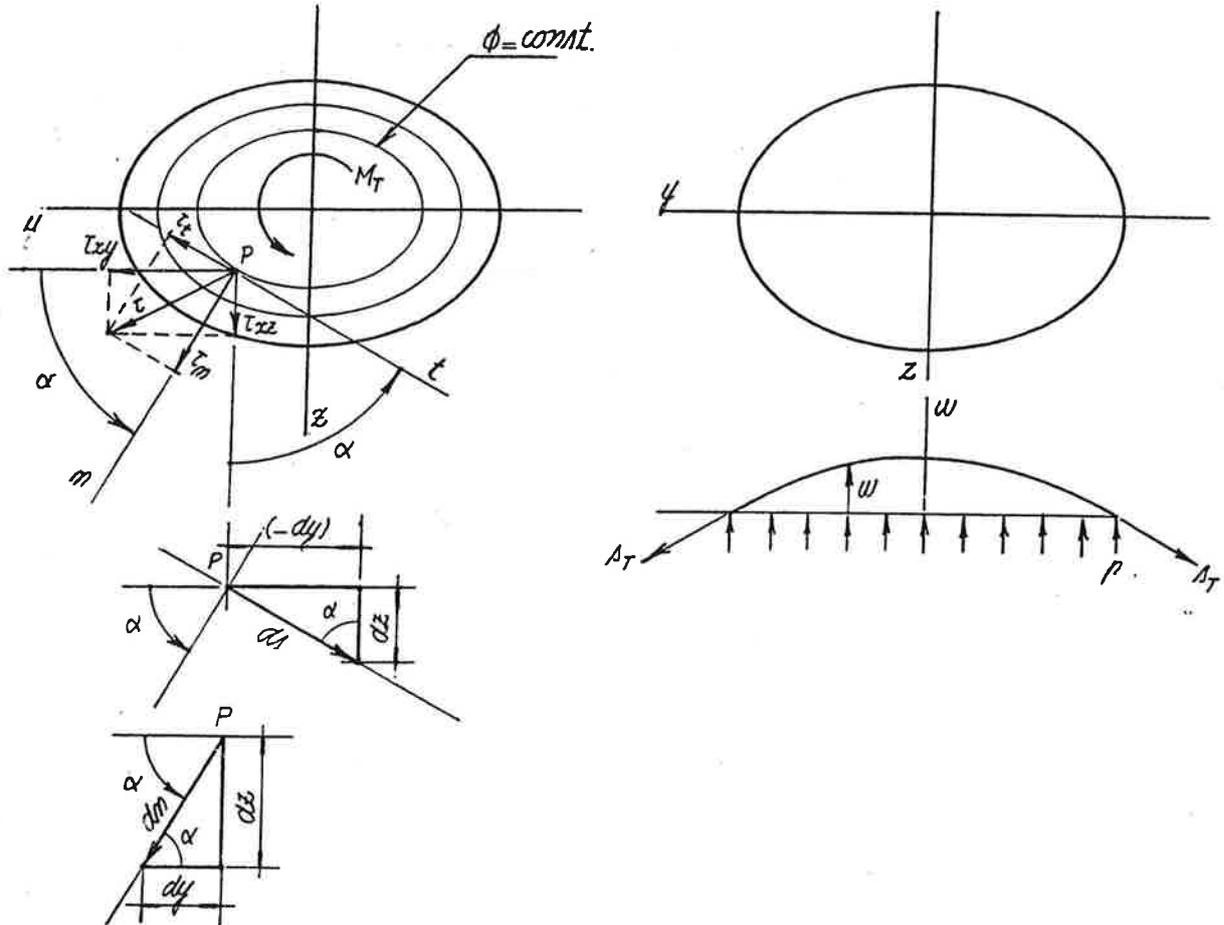
$$N = \int \sigma \, dS \quad M_y = \int \sigma z \, dS \quad M_z = - \int \sigma y \, dS$$

são nulos, uma vez que o único esforço solicitante é o momento de torção M_T .

A maioria dos resultados apresentados nos itens seguintes derivam da teoria da elasticidade e são válidos, a rigor, somente para o caso de torção uniforme.

ANALOGIA DA MEMBRANA.

As tensões tangenciais resultantes da torção uniforme de uma barra de seção constante são obtidas a partir da solução de uma equação diferencial análoga à que fornece os deslocamentos transversais w de uma membrana homogênea de contorno idêntico ao da seção transversal da barra, solicitada, como se mostra na fig., por tração uniforme s_T no contorno e por pressão transversal p .



O problema da torção uniforme de uma barra de seção constante é estudado pela teoria da elasticidade. As componentes τ_{xy} e τ_{xz} da tensão tangencial τ no ponto P de coordenadas (y,z) são dadas por:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1)$$

onde ϕ - denominada *função de Prandtl* - é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (2)$$

com $\phi = 0$ no contorno.

Em um ponto P, a componente τ_n segundo a direção normal à curva de nível $\phi = \text{constante}$ que passa por esse ponto é dada, de acordo com a fig., por:

$$\tau_n = \tau_{xy} \cos\alpha + \tau_{xz} \sin\alpha = \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\left[\frac{dz}{ds}\right] + \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\left[-\frac{dy}{ds}\right] = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (3')$$

enquanto a componente τ_t segundo a direção tangencial é dada por:

$$\tau_t = \tau_{xz} \cos\alpha - \tau_{xy} \sin\alpha = \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\left[\frac{dy}{dn}\right] - \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\left[\frac{dz}{dn}\right] = -\frac{d\phi}{dn} \quad (3'')$$

As expressões anteriores permitem concluir que a tensão tangencial τ em um ponto P é tangente a curva de nível $\phi = \text{constante}$ que passa por esse ponto e é dada por:

$$\tau = \tau_t = -\frac{d\phi}{dn} \quad (4)$$

O momento de torção é dado por:

$$dM_T = \tau_{xz} dS y - \tau_{xy} dS z \Rightarrow M_T = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS \quad (5)$$

Considerando as expressões (1), pode-se escrever:

$$M_T = \int \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} y - \frac{\partial\phi}{\partial z} z\right) dS \quad (6)$$

Integrando por partes, de acordo com as expressões (4) do apêndice 1, os termos da expressão acima e lembrando que $\phi = 0$ no contorno, obtém-se:

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial y} y dS = \oint \phi y n_y ds - \int \phi dS = -\int \phi dS \quad (7')$$

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial z} z dS = \oint \phi z n_z ds - \int \phi dS = -\int \phi dS \quad (7'')$$

de modo que:

$$M_T = 2 \int \phi dS \quad (8)$$

Por outro lado, considerando as expressões (2), pode-se escrever:

$$\int_{S^*} \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] dS = \int_{S^*} (-2G\theta) dS = -2G\theta S^* \quad (9)$$

onde S^* é a região delimitada pela curva de nível $\phi = \phi^*$.

Integrando por partes, de acordo com a expressão (1) do apêndice 1, obtém-se:

$$\int_{S^*} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} dS = \oint \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y ds \quad (10')$$

$$\int_S \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dS = \oint \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z ds \quad (10'')$$

onde:

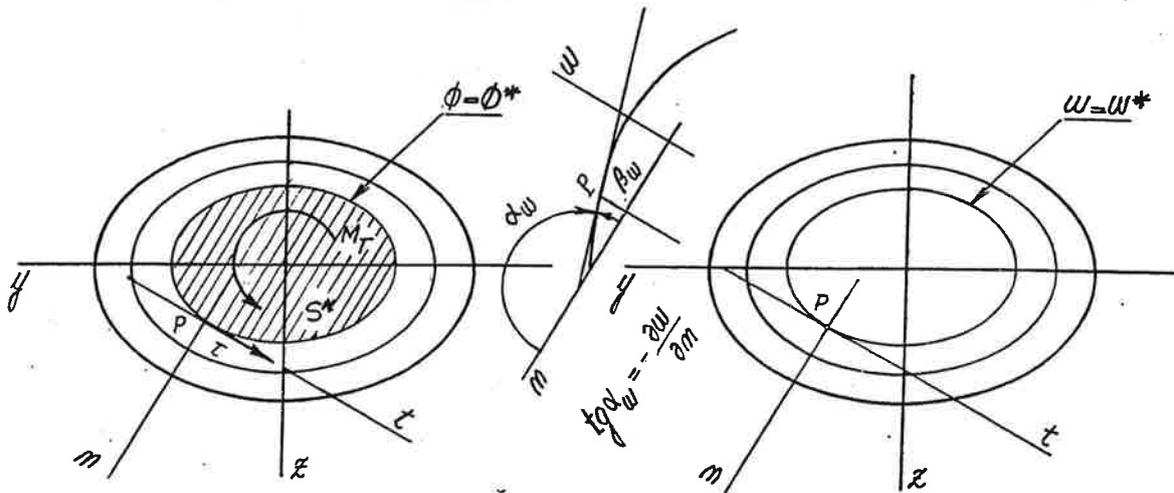
$$n_y = \cos \alpha = \frac{dz}{ds} \quad n_z = \sin \alpha = -\frac{dy}{ds} \quad (11)$$

de modo que, considerando nas expressões (10) as expressões (1), obtém-se, em consequência da expressão (3''):

$$\int_S \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] dS = \oint (-\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) ds = -\oint \tau_t ds = -\oint \tau ds \quad (12)$$

Finalmente, considerando as expressões (9) e (12), obtém-se:

$$\oint \tau ds = 2G\theta S^* \quad (13)$$



O problema da membrana uniforme carregada transversalmente reduz-se ao equilíbrio de um elemento de dimensões \$dy\$ e \$dz\$, expresso pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{s_T} \quad (14)$$

onde \$w\$ é o deslocamento do ponto \$P\$ de coordenadas \$(y,z)\$, com \$w = 0\$ no contorno.

A semelhança das equações diferenciais (2) e (14) bem como das respectivas condições de contorno, permite concluir que conhecida a função \$w\$ (que pode ser obtida na prática por meio de ensaio) a função \$\phi\$ é dada por:

$$\phi = k w \quad (15)$$

De fato, considerando na equação (2) o valor de \$\phi\$ dado pela expressão (15), obtém-se:

de modo que, por comparação das expressões (14) e (16), resulta:

$$k = 2 \frac{S_T}{p} G\theta \quad (17)$$

Considerando-se as expressões (4), (8) e (15), pode-se, de acordo com a fig., escrever:

$$\tau = \tau_t = -\frac{d\phi}{dn} = -k \frac{dw}{dn} = -k \operatorname{tg} \alpha_w = k \operatorname{tg} \beta_w \quad (18)$$

$$M_T = 2 \int \phi \, dS = 2 \int k w \, dS = 2k \int w \, dS = 2k V_w \quad (19)$$

onde V_w é o volume compreendido entre a membrana deformada e o plano inicial correspondente à membrana indeformada.

Substituindo na expressão (19) o valor de k dado pela expressão (17), obtém-se:

$$M_T = 2 \left[2 \frac{S_T}{p} G\theta \right] V_w = G\theta I_T \quad (20)$$

onde:

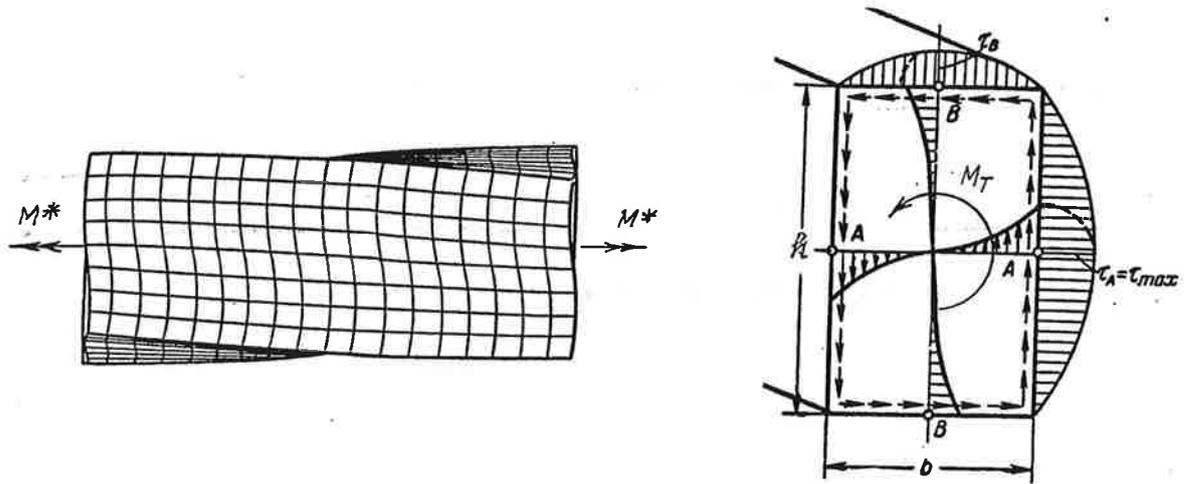
$$I_T = 4 \frac{S_T}{p} V_w \quad (21)$$

é o momento de inércia à torção.

A determinação experimental de k é apresentada no apêndice 1.

SEÇÃO RETANGULAR.

A distribuição de tensões tangenciais em uma barra de seção retangular submetida a torção uniforme bem como a correspondente configuração deformada são indicadas na fig.



No ponto médio A do lado maior, de dimensão h, tem-se a maior tensão tangencial, dada por:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} \quad (1)$$

onde W_T é o *módulo de resistência à torção*, dado por:

$$W_T = \alpha b^2 h \quad (2)$$

com $\alpha = \alpha\left(\frac{h}{b}\right)$.

No ponto médio B do lado menor, de dimensão b, a tensão tangencial é dada por:

$$\tau_B = \beta \tau_A \quad (3)$$

com $\beta = \beta\left(\frac{h}{b}\right)$.

Em consequência das propriedades P1 e P2 citadas anteriormente, as componentes τ_{xy} e τ_{xz} são nulas nos vértices, uma vez que as tensões nas faces da barra são nulas.

A rotação por unidade de comprimento θ é dada por:

$$\theta = \frac{M_T}{GI_T} \quad (4)$$

onde:

$$I_T = \gamma b^3 h \quad (5)$$

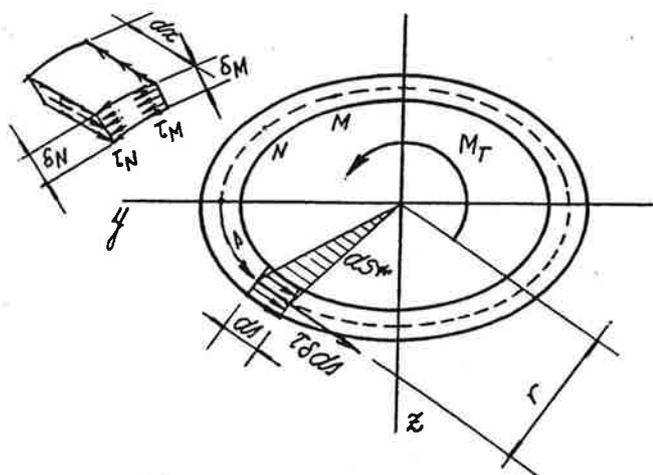
com $\gamma = \gamma\left(\frac{h}{b}\right)$.

Os valores de α , β e γ são dados na tabela seguinte.

$\frac{h}{b}$	1.000	1.500	1.750	2.000	2.500	3.000	4.000	6.000	8.000	10.00	α
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742
γ	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

SEÇÃO DELGADA FECHADA.

Considere-se em uma barra de seção delgada fechada submetida à torção uniforme o elemento de dimensão dx que se mostra na fig.



As tensões tangenciais gozam das propriedades P1 e P2 citadas anteriormente, de modo que, sendo τ_M a tensão nos pontos ao longo da espessura δ_M e τ_N a tensão tangencial nos pontos ao longo da espessura δ_N , pode-se escrever a seguinte equação de equilíbrio segundo a direção x :

$$\tau_M \delta_M dx = \tau_N \delta_N dx \Rightarrow \tau_M \delta_M = \tau_N \delta_N \quad (1)$$

ou seja o produto $\tau \delta$ é constante.

O momento resultante das tensões τ na área infinitesimal δds é dado por

$$dM_T = \tau \delta ds r \quad (2)$$

De acordo com a fig.,

$$r ds = 2 dS^* \quad (3)$$

onde dS^* é a área do triângulo de base ds e altura r .

Quando se consideram todos os ds ao longo do contorno, obtém-se:

$$M_T = 2 \int \tau \delta dS^* = 2 \tau \delta \int dS^* = 2 \tau \delta S^* \quad (4)$$

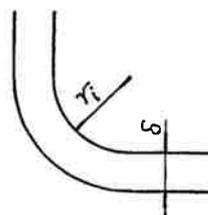
visto que, por ser constante, o produto $\tau \delta$ pode sair da integral. Desse modo:

$$\tau = \frac{M_T}{2S^* \delta} \quad (5)$$

Se a seção transversal apresenta, como se mostra na fig., cantos vivos, a tensão tangencial nos pontos do contorno interno, que são os mais solicitados, é dada por:

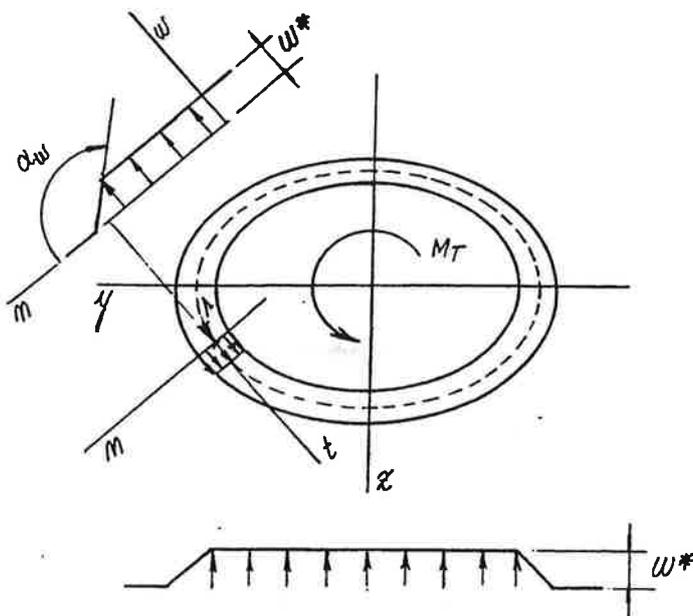
$$\tau' = \tau \frac{\frac{\delta}{r_i}}{\ln(1 + \frac{\delta}{r_i})} \quad (8)$$

onde τ é a tensão tangencial dada pela expressão (5).



Quando, por exemplo, $r_i = \delta$, a tensão nos pontos da face interna ($r = r_i = \delta$) atinge o valor $\tau' = 1.45 \tau$.

Alternativamente, recorrendo à analogia da membrana, verifica-se que em decorrência da aplicação da pressão p , tem-se a configuração deformada que se mostra na fig.



A tensão tangencial em um ponto P da seção transversal é dada por:

$$\tau = -k \frac{dw}{dn} = -k \left[-\frac{w^*}{\delta} \right] = k \frac{w^*}{\delta} \quad (9)$$

enquanto o momento de torção M_T é dado por:

$$M_T = 2k V_w = 2k S^* w^* \quad (10)$$

de modo que:

$$\tau = \frac{M_T}{2S^* \delta} \quad (11)$$

Demonstra-se que a rotação por unidade de comprimento é dada por:

$$\theta = \frac{M_T}{G I_T} \quad (12)$$

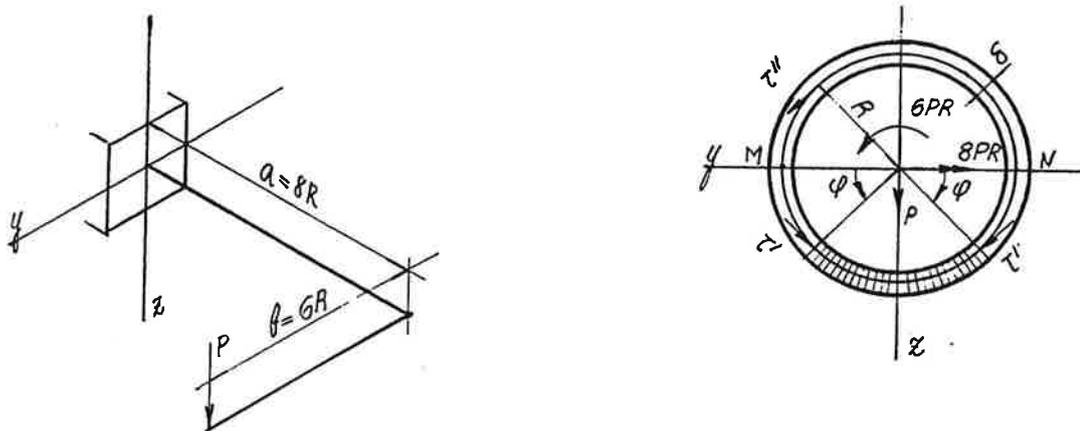
onde:

$$I_T = \frac{4S^{*2}}{\oint \frac{ds}{\delta}} \quad (13)$$

é o momento de inércia à torção.

EXEMPLO.

Determinar as tensões tangenciais τ_M e τ_N nos pontos M e N da seção transversal de engastamento da estrutura da fig., supondo empenamento livre.



A distribuição de tensões tangenciais devidas à força cortante $Q_z = P$ é dada, como se viu anteriormente, por:

$$\tau' = \frac{Q_z}{\pi \delta R} \cos \beta \quad (\text{A})$$

de modo que, em valor absoluto,

$$\tau'_M = \tau'_N = \tau_{\beta=0} = \frac{P}{\pi \delta R} \quad (\text{B})$$

A distribuição de tensões tangenciais devidas ao momento de torção $M_T = P b = 6 P R$ é dada, segundo a expressão (5), por:

$$\tau'' = \frac{M_T}{2 S^* \delta} = \frac{6 P R}{2 (\pi R^2) \delta} \quad (\text{C})$$

de modo que, em valor absoluto,

$$\tau''_M = \tau''_N = \frac{3P}{\pi \delta R} \quad (\text{D})$$

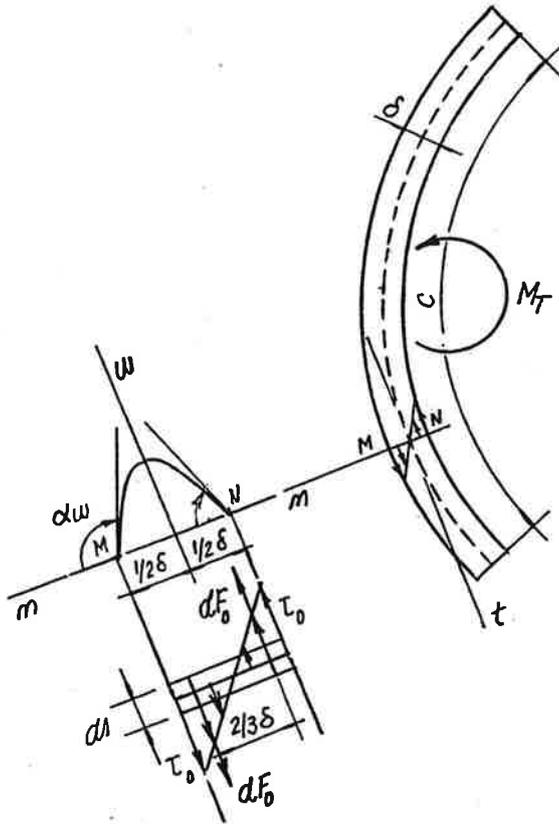
Considerando as expressões (B) e (D) tem-se, de acordo com a fig.,

$$\tau_M = \tau'_M + \tau''_M = \frac{4P}{\pi \delta R} \quad (\text{E}')$$

$$\tau_N = \tau''_N - \tau'_N = \frac{2P}{\pi \delta R} \quad (\text{E}'')$$

SEÇÃO DELGADA ABERTA.

Recorrendo à analogia de membrana, verifica-se que, em decorrência da aplicação da pressão p , tem-se a configuração deformada indicada na fig.



Ignoradas as perturbações próximas às extremidades, resulta que w independe de s , de modo que, de acordo com a expressão (14) do item "analogia da membrana", tem-se:

$$\frac{d^2 w}{dn^2} = -\frac{p}{s_T} \quad (1')$$

$$\frac{dw}{dn} = -\frac{p}{s_T} n + C \quad (1'')$$

$$w = -\frac{1}{2} \frac{p}{s_T} n^2 + Cn + D \quad (1''')$$

Considerando as condições de contorno:

$$\left(\frac{dw}{dn}\right)_{n=0} = 0 \quad w_{n=\pm\frac{1}{2}\delta} = 0 \quad (2)$$

obtém-se:

$$C = 0 \quad D = \frac{p}{s_T} \frac{\delta^2}{8} \quad (3)$$

Retornando com esses valores às expressões (1), obtém-se:

$$w = \frac{p}{s_T} \left[\frac{\delta^2}{8} - \frac{n^2}{2} \right] \quad (4')$$

$$w^* = w_{n=0} = \frac{p}{s_T} \frac{\delta^2}{8} \quad (4'')$$

A tensão tangencial em um ponto P da seção transversal é dada por:

$$\tau = -k \frac{dw}{dn} = k \frac{p}{s_T} n \quad (5)$$

enquanto o momento de torção é dado por:

$$M_T = 2k \int w \, dS = 2k c \int_{n=-\frac{\delta}{2}}^{n=\frac{\delta}{2}} w \, dn = \frac{1}{6} k \frac{p}{s_T} \delta^3 c \quad (6)$$

de modo que:

$$k \frac{p}{s_T} = 6 \frac{M_T}{\delta^3 c} \quad (7)$$

No ponto M do contorno tem-se:

$$\tau_M = \tau_{n=\frac{\delta}{2}} = k \frac{p}{s_T} \frac{\delta}{2} = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^3 c} \delta \quad (8)$$

Considerando na expressão (13) do item analogia da membrana o circuito coincidente com o contorno, do qual se ignora o trecho nas extremidades, tem-se:

$$\oint_{s_0} \tau_0 \, ds_0 = 2 G \theta S_0^* \quad (9)$$

onde, de acordo com a expressão (8),

$$\tau_0 = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^2 c} \quad (10)$$

de modo que:

$$\frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^2 c} 2c = 2 G \theta \delta c \Rightarrow G \theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^3 c} = \frac{M_T}{I_T} \quad (11)$$

onde:

$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c \quad (12)$$

é o momento de inércia à torção.

A expressão (8) pode ser escrita, em vista do resultado anterior, da seguinte maneira:

$$\tau_M = \tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta \quad (13)$$

Considerando, como se mostra na fig., o segmento de dimensão ds , pode-se escrever:

$$dF_0 = \frac{1}{2} \tau_0 \frac{1}{2} \delta ds \Rightarrow f_0 = \frac{dF_0}{ds} = \frac{1}{4} \tau_0 \delta \quad (14)$$

de modo que o momento de torção por unidade de comprimento é dado por:

$$dM_{T0} = dF_0 \frac{2}{3} \delta = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 ds \Rightarrow m_{T0} = \frac{dM_{T0}}{ds} = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 \quad (15)$$

Considerando na expressão anterior o valor de τ_0 dado pela expressão (13) obtém-se:

$$m_{T0} = \frac{1}{2} \frac{M_T}{c} \quad (16)$$

Na seção retangular, para a qual $c = h$, tem-se, de acordo com a fig.,

$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c = \frac{1}{3} \delta^3 h \quad (17)$$

de modo que:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta = 3 \frac{M_T}{\delta^2 h} \quad (18')$$

$$f_0 = \frac{1}{4} \tau_0 \delta = \frac{3}{4} \frac{M_T}{\delta h} \Rightarrow F_0 = f_0 h = \frac{3}{4} \frac{M_T}{\delta} \quad (18'')$$

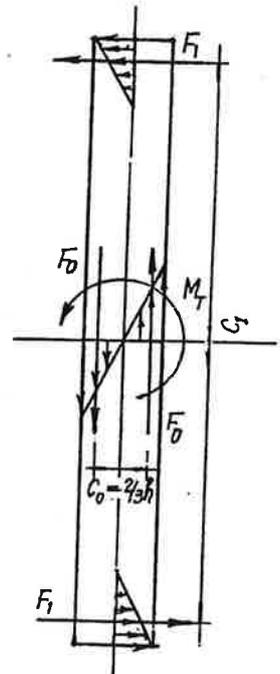
$$M_{T0} = F_0 c_0 = F_0 \frac{2}{3} \delta = \frac{1}{2} M_T \quad (18''')$$

isto é, a distribuição de tensões tangenciais segundo a direção do lado h é responsável pela absorção de metade do momento de torção M_T .

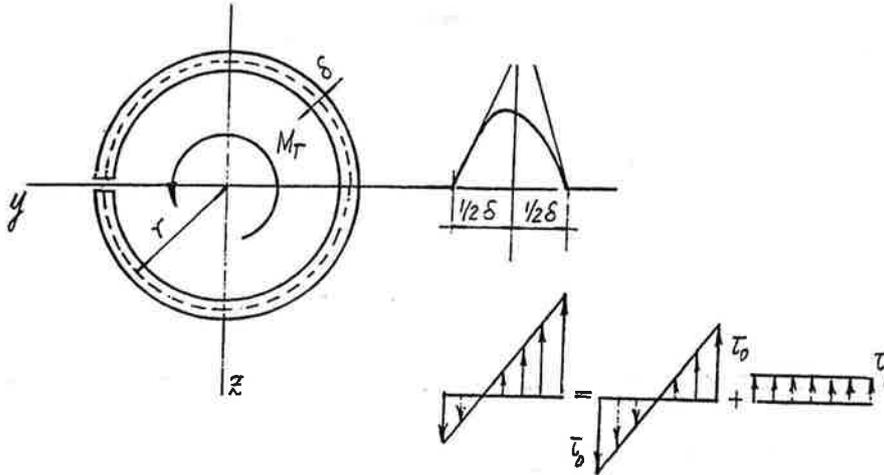
A outra metade é absorvida, como se mostra na fig., pela distribuição de tensões tangenciais segundo a direção do lado δ , isto é:

$$M_{T1} = \frac{1}{2} M_T = F_1 c_1 \cong F_1 h \quad (19)$$

Embora se tenha, como visto anteriormente no item seção retangular, $\tau_1 \approx \frac{3}{4} \tau_0$, o braço c_1 é muito maior do que o braço c_0 .



Na seção aberta, para a qual $c = 2\pi R$, tem-se de acordo com a fig.,



$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c = \frac{2}{3} \pi \delta^3 R \quad (20)$$

de modo que:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta = \frac{3}{2} \frac{M_T}{\pi \delta^2 R} \quad (21)$$

e segundo a expressão (15),

$$m_{T0} = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 = \frac{1}{4} \frac{M_T}{\pi R} \Rightarrow M_{T0} = m_{T0} c = m_{T0} 2\pi R = \frac{1}{2} M_T \quad (22)$$

Pode-se imaginar, voltando à analogia da membrana, que, em decorrência de uma ligeira assimetria da membrana deformada ao longo da espessura δ , a distribuição de tensões tangenciais seja, como se mostra na fig., o resultado de duas parcelas, cada uma das quais responsável pela absorção de metade do momento de torção.

De acordo com a fig., pode-se escrever:

$$dM_{T1} = \tau_1 \delta ds R \Rightarrow M_{T1} = \int_{s=0}^{s=2\pi R} \tau_1 \delta R ds = 2\pi R^2 \delta \tau_1 \quad (23)$$

de modo que:

$$\tau_1 = \frac{M_{T1}}{2\pi R^2 \delta} = \frac{\frac{1}{2} M_T}{2\pi R^2 \delta} = \frac{M_T}{4\pi R^2 \delta} \quad (24)$$

Comparando as expressões (22) e (24), obtém-se:

$$\tau_1 = \frac{1}{6} \tau_0 \frac{\delta}{R} \quad (25)$$

ou seja, $\tau_1 \ll \tau_0$.

No caso da seção que se mostra na fig., composta de diversos elementos de comprimento c_i e espessura δ_i , pode-se escrever:

$$\tau_{oi} = \frac{M_{Ti}}{I_{Ti}} \delta_i \quad (26)$$

$$\theta_i = \frac{M_{Ti}}{G I_{Ti}} \Rightarrow M_{Ti} = G \theta_i I_{Ti} \quad (27)$$

onde M_{Ti} é a parcela de M_T correspondente ao elemento i .

Lembrando que todos os elementos têm a mesma rotação, isto é, $\theta_i = \theta$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} M_T &= \Sigma M_{Ti} = \Sigma G \theta_i I_{Ti} \\ &= G \theta \Sigma I_{Ti} = G \theta I_T \end{aligned} \quad (28)$$

de modo que:

$$\theta = \theta_i = \frac{M_T}{G I_T} \quad (29)$$

onde:

$$I_T = \Sigma I_{Ti} = \Sigma \frac{1}{3} \delta_i^3 c_i \quad (30)$$

Considerando as expressões (27) e (29), pode-se escrever:

$$\frac{M_{Ti}}{I_{Ti}} = G \theta_i = G \theta = \frac{M_T}{I_T} \quad (31)$$

de modo que, retornando à expressão (26), obtém-se:

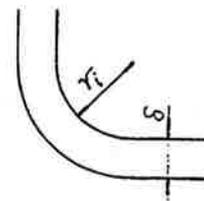
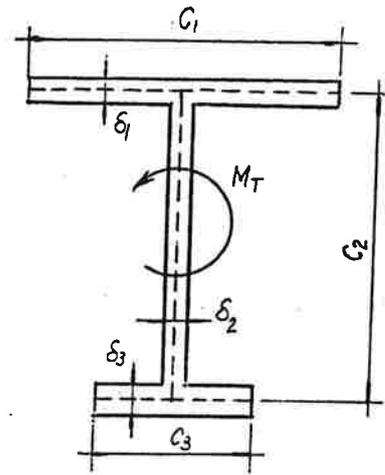
$$\tau_{oi} = \frac{M_T}{I_T} \delta_i \quad (32)$$

Se a seção transversal apresenta, como se mostra na fig., cantos vivos, a tensão tangencial nos pontos do contorno interno, que são os mais solicitados, é dada por:

$$\tau'_0 = \tau_0 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\delta}{r_i} \right] \quad (33)$$

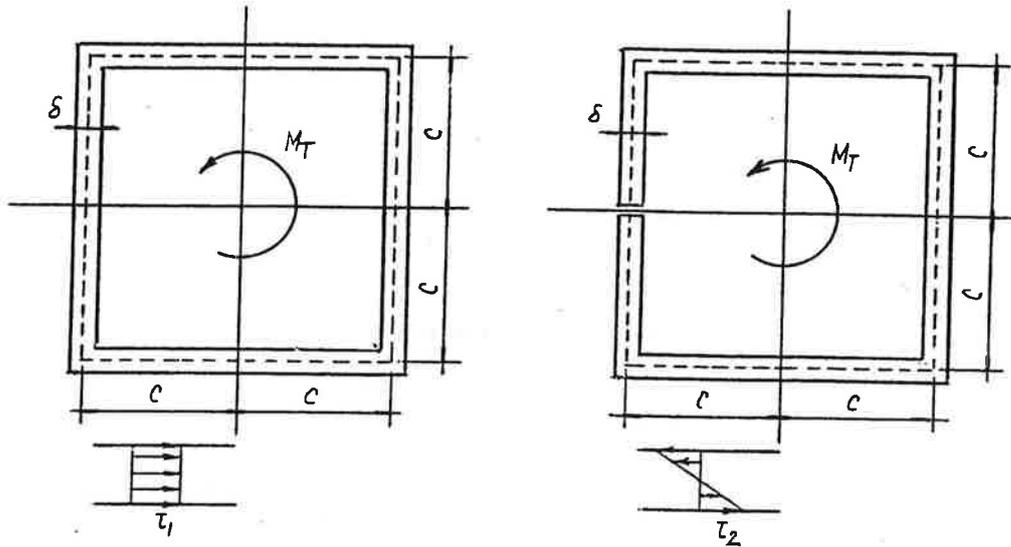
onde τ_0 é a tensão tangencial dada pela expressão (32).

Quando, por exemplo, $r_i = \delta$, $\tau'_0 = 1.25 \tau_0$.



EXEMPLO.

Comparar o comportamento de duas barras, com seções indicadas na fig., submetidas a torção uniforme de intensidade M_T .



As tensões tangenciais, cuja distribuição ao longo da espessura para cada caso é indicada na fig., são caracterizadas na barra de seção delgada fechada por:

$$\tau_1 = \frac{M_T}{2 S^* \delta} = \frac{M_T}{2 (4 c^2) \delta} = \frac{M_T}{8 \delta c^2} \quad (A)$$

e na barra de seção delgada aberta por:

$$\tau_2 = \frac{M_T \delta}{\frac{1}{3} \Sigma \delta_i^3 c_i} = \frac{M_T \delta}{\frac{1}{3} [3 \delta^3 (2c) + 2 \delta^3 c]} = \frac{3 M_T}{8 \delta^3 c} \quad (B)$$

de modo que, comparando as expressões (A) e (B), resulta:

$$\tau_2 = 3 \frac{c}{\delta} \tau_1 \quad (C)$$

A rotação por unidade de comprimento é dada na barra de seção delgada fechada por:

$$\theta_1 = \frac{M_T}{G \left[\frac{4 S^{*2}}{\oint \frac{ds}{\delta}} \right]} = \frac{M_T}{G \frac{4(4c^2)^2}{4 \left(\frac{2c}{\delta} \right)}} = \frac{M_T}{G (8 \delta c^3)} \quad (D)$$

e na barra de seção delgada aberta por:

$$\theta_2 = \frac{M_T}{G \left(\frac{1}{3} \sum \delta_i^3 c_i\right)} = \frac{M_T}{G \frac{1}{3} [3\delta^3 (2c) + 2\delta^3 c]} = \frac{3 M_T}{8 \delta^3 c} \quad (E)$$

de modo que, comparando as expressões (D) e (E), resulta:

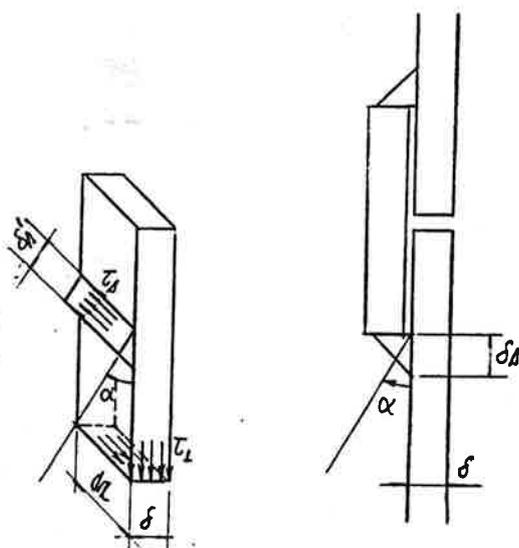
$$\theta_2 = 3 \frac{c^2}{\delta^2} \theta_1 \quad (F)$$

Considerando-se, por exemplo, $\frac{c}{\delta} = 10$, obtém-se:

$$\tau_2 = 30 \tau_1 \quad (G')$$

$$\theta_2 = 300 \theta_1 \quad (G'')$$

o que sugere a conveniência de se transformar a seção aberta em fechada mediante o emprego de solda, da maneira que se mostra na fig.



Considerando o equilíbrio na direção longitudinal do elemento de dimensão dx , obtém-se a tensão tangencial τ_s na seção da solda caracterizada pelo ângulo α , isto é:

$$\tau_s \delta'_s dx = \tau_1 \delta dx \Rightarrow \tau_s = \frac{\delta}{\delta'_s} \tau_1 \quad (H)$$

O valor máximo de τ_s ocorre quando δ'_s é mínimo, ou seja, quando $\alpha = 45^\circ$, de modo que:

$$\tau_{s \max} = \frac{\delta}{\delta_{s \min}} \tau_1 = \frac{\delta}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \delta_s\right)} \tau_1 = \sqrt{2} \frac{\delta}{\delta_s} \tau_1 \quad (I)$$

Impondo que o valor acima não ultrapasse a tensão admissível $\bar{\tau}_s$ da solda, obtém-se o valor δ_s .

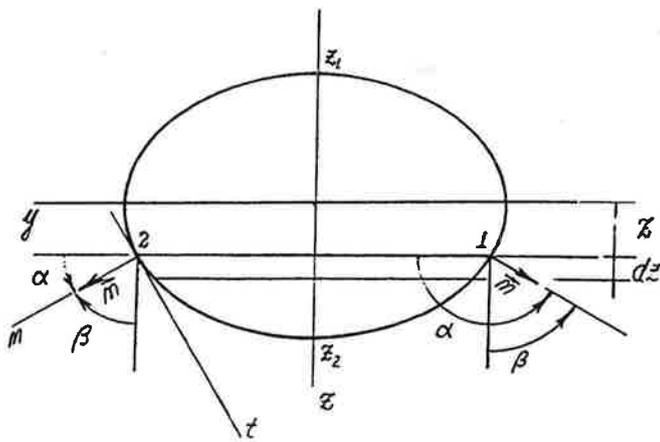
APÊNDICE 1.

INTEGRAÇÃO POR PARTES.

Se a função $f(y,z)$ é contínua com derivadas de primeira ordem contínuas em uma região S , então:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \oint f n_y ds \quad (1')$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dS = \oint f n_z ds \quad (1'')$$



De fato,

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial y} dS &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} [f(y_2, z) - f(y_1, z)] dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(y_2, z) \frac{dz}{ds} ds + \int_{z_1}^{z_2} f(y_1, z) \left(-\frac{dz}{ds}\right) ds \end{aligned} \quad (2)$$

Os cossenos diretores do versor normal \vec{n} no ponto 1, de coordenadas (y_1, z) , são dados por:

$$\cos \alpha = n_y = -\frac{dz}{ds} \quad \cos \beta = n_z = -\frac{dy}{ds} \quad (3')$$

enquanto no ponto 2, de coordenadas (y_2, z) , são dados por:

$$\cos \alpha = n_y = \frac{dz}{ds} \quad \cos \beta = n_z = -\frac{dy}{ds} \quad (3'')$$

Quando z percorre o intervalo $z_1 \leq z \leq z_2$ todo o contorno é percorrido, de modo que:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \oint f n_y ds$$

e analogamente:

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dS = \oint f n_z ds$$

Se $f = gh$, então:

$$\int \frac{\partial g}{\partial y} h dS = \oint g h n_y ds - \int g \frac{\partial h}{\partial y} dS \quad (4')$$

$$\int \frac{\partial g}{\partial z} h dS = \oint g h n_z ds - \int g \frac{\partial h}{\partial z} dS \quad (4'')$$

De fato, basta considerar nas expressões (1) $f = gh$, de maneira que:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \int \frac{\partial (gh)}{\partial y} dS = \int \left[\frac{\partial g}{\partial y} h + g \frac{\partial h}{\partial y} \right] dS \quad (5)$$

APÊNDICE 2.

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO VALOR DE k .

Na prática, utiliza-se um dispositivo munido de dois orifícios, um com o contorno da seção transversal e o outro circular de raio R , sobre os quais se distende uma película de sabão. Aplicada a pressão transversal, as duas películas se deformam, de modo que é possível obter as curvas de nível das funções:

$$w(y, z) \quad \phi(y, z) = k w(y, z) \quad (1)$$

bem como as curvas de nível das funções:

$$w_0(y, z) \quad \phi_0(y, z) = k_0 w_0(y, z) \quad (2)$$

Considerando a seção transversal e a seção circular submetidas ao mesmo momento de torção M_T , pode-se escrever, em vista das expressões (17) e (20) do item "analogia da membrana":

$$k = 2 \frac{s_T}{p} G\theta = 2 \frac{s_T}{p} \frac{M_T}{I_T} \quad (3')$$

$$k_0 = 2 \frac{s_T}{p} G\theta_0 = 2 \frac{s_T}{p} \frac{M_T}{I_{T0}} \quad (3'')$$

de modo que:

$$k = \frac{I_{T0}}{I_T} k_0 \quad (4)$$

O valor de k_0 é dado, de acordo com a expressão (2), por:

$$k_0 = \frac{\phi_0^*}{w_0^*} \quad (5)$$

onde w_0^* e ϕ_0^* são os valores de $w_0(r)$ e $\phi_0(r)$ em $r = 0$.

De acordo com a expressão (18) do item "analogia da membrana", tem-se:

$$\frac{d\phi_0}{dn} = \frac{d\phi_0}{dr} = -\tau_0 = -\frac{M_T}{I_{T0}} r \quad (6)$$

ou seja:

$$\phi_0 = -\frac{M_T}{I_{T0}} \frac{r^2}{2} + C \quad (7)$$

onde, uma vez que $\phi_0 = k w_0 = 0$ quando $r = R$,

$$C = -\frac{1}{2} \frac{M_T}{I_{T0}} r^2 \quad (8)$$

de modo que:

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \frac{M_T (R^2 - r^2)}{I_{T0}} \quad (9)$$

Sendo:

$$\phi_0^* = \frac{1}{2} \frac{M_T R^2}{I_{T0}} = \frac{1}{2} \frac{M_T R^2}{\left(\frac{1}{2} \pi R^4\right)} = \frac{M_T}{\pi R^2} \quad (10)$$

resulta:

$$\phi_0 = \phi_0^* \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (11)$$

Retornando à expressão (5) com o valor de ϕ_0^* dado pela expressão (10), obtém-se:

$$k_0 = \frac{M_T}{\pi R^2} \frac{1}{w_0^*} \quad (12)$$

Considerando-se a expressão (13) do item "analogia da membrana" sucessivamente para a seção transversal e para a seção circular, tem-se:

$$I_T = 4 \frac{S_T}{p} V_w \quad (13')$$

$$I_{T0} = 4 \frac{S_T}{p} V_{w0} \quad (13'')$$

onde, em vista da expressão (11),

$$V_{w0} = \int w_0 dS = \int \frac{\phi_0}{k} 2\pi r dr = \frac{2\pi}{k} \int \phi_0^* \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{\pi R^2}{2} \frac{\phi_0^*}{k} = \frac{\pi R^2}{2} w_0^* \quad (14')$$

enquanto

$$V_w = \int w dS \quad (14'')$$

é determinado experimentalmente.

Considerando na expressão (4) as expressões (12), (13) e (14), obtém-se o valor de k .



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I

**TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS
NA FLEXÃO NORMAL.**

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

1999

TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS NA FLEXÃO NORMAL.

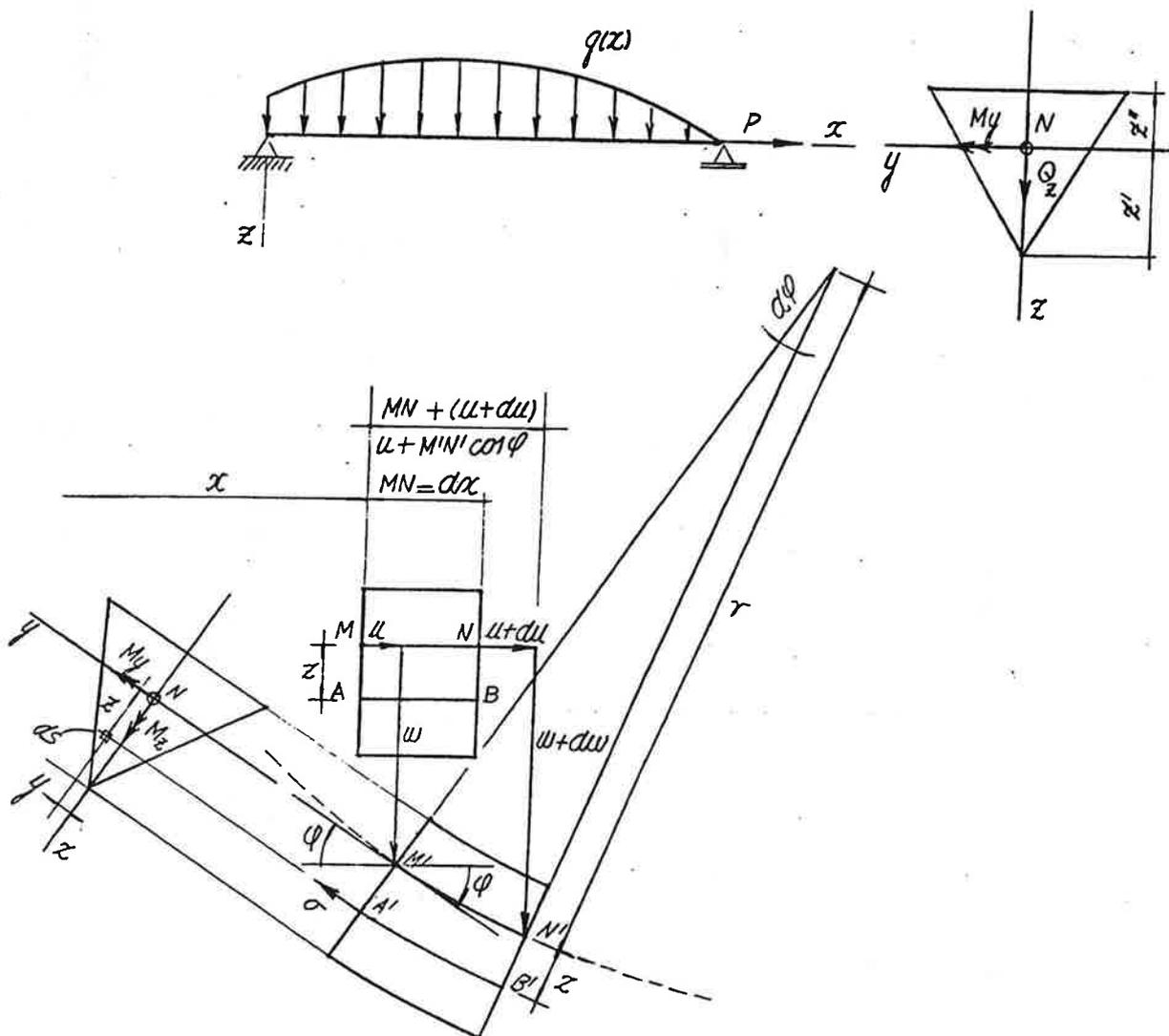
TENSÕES NORMAIS.

Considere-se em uma viga, como a que se mostra na fig., submetida ao carregamento transversal $q(x)$ e ao carregamento longitudinal P , um segmento de dimensão dx na *configuração indeformada* (anterior à introdução do carregamento externo) e na *configuração deformada* (posterior à introdução do carregamento externo).

Segundo a hipótese de Navier, as seções transversais mantêm-se planas e perpendiculares ao eixo deformado.

A hipótese de Navier, rigorosamente válida na flexão pura (ausência de força cortante), fornece bons resultados mesmo quando a presença de força cortante provoca distorção da seção transversal. A hipótese continua válida no caso de grandes deslocamentos e rotações que conduzem ao escoamento do material.

O ponto M do eixo, correspondente à seção caracterizada pela coordenada x , tem deslocamento longitudinal u e deslocamento transversal w , enquanto o ponto N , correspondente à seção caracterizada pela coordenada $x+dx$, tem deslocamento longitudinal $u+du$ e deslocamento transversal $w+dw$.



A deformação da fibra MN de dimensão dx é dada por:

$$\varepsilon_0 = \frac{M'N' - MN}{MN} \quad (1)$$

de modo que:

$$M'N' = (1 + \varepsilon_0)MN = (1 + \varepsilon_0)AB \quad (2)$$

A deformação da fibra genérica AB, caracterizada pela coordenada z, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (3)$$

onde, de acordo com a fig.,

$$\begin{aligned} A'B' &= M'N' + d\phi z = M'N' + \frac{M'N'}{r} z = \left(1 + \frac{z}{r}\right) M'N' \\ &= \left(1 + \frac{z}{r}\right) (1 + \varepsilon_0) AB \end{aligned} \quad (4)$$

de modo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0) \frac{z}{r} \quad (5)$$

Considerando que as deformações correntes são da ordem de 10^{-3} (0.2%, por exemplo), pode-se desprezar ε_0 em comparação com a unidade, de modo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{r} = C + Bz \quad (6)$$

À deformação ε corresponde a tensão normal σ dada, segundo a lei de Hooke, por:

$$\sigma = E\varepsilon = E\left(\varepsilon_0 + \frac{z}{r}\right) = C' + B'z \quad (7)$$

isto é, um elemento de dimensão $AB = dx$ e seção transversal dS , solicitado pela força $dN = \sigma dS$, passa a ter, em consequência do alongamento $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, a dimensão $A'B' = (1 + \varepsilon)AB$.

À distribuição de tensões normais σ , correspondem os seguintes esforços solicitantes:

$$N = \int_S \sigma dS = \int (C' + B'z) dS = C'S + B'M_{sy} \quad (8')$$

$$M_y = \int_S \sigma z dS = \int (C' + B'z) z dS = C'M_{sy} + B'I_y \quad (8'')$$

$$M_z = - \int_S \sigma y dS = - \int (C' + B'z) y dS = -C'M_{sz} - B'I_{yz} \quad (8''')$$

Se os eixos y e z são *eixos centrais de inércia* (eixos principais que passam pelo centro de gravidade), resulta $M_{sy} = M_{sz} = I_{yz} = 0$, de modo que:

$$C' = \frac{N}{S} \quad \text{e} \quad B' = \frac{M_y}{I_y} \quad (9)$$

e, como não poderia deixar de ser,

$$M_z = 0 \quad (10)$$

Na *flexão normal composta* ($N \neq 0$ e $M_y \neq 0$), de acordo com as expressões (7) e (9), tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z \quad (11)$$

As tensões normais nos pontos mais solicitados são dadas por:

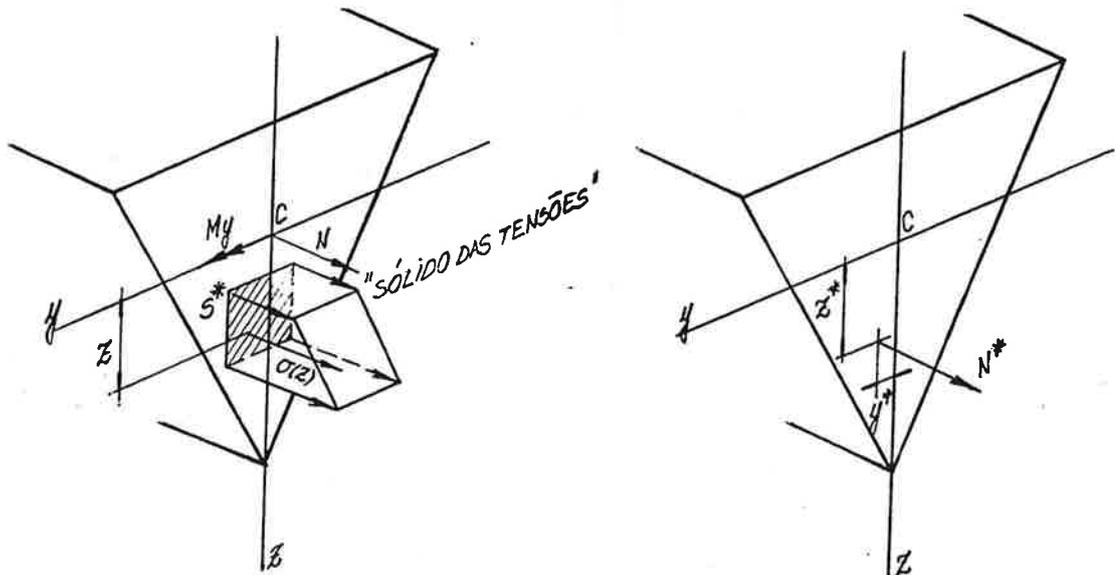
$$\sigma' = \sigma(+z') = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z' = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{W_y'} \quad (12')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \frac{N}{S} - \frac{M_y}{I_y} z'' = \frac{N}{S} - \frac{M_y}{W_y''} \quad (12'')$$

As grandezas W_y' e W_y'' são denominadas *módulos de resistência à flexão*.

Na *flexão normal simples* ($N = 0$ e $M_y \neq 0$), tem-se:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z \quad (13)$$



À distribuição de tensões normais σ em uma região genérica S^* (considerada, por comodidade, retangular na fig.) corresponde a força normal N^* , que pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} dN^* = \sigma dS \Rightarrow N^* &= \int_{S^*} \sigma dS = \int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) dS \\ &= \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} + N \frac{S^*}{S} \end{aligned} \quad (14')$$

bem como os momentos M_y^* e M_z^* , que podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} dM_y^* = \sigma z dS \Rightarrow M_y^* &= \int_{S^*} \sigma z dS = \int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) z dS \\ &= \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z^2 dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} z dS = M_y \frac{I_y^*}{I_y} + N \frac{M_{sy}^*}{S} \end{aligned} \quad (14'')$$

$$\begin{aligned} dM_z^* = -\sigma y dS \Rightarrow M_z^* &= -\int_{S^*} \sigma y dS = -\int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) y dS \\ &= -\frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} yz dS - \frac{N}{S} \int_{S^*} y dS = -M_y \frac{I_{yz}^*}{I_y} - N \frac{M_{sz}^*}{S} \end{aligned} \quad (14''')$$

onde as grandezas marcadas com asterisco referem-se à região S^* .

Os resultados anteriores permitem considerar a distribuição de tensões normais σ estaticamente equivalente à força N^* aplicada no ponto C^* de coordenadas (y^*, z^*) , tais que:

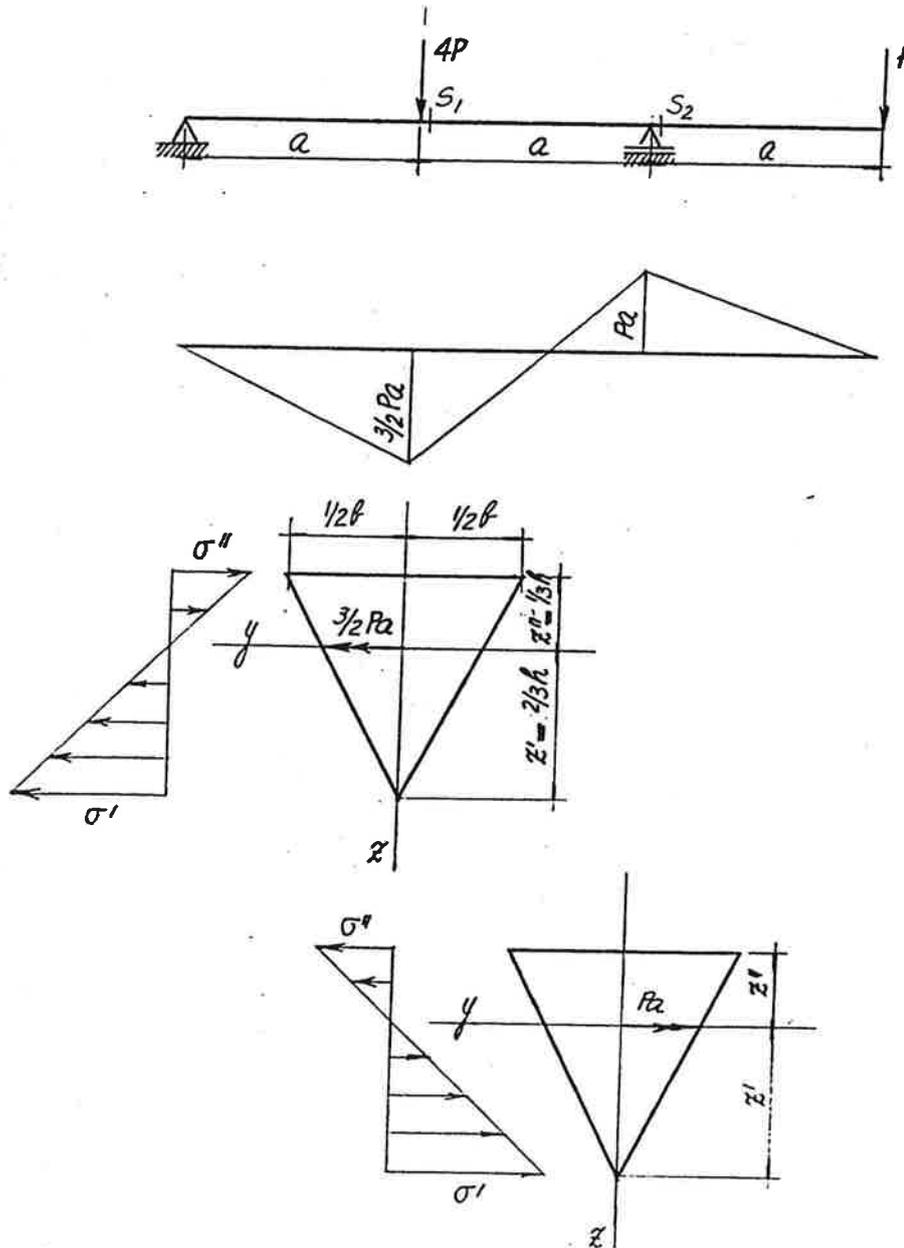
$$N^* z^* = M_y^* \Rightarrow z^* = \frac{M_y^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) z dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \quad (15')$$

$$N^* y^* = -M_z^* \Rightarrow y^* = -\frac{M_z^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) y dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \quad (15'')$$

isto é, o ponto C^* de aplicação da força N^* corresponde à projeção no plano da seção transversal do centro de gravidade do "sólido das tensões" relativo à região S^* , cujo volume, segundo a expressão (14'), é igual à força N^* .

EXEMPLO1.

Determinar as tensões normais σ_{\max} e σ_{\min} na viga da fig.



Na seção S_1 , solicitada pelo momento fletor $M_y = +\frac{3}{2}Pa$, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = \left(+\frac{3}{2}Pa\right) \frac{36}{bh^3} z = 54 \frac{Pa}{bh^3} z \quad (A)$$

de modo que:

$$\sigma' = \sigma(+z') = \sigma(+\frac{2}{3}h) = 36 \frac{Pa}{bh^2} \quad (A')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \sigma(-\frac{1}{3}h) = -18 \frac{Pa}{bh^2} \quad (A'')$$

Na seção S_2 , solicitada pelo momento fletor $M_y = -Pa$, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = (-Pa) \frac{36}{bh^3} z = -36 \frac{Pa}{bh^3} z \quad (B)$$

de modo que:

$$\sigma' = \sigma(z') = \sigma(+\frac{2}{3}h) = -24 \frac{Pa}{bh^2} \quad (B')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \sigma(-\frac{1}{3}h) = 12 \frac{Pa}{bh^2} \quad (B'')$$

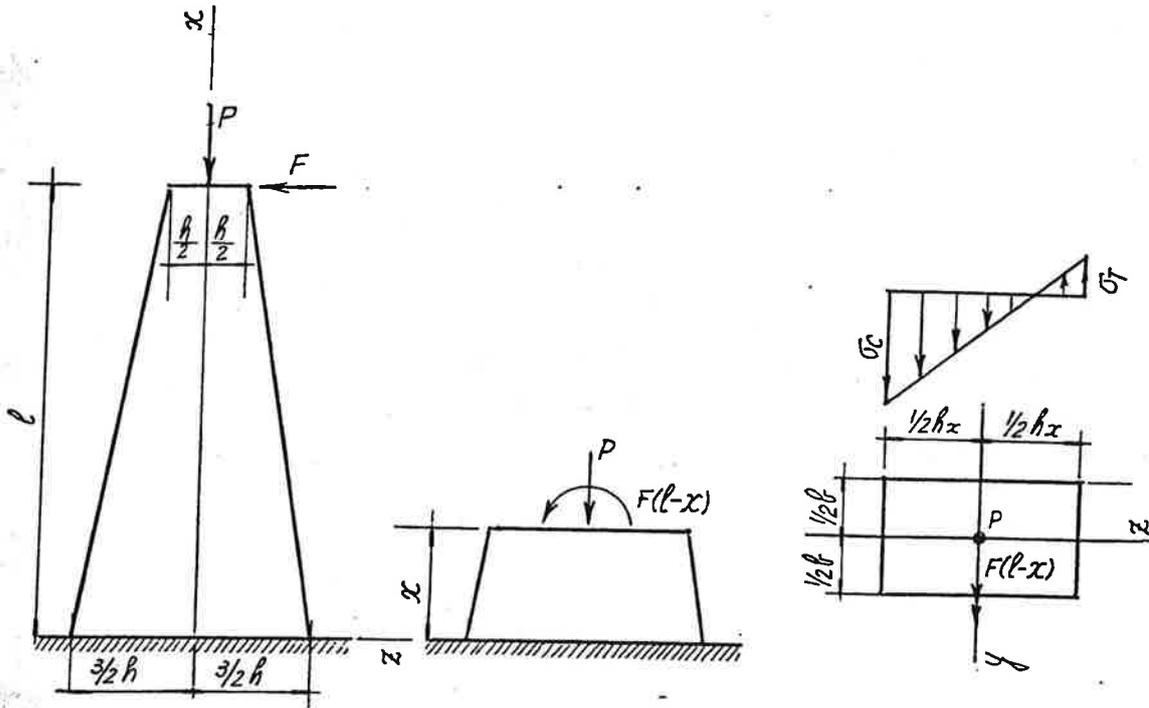
Considerando os valores fornecidos pelas expressões (A) e (B), conclui-se que:

$$\sigma_{\max} = 36 \frac{Pa}{bh^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{\min} = -24 \frac{Pa}{bh^2} \quad (C)$$

A necessidade de analisar duas seções decorre do fato de os valores de z' e z'' serem diferentes. Quando os valores de z' e z'' forem iguais, por exemplo no caso de seções simétricas em relação ao eixo y , basta analisar a seção transversal solicitada pelo maior momento fletor em valor absoluto.

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões normais σ_{\max} e σ_{\min} no pilar da fig., considerando $P = 12F$ e $l = 20h$.



Em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , de dimensões $b \times h_x$, onde:

$$h_x = h + \frac{2h}{l}(1-x) = 3h - \frac{2h}{l}x \Rightarrow \frac{dh_x}{dx} = -\frac{2h}{l} \quad (A)$$

os esforços solicitantes são dados por:

$$N = -P = -12F \quad M_y = +F(1-x) \quad (B)$$

A esses esforços solicitantes corresponde a distribuição de tensões normais, dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z + \frac{N}{S} \quad (C)$$

onde:

$$I_y = \frac{1}{12}bh_x^3 \quad S = bh_x \quad (D)$$

Substituindo na expressão (C) os valores de N e M_y , dados pelas expressões (B), e os valores de S e I_y , dados pelas expressões (D), obtém-se:

$$\sigma = \frac{12F(1-x)}{bh_x^3} z - \frac{P}{bh_x} \quad (E)$$

Nos pontos caracterizados pela coordenada $z = +\frac{1}{2}h_x$, tem-se a máxima tensão de tração, dada por:

$$\sigma_T = \frac{6F(1-x)}{bh_x^2} - \frac{P}{bh_x} = 6\frac{F}{b}h_x^{-2}(1-x) - \frac{P}{b}h_x^{-1} \quad (E')$$

Nos pontos caracterizados pela coordenada $z = -\frac{1}{2}h_x$, tem-se a máxima tensão de compressão, dada por:

$$\sigma_C = -\frac{6F(1-x)}{bh_x^2} - \frac{P}{bh_x} = -6\frac{F}{b}h_x^{-2}(1-x) - \frac{P}{b}h_x^{-1} \quad (E'')$$

Por serem funções de x , determina-se, por derivação das expressões (E') e (E''), as seções correspondentes aos valores máximos, isto é,

$$\frac{d\sigma_T}{dx} = 6\frac{F}{b}\left[(-2h_x^{-3})\frac{dh_x}{dx}(1-x) - h_x^{-2}\right] - \frac{P}{b}(-h_x^{-2})\frac{dh_x}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{TMAX} = \frac{1}{4} \Rightarrow h_x = \frac{5}{2}h \quad (F')$$

$$\frac{d\sigma_C}{dx} = -6\frac{F}{b}\left[(-2h_x^{-3})\frac{dh_x}{dx}(1-x) - h_x^{-2}\right] - \frac{P}{b}(-h_x^{-2})\frac{dh_x}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{CMAX} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_x = \frac{5}{3}h \quad (F'')$$

Substituindo nas expressões (E') e (E'') os valores de x e h dados pelas expressões (F') e (F''), obtém-se:

$$\sigma_{MAX} = \sigma_T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{48}{5} \frac{F}{bh} = \frac{4}{5} \frac{P}{bh} \quad (G')$$

$$\sigma_{MIN} = \sigma_T\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{108}{5} \frac{F}{bh} = -\frac{9}{5} \frac{P}{bh} \quad (G'')$$

DESLOCAMENTOS.

De acordo com as expressões (6), (7) e (11) do item anterior, tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{r} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} + \frac{M_y}{EI_y} z \quad (1)$$

de modo que:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{ES} \quad \frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (2)$$

As grandezas ES e EI_y denominam-se *rigidez longitudinal* e *rigidez à flexão*. Dados os esforços solicitantes N e M_y , quanto maiores as grandezas ES e EI_y , tanto menores as deformações ε_0 e $1/r$, isto é, mais rígida a barra.

Para obter o *deslocamento longitudinal* u , considere-se, de acordo com a fig. do item anterior, que:

$$MN + (u + du) = u + M'N' \cos \varphi \Rightarrow MN + du = MN(1 + \varepsilon_0) \cos \varphi$$

Considerando a aproximação $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, tem-se:

$$MN + du = MN(1 + \varepsilon_0)(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) = MN(1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\varepsilon_0)$$

Desprezando o termo de ordem superior $\varepsilon_0\varphi^2$, e lembrando que $MN=dx$, obtém-se:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad (3)$$

ou seja,

$$u = u_0 + \int \varepsilon_0 dx - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (4)$$

onde ε_0 é dado pela expressão (2) e φ será determinado a seguir.

Na flexão normal simples,

$$u = u_0 - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (5)$$

Se se despreza o ângulo de rotação φ (o que corresponde a considerar $\cos \varphi \approx 1$), resulta:

$$u = u_0 \quad (6)$$

de modo que, se a extremidade inicial for fixa, cada ponto M do eixo desloca-se exclusivamente segundo a direção normal ao eixo.

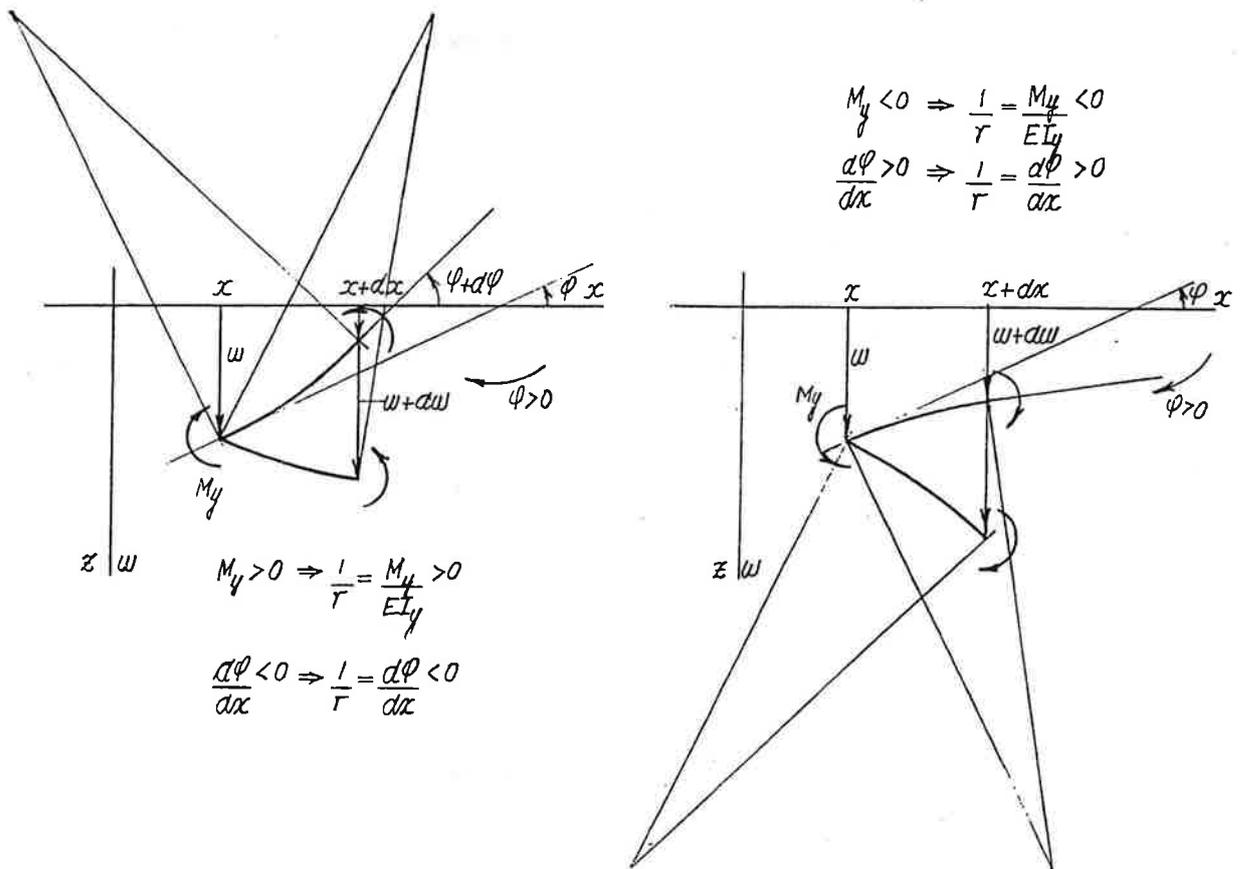
Para obter o *deslocamento transversal* w , deve-se lembrar que a curvatura $1/r$ de uma função $w(x)$ é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{w''}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Para φ muito pequeno, pode-se desprezar $\operatorname{tg}^2\varphi$ em comparação com a unidade, de modo que:

$$\frac{1}{r} = w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{dw'}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{tg}\varphi) \approx \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

Como se mostra na fig., a curvatura, segundo a expressão (2), tem o sinal de M_y ($M_y > 0$, quando há tração nas fibras caracterizadas por $z > 0$), enquanto, segundo a expressão (8), tem o sinal de w'' ($w'' > 0$, quando φ , considerado positivo no sentido horário, cresce com x).



A fim de eliminar essa discrepância de sinais, decorrente exclusivamente da convenção adotada para o momento fletor, deve-se escrever:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (9)$$

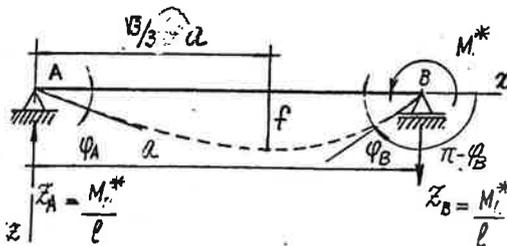
ou seja,

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{M_y}{EI_y} dx \quad (10)$$

$$w = w_0 + \varphi_0 x - \int \left(\int \frac{M_y}{EI_y} dx \right) dx \quad (11)$$

EXEMPLO 1.

Determinar a função $w(x)$ - denominada *linha elástica* - bem como a função $u(x)$ da viga de rigidez EI da fig.



O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = \frac{M^*}{a} x \quad (A)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -\frac{M^*}{a} x \quad (B)$$

$$EIw'(x) = -\frac{M^*}{2a} x^2 + C \quad (C)$$

$$EIw(x) = -\frac{M^*}{6a} x^3 + Cx + D \quad (D)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w_B = w(a) = 0 \quad (E)$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo nos apoios A e B, obtém-se:

$$C = \frac{1}{6} M^* a \quad D = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{M^* x^3}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \quad (G'')$$

O deslocamento transversal máximo f - denominado *flecha* - é obtido a partir das expressões (G) da seguinte maneira:

$$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} a \Rightarrow w_{MAX} = f = w\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right) = \frac{\sqrt{3}}{27} \frac{M^* a^2}{EI} \quad (H)$$

As rotações φ_A e φ_B são dadas, de acordo com a expressão (G''), por:

$$\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{M^* a}{6EI} \quad (I)$$

$$\varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{M^* a}{3EI} \quad (J)$$

O deslocamento longitudinal é dado, de acordo com a expressão (3), por:

$$u'(x) = \frac{1}{2} w'(x)^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \right]^2 \quad (K)$$

de modo que:

$$u(x) = \frac{1}{40} \frac{M^{*2} x^5}{a^2 (EI)^2} - \frac{1}{36} \frac{M^{*2} x^3}{(EI)^2} + \frac{1}{72} \frac{M^{*2} a^2 x}{(EI)^2} + C' \quad (L)$$

onde $C' = 0$, visto que $u_A = u(0) = 0$.

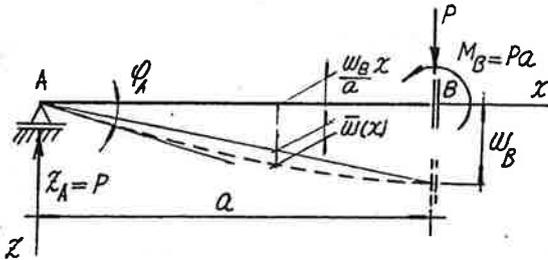
No ponto B, tem-se:

$$u_B = \frac{1}{90} \frac{M^{*2} a^3}{(EI)^2} = \frac{27}{10} \left(\frac{f}{a}\right)^2 a \quad (M)$$

Considerando que na prática $\frac{f}{a}$ é da ordem de $\frac{1}{500}$, conclui-se que o deslocamento longitudinal pode ser desprezado.

EXEMPLO 2.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig. e comparar os resultados com os do exemplo anterior, quando $M^* = Pa$



O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = +Z_A x = Px \quad (A)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -Px \quad (B)$$

$$EIw'(x) = -\frac{1}{2}Px^2 + C \quad (C)$$

$$EIw(x) = -\frac{1}{6}Px^3 + Cx + D \quad (D)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad \varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = w'_B = w'(a) = 0 \quad (E)$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo no apoio A e de a rotação ser nula no apoio deslizante B, obtém-se:

$$C = \frac{1}{2}Pa \quad D = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G'')$$

No ponto B, tem-se:

$$w_B = w(a) = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

No ponto A, tem-se:

$$\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (\text{I})$$

De acordo com a fig., o deslocamento $\bar{w}(x)$ e a rotação $\bar{\varphi}(x) = \bar{w}'(x)$ são dados por:

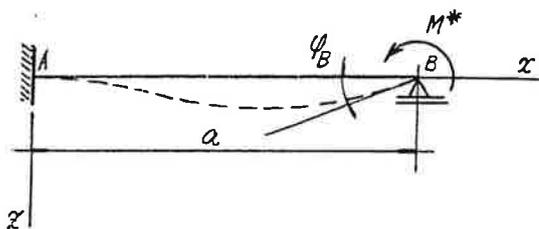
$$\bar{w}(x) = w(x) - \frac{w_B}{a} x = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (\text{J}')$$

$$\bar{w}'(x) = w'(x) - \frac{w_B}{a} = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2}{EI} \quad (\text{J}'')$$

o que permite concluir, considerando no exemplo anterior $M^* = Pa$, que barras com mesma distribuição de momentos fletores apresentam a mesma configuração deformada. De fato, sendo idênticos os diagramas de momentos fletores, idênticas serão as curvaturas que determinam a deformação dos infinitos segmentos de dimensão dx de que são compostas as barras.

EXEMPLO 3.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig. e comparar os resultados com os do primeiro exemplo.



Considerando o equilíbrio da viga podem-se escrever as seguintes equações:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0 \quad (\text{A}')$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A - Z_B = 0 \quad (\text{A}''')$$

$$(\Sigma M)_A = 0 \Rightarrow Z_B a - M_A - M^* = 0 \quad (\text{A}''')$$

de modo que:

$$Z_A = \frac{M^* + M_A}{a} \quad Z_B = -\frac{M^* + M_A}{a} \quad (\text{B})$$

onde M_A é, por enquanto, desconhecido.

O momento fletor em uma seção genérica caracterizada pela coordenada x é dado por:

$$M(x) = Z_A x - M_A = -\frac{M^* + M_A}{a} x - M_A \quad (C)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -(Z_A x - M_A) = -\frac{M^* + M_A}{a} x + M_A \quad (D)$$

$$EIw'(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^2}{2} + M_A x + C \quad (E)$$

$$EIw(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (F)$$

onde os valores M_A , C_1 e C_2 são obtidos com as seguintes condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w'_A = w'(0) = 0 \quad w_B = w(a) = 0 \quad (G)$$

de modo que

$$M_A = \frac{1}{2} M^* \quad C = 0 \quad D = 0 \quad (H)$$

Retornando com esses valores às expressões (E) e (F), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^3}{a} + \frac{1}{4} \frac{M^* x^2}{EI} \quad (I')$$

$$w'(x) = -\frac{3}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{M^* x}{EI} \quad (I'')$$

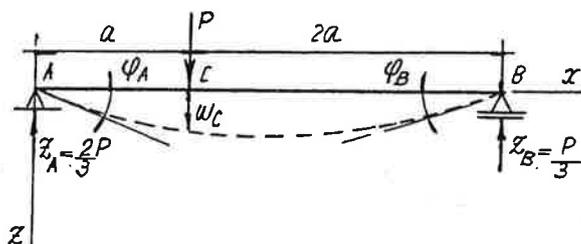
A rotação no apoio B é dada por:

$$\varphi_B \approx \text{tg} \varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{1}{4} \frac{M^* a}{EI} \quad (J)$$

Comparando a rotação no apoio B da estrutura isostática do primeiro exemplo com a rotação no mesmo apoio da estrutura hiperestática deste exemplo, constata-se um fato que tem validade geral: as estruturas hiperestáticas são mais rígidas do que as correspondentes estruturas isostáticas, isto é, para um mesmo carregamento, quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura tanto menores os deslocamentos e rotações.

EXEMPLO 4.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig.



No trecho 1, isto é, para $0 \leq x \leq a$, tem-se:

$$M_1(x) = +\frac{2}{3}Px \quad (A1)$$

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = -\frac{2}{3}Px \quad (B1)$$

$$EIw_1'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + C_1 \quad (C1)$$

$$EIw_1(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + C_1x + D_1 \quad (D1)$$

No trecho 2, isto é, para $a \leq x \leq 3a$, tem-se:

$$M_2(x) = +\frac{2}{3}Px - P(x-a) \quad (A2)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = -\frac{2}{3}Px + P(x-a) \quad (B2)$$

$$EIw_2'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + \frac{1}{2}P(x-a)^2 + C_2 \quad (C2)$$

$$EIw_2(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + \frac{1}{6}P(x-a)^3 + C_2x + D_2 \quad (D2)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_1(0) = 0 \quad w_2(3a) = 0 \quad (E')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_1'(a) = w_2'(a) \quad (E'')$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo nos apoios e de haver continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos e de rotações) na interface dos trechos 1 e 2, obtém-se:

$$C_1 = C_2 = \frac{5}{9}Pa^2 \quad D_1 = D_2 = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w_1(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G1')$$

$$w_1'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{P(x-a)^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G2')$$

$$w_2'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{P(x-a)^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

No ponto C, tem-se:

$$w_C = w_1(a) = w_2(a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

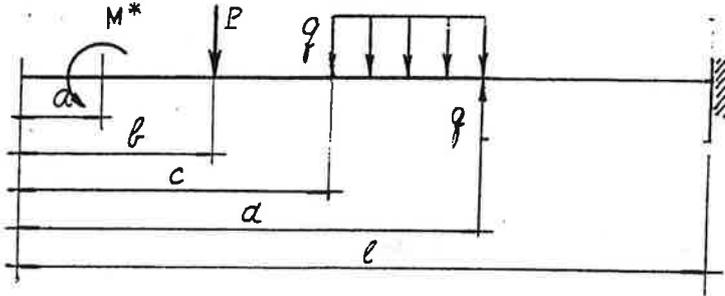
Nos pontos A e B, tem-se:

$$\varphi_A = w_A' = w_1'(0) = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I')$$

$$\varphi_B = -w_B' = -w_2'(3a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I'')$$

EQUAÇÃO GERAL DA LINHA ELÁSTICA.

Em uma viga de seção constante, como a que se mostra na fig., a integração da equação diferencial da linha elástica, nos trechos definidos pela correspondente função $M(x)$, é simplificada pela adoção de dois artifícios que reduzem o número total de constantes a determinar de $2n$ para 2.



Em cada um dos trechos, o momento fletor é dado por:

$$\text{trecho 1 : } 0 \leq x \leq a \quad M_1(x) = 0 \quad (1.1)$$

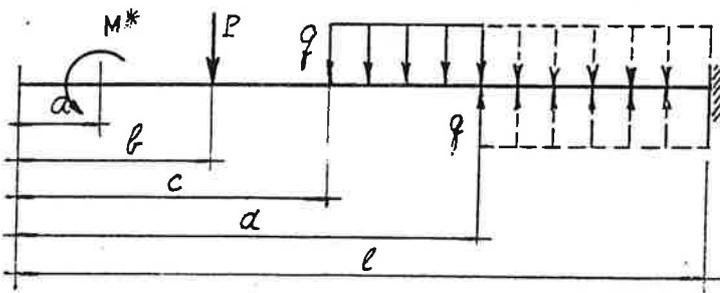
$$\text{trecho 2 : } a \leq x \leq b \quad M_2(x) = -M^* \quad (1.2)$$

$$\text{trecho 3 : } b \leq x \leq c \quad M_3(x) = -M^* - P(x - b) \quad (1.3)$$

$$\text{trecho 4 : } c \leq x \leq d \quad M_4(x) = -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{trecho 5 : } d \leq x \leq l \quad M_5(x) &= -M^* - P(x - b) - q(d - c)\left[x - \frac{1}{2}(d + c)\right] \\ &= -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (1.5) \end{aligned}$$

A expressão (1.5) corresponde ao primeiro artifício, que consiste em considerar, como se mostra na fig., o prolongamento da carga q , o qual é anulado por uma carga de mesma intensidade e de sentido contrário.



Em cada um dos trechos, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = M^* \quad (2.2)$$

$$EIw_3''(x) = -M_3(x) = M^* + P(x - b) \quad (2.3)$$

$$EIw_4''(x) = -M_4(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (2.4)$$

$$EIw_5''(x) = -M_5(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 - \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (2.5)$$

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1'(x) = C_1 \quad (3.1)$$

$$EIw_2'(x) = C_2^* + M^*x - M^*a + M^*a = C_2 + M^*(x - a) \quad (3.2)$$

$$EIw_3'(x) = C_3 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 \quad (3.3)$$

$$EIw_4'(x) = C_4 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 \quad (3.4)$$

$$EIw_5'(x) = C_5 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 - \frac{1}{6}q(x - d)^3 \quad (3.5)$$

A expressão (3.2) corresponde ao segundo artifício, que consiste em somar e subtrair o termo M^*a , de que resulta o termo $M^*(x - a)$, que passa a ser integrado, assim como os termos $P(x - b)$, $q(c - x)^2$, ... sem abrir os parenteses. Tal procedimento é legítimo, visto que altera apenas a constante de integração.

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1(x) = C_1x + D_1 \quad (4.1)$$

$$EIw_2(x) = C_2x + D_2 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 \quad (4.2)$$

$$EIw_3(x) = C_3x + D_3 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 \quad (4.3)$$

$$EIw_4(x) = C_4x + D_4 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 \quad (4.4)$$

$$EIw_5(x) = C_5x + D_5 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 - \frac{1}{24}q(x - d)^4 \quad (4.5)$$

Considerando a continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos transversais e de rotações) na interface dos trechos, obtém-se:

$$w_1'(a) = w_2'(a) \quad w_2'(b) = w_3'(b) \dots \Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_5 = C \quad (5')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_2(b) = w_3(b) \dots \Rightarrow D_1 = D_2 = \dots = D_5 = D \quad (5'')$$

Os resultados anteriores podem ser resumidos da seguinte maneira:

$$M(x) = 0 \Big|_1 - M^* \Big|_2 + P(x - b) \Big|_3 - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \Big|_4 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \Big|_5 \quad (6')$$

$$EIw(x) = Cx + D \Big]_1 + \frac{1}{2} M^* (x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{6} P(x-b)^3 \Big]_3 + \frac{1}{24} q(x-c)^4 \Big]_4 - \frac{1}{24} q(x-d)^4 \Big]_5$$

$$EIw'(x) = C \Big]_1 + M^* (x-a) \Big]_2 + \frac{1}{2} P(x-b)^2 \Big]_3 + \frac{1}{6} q(x-c)^3 \Big]_4 - \frac{1}{6} q(x-d)^3 \Big]_5 \quad (6''')$$

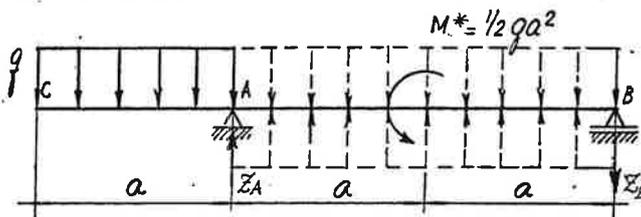
onde o *i*-ésimo colchete indica que devem ser omitidos os termos à direita, quando se considera um ponto do *i*-ésimo trecho.

Na viga que se está considerando, as constantes *C* e *D* são determinadas com as condições de contorno:

$$w(3a) = 0 \quad w'(3a) = 0 \quad (7)$$

EXEMPLO.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto *C* da viga de rigidez constante *EI* da fig.



Somando e subtraindo a carga uniforme *q* no trecho *AB*, tem-se:

$$M(x) = -\frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 + \frac{1}{2} q(x-a)^2 + Z_A(x-a) \Big]_2 - M^* \Big]_3 \quad (A)$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 - \frac{1}{2} q(x-a)^2 - Z_A(x-a) \Big]_2 + M^* \Big]_3 \quad (B)$$

$$EIw'(x) = C + \frac{1}{6} qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6} q(x-a)^3 - \frac{1}{2} Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a) \Big]_3 \quad (C)$$

$$EIw(x) = Cx + D + \frac{1}{24} qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24} q(x-a)^4 - \frac{1}{6} Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a)^2 \Big]_3 \quad (D)$$

onde:

$$Z_A = \frac{3}{2} qa \quad (E)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w(a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(a)^2 = 0 \quad (F)$$

$$w(3a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(3a)^2 - \frac{1}{24} q(2a)^2 - \frac{1}{6} (\frac{3}{2} qa)(2a)^3 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} qa)a^2 = 0 \quad (G)$$

obtêm-se as constantes:

$$C = -\frac{11}{24} qa^3 \quad D = \frac{5}{12} qa^4 \quad (H)$$

de modo que:

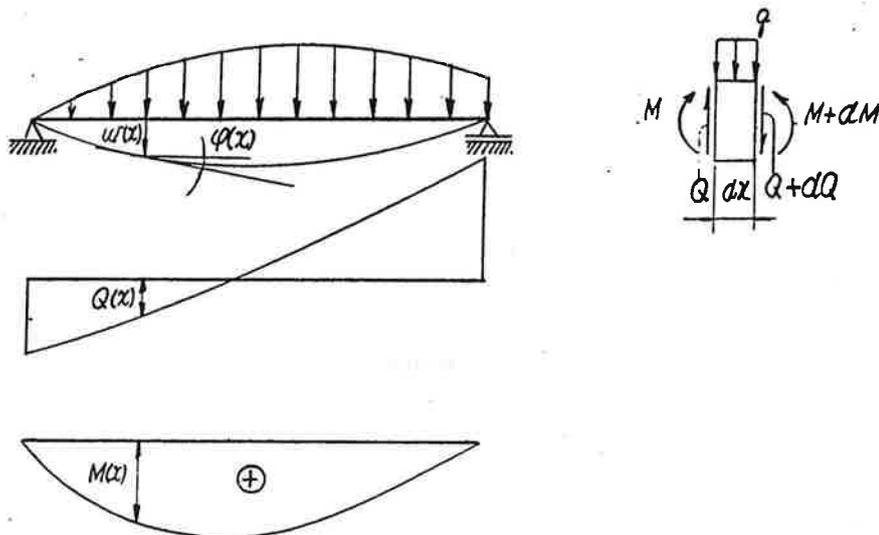
$$EIw(x) = -\frac{11}{24}qa^3x + \frac{5}{12}qa^4 + \frac{1}{24}qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24}q(x-a)^4 - \frac{1}{6}Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a)^2 \Big]_3$$
$$EIw'(x) = -\frac{11}{24}qa^3 + \frac{1}{6}qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6}q(x-a)^3 - \frac{1}{2}Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a) \Big]_3$$

No ponto C, tem-se:

$$w_C = w(0) = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad \varphi_C = w'_C = w'(0) = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (J)$$

ANALOGIA DE MOHR.

Considere-se uma viga, como a que se mostra na fig., submetida ao carregamento $q(x)$ que provoca flexão normal simples.



O equilíbrio de um segmento de dimensão dx , limitado à esquerda pela seção transversal caracterizada pela coordenada x , a qual é solicitada pelos esforços solicitantes Q e M , e à direita pela seção transversal caracterizada pela coordenada $x+dx$, a qual é solicitada pelos esforços solicitantes $Q+dQ$ e $M+dM$, é expresso pelas seguintes equações:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow (Q + dQ) - Q + q dx = 0 \quad (1')$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow (M + dM) - M - Q dx + q dx \frac{1}{2} dx = 0 \quad (1'')$$

Desprezando o termo de segunda ordem $\frac{1}{2} q dx^2$, obtêm-se as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (2')$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (2'')$$

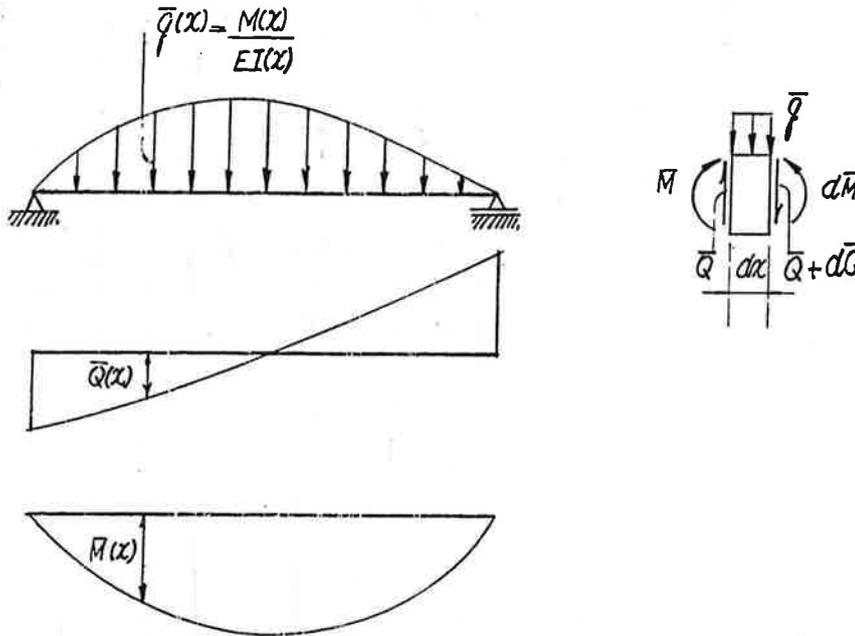
Em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x , o deslocamento transversal w e a rotação ϕ podem ser determinados mediante a integração da equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

Considere-se, em seguida, na mesma viga, o carregamento transversal $\bar{q}(x)$ - denominado *carregamento fictício* - dado em cada ponto, como se mostra na fig., por:

$$\bar{q}(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4)$$

onde $M(x)$ é o momento fletor correspondente ao carregamento real $q(x)$.



As equações diferenciais de equilíbrio para este carregamento são dadas por:

$$\frac{d\bar{Q}}{dx} = -\bar{q} \quad (5')$$

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q} \Rightarrow \frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\bar{q} \quad (5'')$$

Substituindo na segunda das expressões (5'') o valor de \bar{q} dado pela expressão (4), obtém-se:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (6)$$

Considerando, em seguida, a expressão (3), pode-se escrever:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (7)$$

isto é, a função $\bar{M}(x)$, que corresponde ao momento fletor na viga submetida ao carregamento fictício $\bar{q}(x)$, e a função $w(x)$, que corresponde ao deslocamento transversal nos

pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real $q(x)$, diferem entre si por uma função linear, ou seja:

$$\bar{M} = w + Cx + D \quad (8)$$

Substituindo o valor de \bar{M} na primeira das expressões (5''), obtém-se:

$$\bar{Q} = \frac{dw}{dx} + C = \text{tg}\varphi + C \approx \varphi + C \quad (9)$$

isto é, a função $\bar{Q}(x)$, que corresponde a força cortante na viga submetida ao carregamento fictício $\bar{q}(x)$, e a função $\varphi(x)$, que corresponde à rotação nos pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real $q(x)$, diferem entre si por uma constante.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento w é nulo nos pontos A e B de coordenadas x_A e x_B , e se as condições de contorno da viga submetida ao carregamento fictício são tais que $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{M}_B = 0$ nesses pontos, resulta, segundo a expressão (8):

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (10')$$

$$0 = 0 + Cx_B + D \quad (10'')$$

ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (11)$$

Nessas condições, o deslocamento transversal w e a rotação φ nos pontos da viga submetida ao carregamento real são iguais, respectivamente, ao momento fletor \bar{M} e à força cortante \bar{Q} nas seções da viga submetida ao carregamento fictício.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento w é nulo no ponto A de coordenada x_A e a rotação é nula no ponto B de coordenada x_B , e se as condições de apoio da viga submetida ao carregamento fictício são tais que se tem $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{Q}_B = 0$ nesses pontos, resulta, segundo as expressões (8) e (9),

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (12')$$

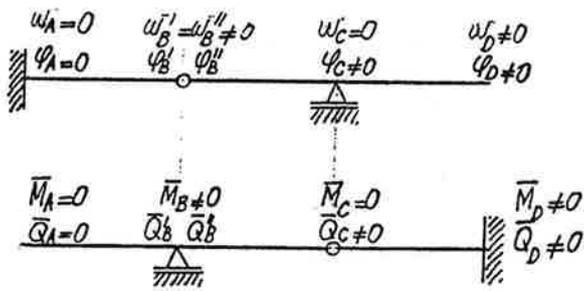
$$0 = 0 + D \quad (12'')$$

ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (13)$$

Na viga que se mostra na fig., é necessário analisar os pontos A, B, C e D. No ponto A, para que se tenha $w_A = 0$ e $\varphi_A = 0$, ou seja, $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{Q}_A = 0$, não se deve introduzir apoio; no ponto B, para que se tenha $w_B^- = w_B^+ \neq 0$ e $\varphi_B^- \neq \varphi_B^+$ (o sinal negativo significa imediatamente à esquerda; o sinal positivo significa imediatamente à direita), ou seja, $\bar{M}_A^- = M_B^+ \neq 0$ e $\bar{Q}_B^- \neq Q_B^+$, deve-se introduzir um apoio simples; no ponto C, para que se tenha $w_C = 0$ e $\varphi_C^- = \varphi_C^+ \neq 0$, ou seja, $\bar{M}_C = 0$ e $\bar{Q}_C^- = \bar{Q}_C^+ \neq 0$, deve-se introduzir uma

articulação; no ponto D, para que se tenha $w_D \neq 0$ e $\varphi_D \neq 0$, ou seja, $\bar{M}_D \neq 0$ e $\bar{Q}_D \neq 0$, deve-se introduzir um engastamento.



Convém notar que:

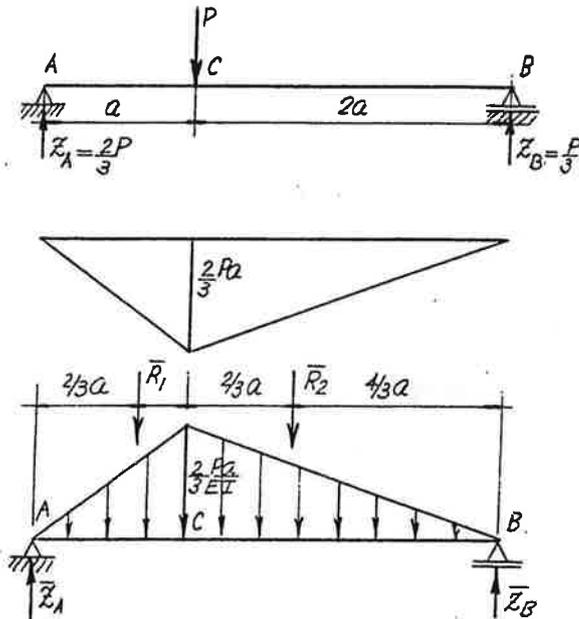
$M > 0 \Rightarrow \bar{q} > 0$, isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{M} > 0 \Rightarrow w > 0$, isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{Q} > 0 \Rightarrow \varphi > 0$, isto é, no sentido horário de x para z.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento vertical no ponto C bem como a rotação nos apoios A e B da viga de rigidez EI da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} a = \frac{1}{3} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} = 2\bar{R}_1 \quad (A'')$$

Considerando o equilíbrio da estrutura submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$(\Sigma M)_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 3a = \bar{R}_1 \frac{7}{3}a + \bar{R}_2 \frac{4}{3}a = 5\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$(\Sigma M)_a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 3a = \bar{R}_1 \frac{2}{3}a + \bar{R}_2 \frac{5}{3}a = 4\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B'')$$

de modo que:

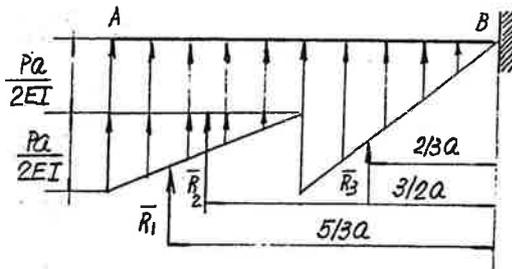
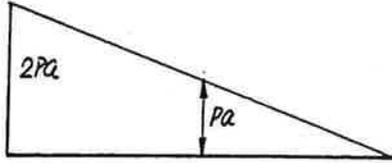
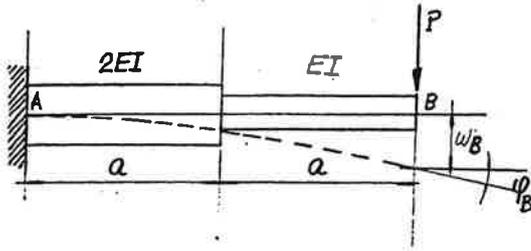
$$\varphi_A = \bar{Q}_A = \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C')$$

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = -\bar{R}_B = -\frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C'')$$

$$w_C = \bar{M}_C = \bar{R}_A a - \bar{R}_1 \frac{1}{3}a = \frac{4}{3} \bar{R}_1 a = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (C''')$$

EXEMPLO 2.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto B da viga da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A''')$$

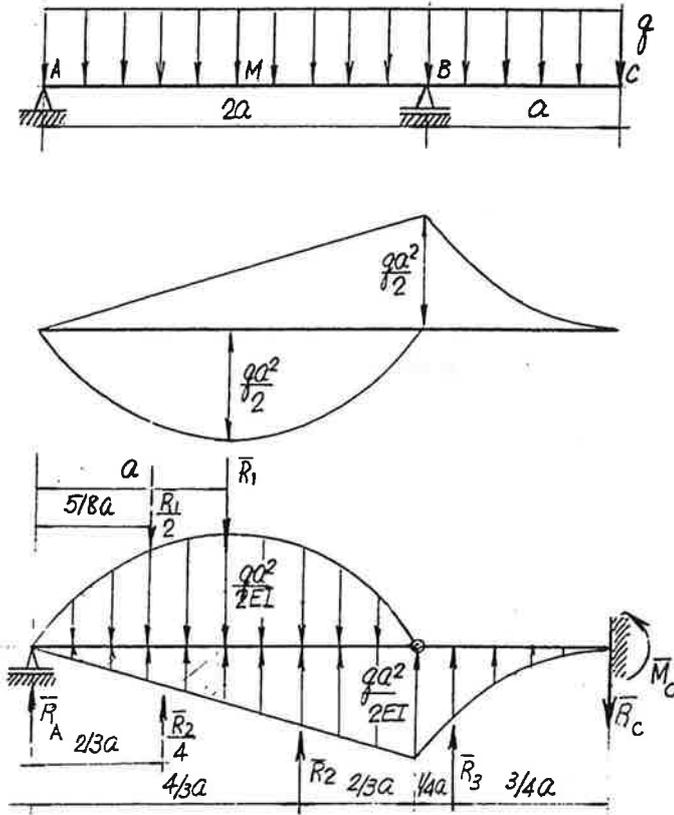
de modo que:

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$w_B = \bar{M}_B = \bar{R}_1 \frac{5}{3} a + \bar{R}_2 \frac{3}{2} a + \bar{R}_3 \frac{2}{3} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI} \quad (B''')$$

EXEMPLO 3.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, manutenção do apoio externo A, transformação do apoio interno B em articulação e engastamento da extremidade livre C, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A''')$$

Considerando a articulação no ponto B da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 2a + \bar{R}_2 \frac{2}{3} a - \bar{R}_1 a = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_A - \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C + \bar{R}_A 3a - \bar{R}_1 2a + \bar{R}_2 \frac{5}{3}a + \bar{R}_3 \frac{3}{4}a = \frac{1}{8} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$

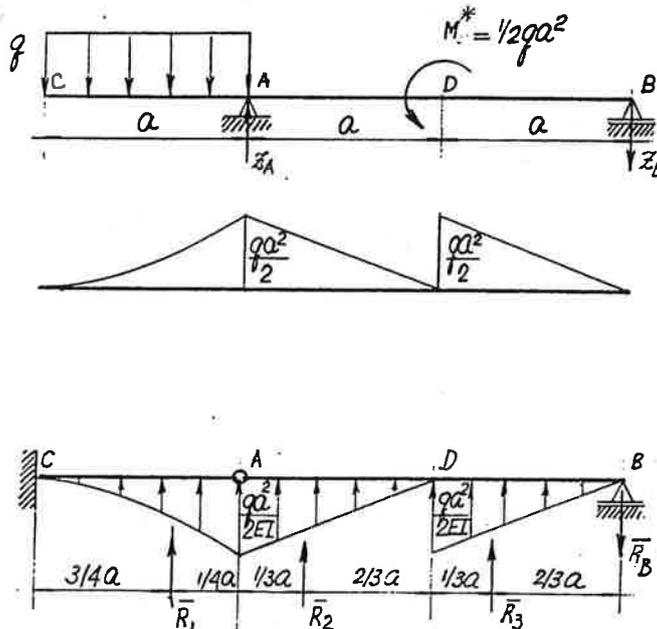
$$\varphi_M = \bar{Q}_M = \bar{R}_A - \frac{1}{2}\bar{R}_1 + \frac{1}{4}\bar{R}_2 = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C''')$$

$$w_M = \bar{M}_M = \bar{R}_A a - \frac{1}{2}\bar{R}_1 \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}\bar{R}_2 \frac{1}{3}a = \frac{1}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C''''')$$

O exemplo mostra a conveniência de considerar separadamente o carregamento no vão e no balanço, de maneira que a distribuição de momentos fletores e o carregamento fictício correspondente sejam representados por figuras geométricas simples (no caso triângulos e parábolas), com área e posição do centro de gravidade sejam conhecidos.

EXEMPLO 4.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, engastamento da extremidade livre C, transformação do apoio interno A em articulação e manutenção do apoio externo B, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

Considerando a articulação no ponto A da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 2a - \bar{R}_2 \frac{1}{3} a - \bar{R}_3 \frac{5}{3} a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{5}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_B - \bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C = -\bar{R}_B 3a + \bar{R}_1 \frac{3}{4} a + \bar{R}_2 \frac{4}{3} a + \bar{R}_3 \frac{7}{3} a = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I.

**TENSÕES TANGENCIAIS NA
FLEXÃO NORMAL SIMPLES**

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

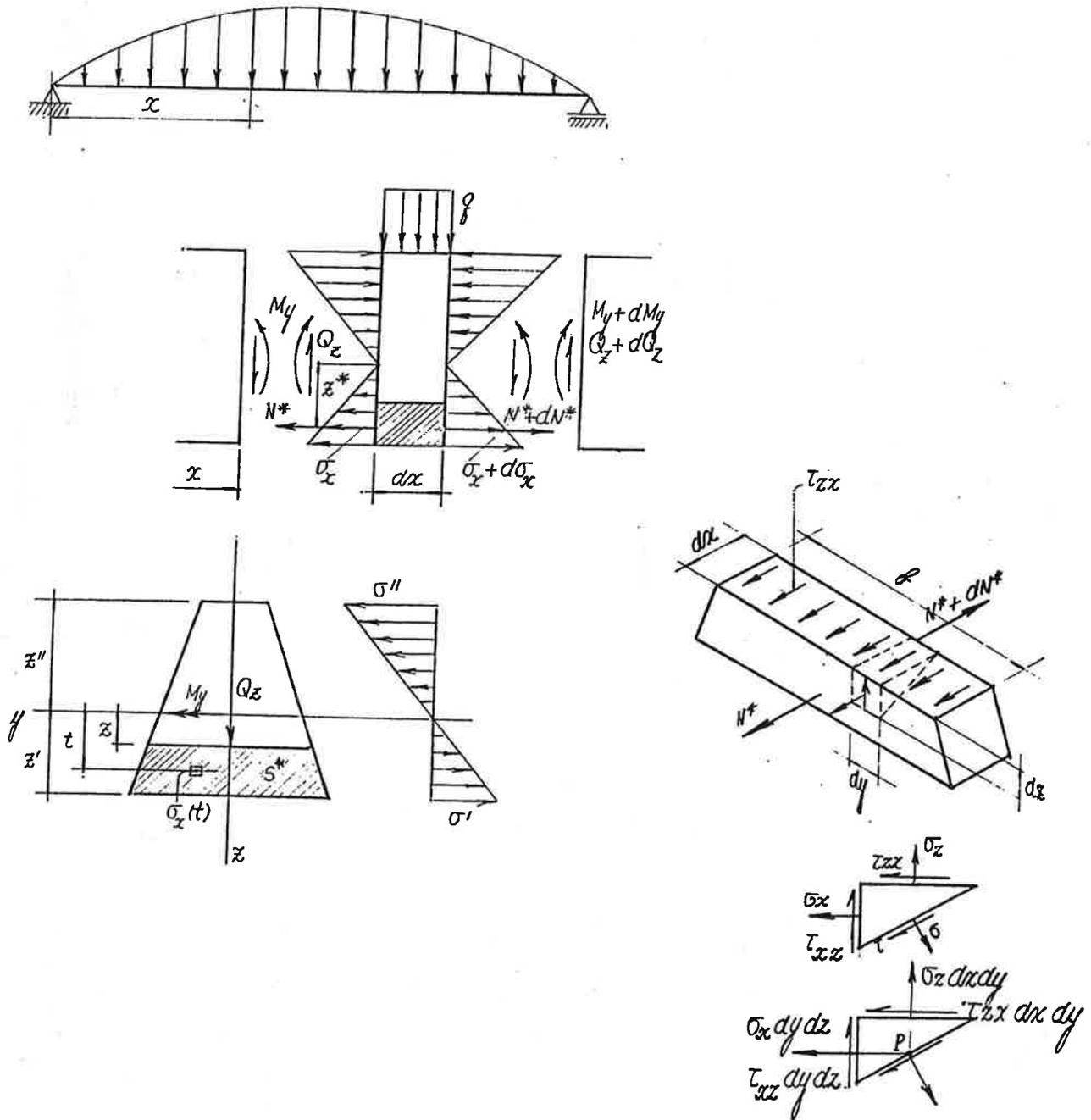
2000

TENSÕES TANGENCIAIS NA FLEXÃO NORMAL SIMPLES.

TENSÕES TANGENCIAIS EM SEÇÕES CHEIAS.

Considere-se em uma viga, como a que se mostra na fig., submetida a flexão normal simples, um segmento de dimensão dx .

Na face caracterizada pela coordenada x , ao momento fletor M_y corresponde a distribuição de tensões normais σ_x , enquanto, na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, ao momento fletor M_y+dM_y corresponde a distribuição de tensões normais $\sigma_x+d\sigma_x$.



Considere-se, em seguida, nesse segmento o elemento indicado na fig., cuja face superior é caracterizada pela coordenada z .

Na face caracterizada pela coordenada x , à distribuição de tensões normais σ_x correspondem a força N^* e o momento M_y^* , dados por:

$$N^* = \int_{S^*} \sigma_x(t) dS = \int_{S^*} \frac{M_y}{I_y} t dS = \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} t dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (1')$$

$$M_y^* = \int_{S^*} \sigma(t) t dS = \int_{S^*} \frac{M_y}{I_y} t^2 dS = \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} t^2 dS = M_y \frac{I_y^*}{I_y} \quad (1'')$$

onde M_{sy}^* é o momento estático e I_y^* é o momento de inércia da região hachurada relativamente ao eixo y .

O ponto C^* de aplicação da força N^* é caracterizado pela coordenada z^* , tal que:

$$N^* z^* = M_y^* \Rightarrow z^* = \frac{M_y^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma_x(t) t dS}{\int_{S^*} \sigma_x(t) dS} = \frac{I_y^*}{M_{sy}^*} \quad (2)$$

A expressão acima corresponde à projeção no plano da seção transversal do centro de gravidade do "sólido das tensões" relativo à região S^* , cujo volume, segundo a expressão (1'), é igual à força N^* .

Na face caracterizada pela coordenada $x + dx$, à distribuição de tensões normais $\sigma_x + d\sigma_x$ correspondem a força $N^* + dN^*$ e o momento $M_y^* + dM_y^*$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{zx} = \tau_{zx}(z)$ na face superior do elemento é determinada a partir do equilíbrio de forças segundo a direção x , ou seja:

$$\tau_{zx} b dx = dN^* \Rightarrow \tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{dN^*}{dx} \quad (3)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de N^* dado pela expressão (1'), obtém-se:

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left[M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{dM_y}{dx} \frac{M_{sy}^*}{I_y} + M_y \frac{d}{dx} \left(\frac{M_{sy}^*}{I_y} \right) \right] \quad (4)$$

Em vigas de seção constante o termo $\frac{M_{sy}^*}{I_y}$ não varia com x , de modo que:

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{dM_y}{dx} \frac{M_{sy}^*}{I_y} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (5)$$

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{xz}(z)$ na seção transversal é determinada a partir do equilíbrio do elemento infinitesimal prismático que se mostra na fig., de dimensões dx, dy, dz , no qual as tensões σ_x e τ_{zx} já são conhecidas, a tensão σ_z será obtida adiante na expressão (14), as tensões σ e τ serão obtidas considerando o equilíbrio de forças segundo duas direções perpendiculares, e a tensão τ_{xz} é obtida considerando o equilíbrio de momentos em relação ao ponto P e segundo a direção y , ou seja:

$$\tau_{xz} dy dz \frac{1}{2} dx = \tau_{zx} dx dy \frac{1}{2} dz \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (6)$$

É importante notar que a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é numericamente igual à força cortante Q_z .

De fato:

$$\int_S \tau_{xz} dS = \int_{-z''}^{z'} \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} b dz = \frac{Q_z}{b} \int_{-z''}^{z'} M_{sy}^* dz \quad (7)$$

Lembrando que, sendo $u(z)$ e $v(z)$ duas funções contínuas de z com derivadas de primeira ordem contínuas,

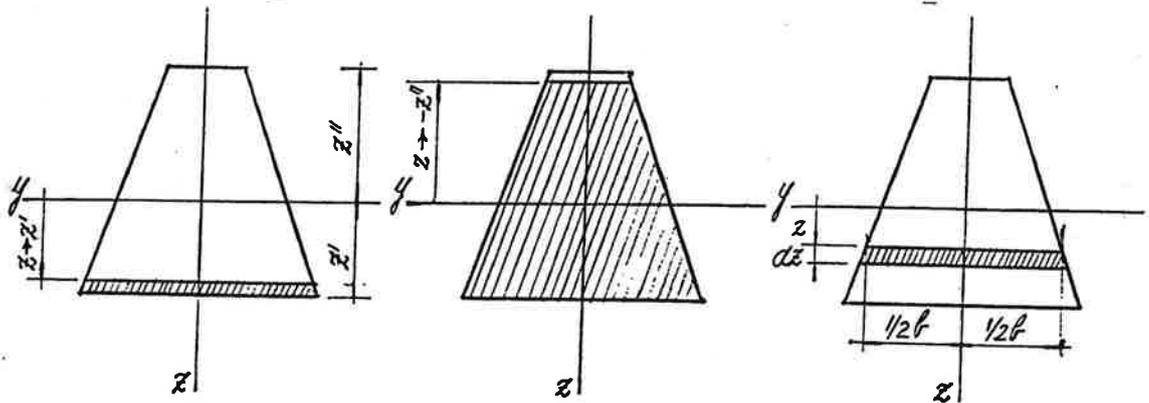
$$\int_{-z''}^{z'} u \frac{dv}{dz} dz = u v \Big|_{-z''}^{z'} - \int_{-z''}^{z'} \frac{du}{dz} v dz$$

tem-se:

$$\int_{-z''}^{z'} M_{sy}^* dz = M_{sy}^* z \Big|_{-z''}^{z'} - \int_{-z''}^{z'} \frac{dM_{sy}^*}{dz} z dz \quad (7')$$

Como se mostra na fig., $M_{sy}^* = 0$ quando $z = -z''$ (por ser $S^* = S$ e, portanto, $M_{sy}^* = M_{sy} = 0$), e quando $z = z'$ (por ser $S^* = 0$), de modo que:

$$M_{sy}^* z \Big|_{-z''}^{z'} = 0 \quad (7'')$$



Por outro lado, como se mostra na fig., quando se passa da coordenada z para a coordenada $z+dz$, o momento estático passa de M_{sy}^* para $M_{sy}^* + dM_{sy}^*$, onde:

$$dM_{sy}^* = -b dz z$$

de modo que:

$$- \int_{-z''}^{z'} \frac{dM_{sy}^*}{dz} z dz = \int_{-z''}^{z'} b z^2 dz = \int_S z^2 dS = I_y \quad (7''')$$

Substituindo na expressão (7) os resultados anteriores obtém-se:

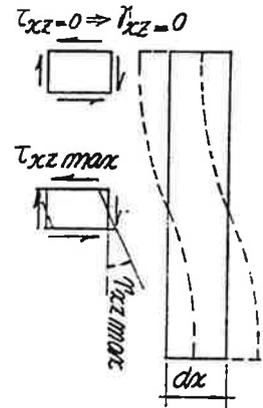
$$\int \tau_{xz} dS = Q_z \quad (8)$$

À tensão τ_{xz} correspondente à deformação $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$ que produz o efeito, indicado na fig., de distorcer as seções transversais, o que contraria a hipótese, adotada na obtenção da expressão $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$, de as seções planas se manterem planas.

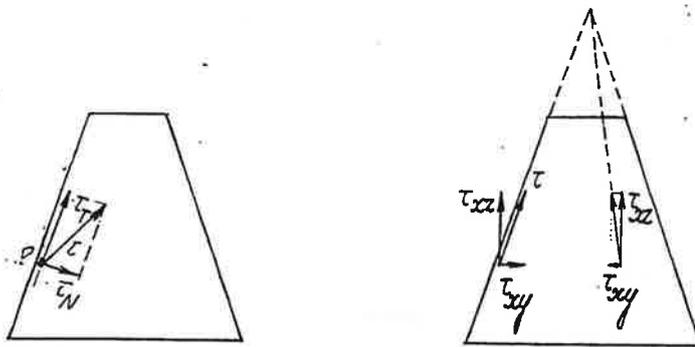
Todavia, o erro introduzido pode ser desprezado quando a altura h da viga é pequena relativamente ao vão l , o que acontece na maioria dos casos práticos. No caso de viga biapoiada submetida a carregamento uniforme q , a tensão σ^* nos pontos mais solicitados da seção mais solicitada, obtida a partir da teoria da elasticidade, é dada por:

$$\sigma^* = \sigma_0^* \left[1 + \frac{4}{15} \frac{h^2}{\ell^2} \right] = \sigma_0^* \lambda^* \quad (9)$$

onde σ_0^* é o valor obtido com a resistência dos materiais e λ^* , o respectivo fator de correção.



Considerando-se um ponto P no contorno da seção transversal, conclui-se que a componente τ_{xz} corresponde a componente τ_{xy} , de modo que a resultante τ seja, como se mostra na fig., tangente ao contorno.



De fato, se a tensão τ não fosse tangente ao contorno, a componente τ_N corresponderia a componente τ'_N na superfície lateral da viga, uma vez que, como se viu na dedução da expressão (6), as tensões tangenciais em planos perpendiculares têm o mesmo valor absoluto, direção perpendicular à interseção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à interseção dos planos. Ora, como não há carregamento na superfície lateral, resulta $\tau'_N = 0$ e, portanto, $\tau_N = 0$, de modo que $\tau = \tau_T$.

Em um ponto da seção transversal a componente τ_{xy} é obtida mediante a construção geométrica indicada na fig.

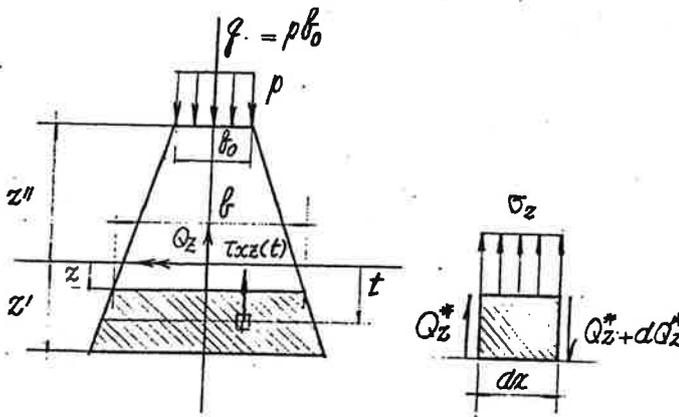
Voltando ao elemento cuja face superior é caracterizada pela coordenada z , verifica-se, como se mostra na fig., que, na face caracterizada pela coordenada x , a resultante Q_z^* das tensões τ_{xz} é dada por:

$$Q_z^* = \int_S \tau_{xz}(t) dS = \int_z^{z'} \frac{Q_z}{b(t)} \frac{M_{sy}^*(t)}{I_y} b(t) dt = \frac{Q_z}{I_y} \int_z^{z'} M_{sy}^*(t) dt = Q_z \frac{J_y^*}{I_y} \quad (10)$$

onde:

$$J_y^* = \int_z^{z'} M_{sy}^*(t) dt \quad (11)$$

enquanto na face caracterizada pela coordenada $x + dx$, a resultante das tensões $\tau_{xz} + d\tau_{xz}$ é dada por $Q_z^* + dQ_z^*$.



A distribuição das tensões normais $\sigma_z = \sigma_z(z)$ na face superior do elemento é determinada a partir do equilíbrio de forças segundo a direção z , ou seja:

$$\sigma_z b dx = dQ_z^* \Rightarrow \sigma_z = \frac{1}{b} \frac{dQ_z^*}{dx} \quad (12)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de Q_z^* dado pela expressão (10), obtém-se:

$$\sigma_z = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left[Q_z \frac{J_y^*}{I_y} \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{dQ_z}{dx} \frac{J_y^*}{I_y} + Q_z \frac{d}{dx} \left(\frac{J_y^*}{I_y} \right) \right] \quad (13)$$

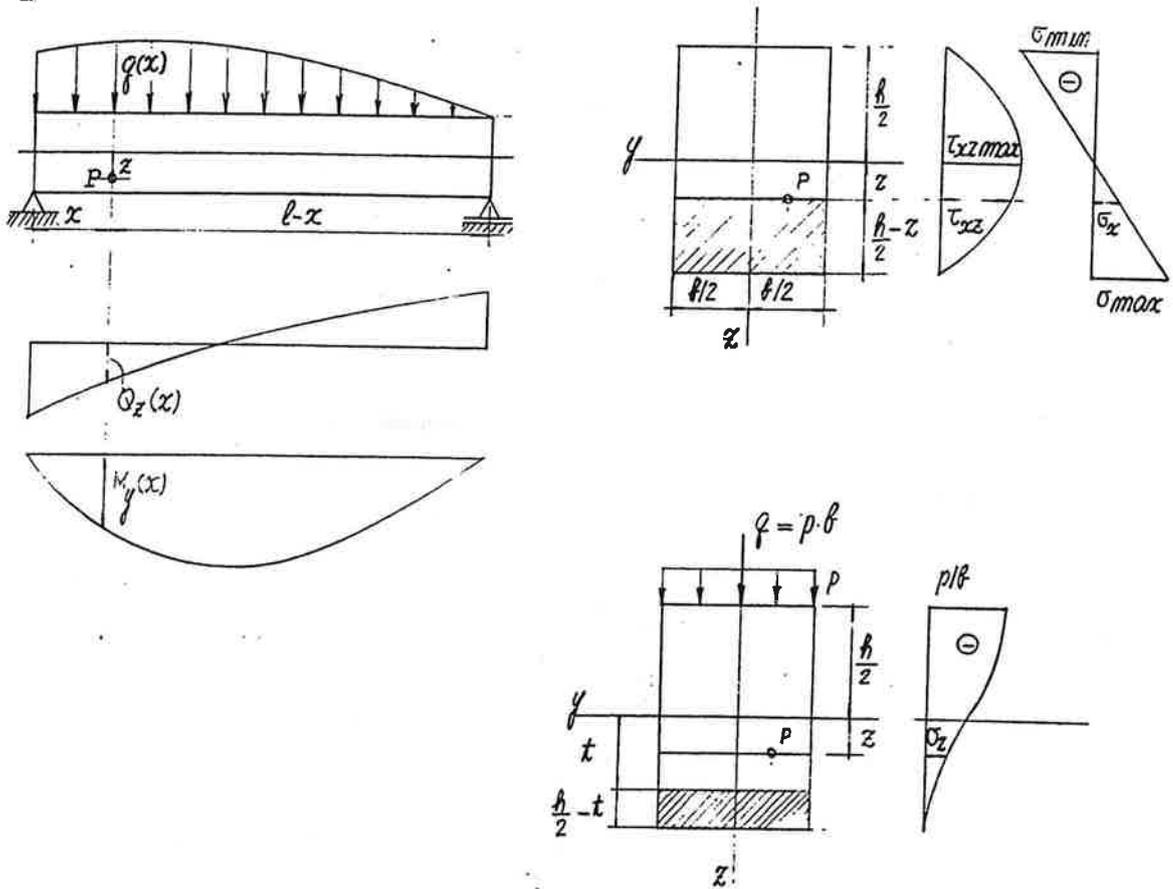
Em vigas de seção constante o termo $\frac{J_y^*}{I_y}$ não varia com x , de modo que:

$$\sigma_z = \frac{1}{b} \frac{dQ_z}{dx} \frac{J_y^*}{I_y} = -\frac{q}{b} \frac{J_y^*}{I_y} \quad (14)$$

O sinal negativo justifica-se pelo fato de o carregamento q provocar tensões normais σ_z de compressão.

EXEMPLO 1.

Determinar as tensões $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ em um ponto P de coordenadas (x,z) da viga da fig., submetida à carga transversal $q(x)$.



A tensão normal σ_x , no plano da seção transversal, é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = 12 \frac{M_y}{b h^3} z \quad (A)$$

de modo que:

$$\sigma_{x \text{ máx}} = -\sigma_{x \text{ mín}} = \sigma(\frac{1}{2}h) = 6 \frac{M_y}{b h^2} \quad (B)$$

A tensão tangencial $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ é dada por:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{b I_y} \quad (C)$$

onde:

$$M_{sy}^* = b \left(\frac{h}{2} - z\right) \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right)\right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right) b \left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \quad (D)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{b} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{12}{b h^3} = \frac{Q_z}{b h} \left(\frac{3}{2} - 6 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (E)$$

Para $z = \pm \frac{1}{2}h$, $\tau_{xz} = 0$, para $x = 0$,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx \text{ máx}} = \frac{3 Q_z}{2 b h} \quad (F)$$

A tensão normal σ_z no plano horizontal é dada por:

$$\sigma_z = -\frac{q}{b} \frac{J_y^*}{I_y} \quad (G)$$

onde:

$$J_y^* = \int_z^{\frac{h}{2}} M_{sy}^*(t) dt = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - t^2 \right) dt = \frac{b z^3}{6} - \frac{b h^2 z}{8} + \frac{b h^3}{24} \quad (H)$$

de modo que:

$$\sigma_z = -\frac{q}{b} \lambda(z) \quad (I)$$

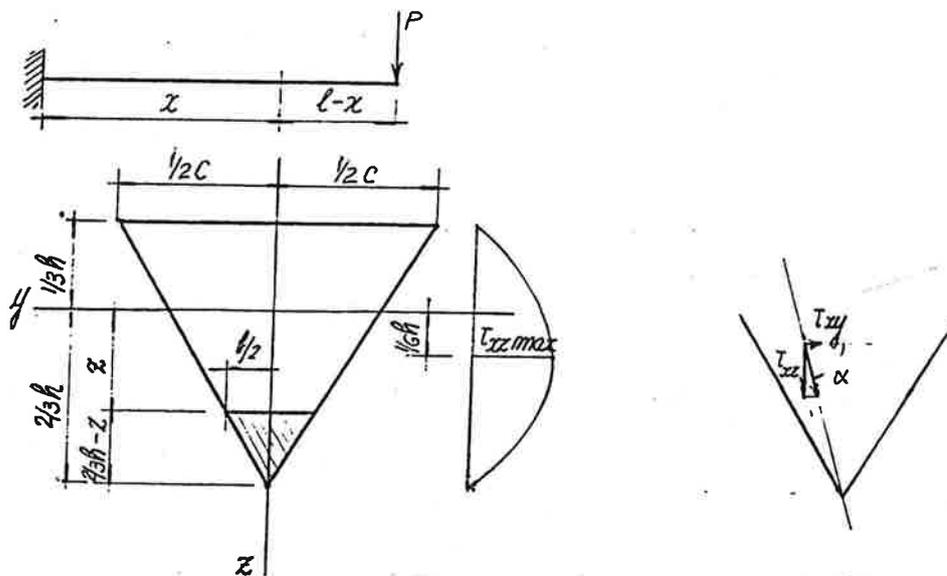
onde:

$$\lambda(z) = 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2} \quad (J)$$

Para $z = \frac{1}{2}h$, $\lambda_z = 0$; para $z = 0$, $\lambda_z = \frac{1}{2}$; para $z = -\frac{1}{2}h$, $\lambda_z = 1$.

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões τ_{xy} e τ_{xz} em um ponto P da seção transversal da viga da fig.



Nos pontos caracterizados pela coordenada z , a tensão tangencial τ_{xz} é dada por:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (A)$$

onde:

$$Q_z = P \quad (B')$$

$$b = b(z) = \frac{c}{h} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \quad (B'')$$

$$I_y = \frac{c h^3}{36} \quad (B''')$$

$$M_{sy}^* = \frac{1}{2} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left[\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \right] = \frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \quad (B''')$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{b} \frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \frac{36}{c h^3} = \frac{12 Q_z}{c h^3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \quad (C)$$

A tensão tangencial τ_{xz} é máxima quando $\frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0$, ou seja, quando $z = \frac{1}{6} h$, de modo que:

$$\tau_{xz \text{ máx}} = \tau_{xz} \left(\frac{1}{6} h \right) = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{\frac{1}{2} c h} \quad (D)$$

No ponto P de coordenadas (y,z) a tensão tangencial τ_{xy} é dada por:

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xz}}{\tan \alpha} \quad (E)$$

onde, como se mostra na fig., $\alpha = \alpha(y, z)$.

É importante notar que a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é igual à força cortante Q_z .

De fato, em um elemento de área $dS = b dz$, a resultante das tensões tangenciais τ_{xz} é dada por:

$$dF_z = \tau_{xz} dS = \tau_{xz} b dz \quad (F)$$

de modo que:

$$F_z = \int_{\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3} h} \tau_{xz} b dz \quad (G)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de τ_{xz} dado pela expressão (C), obtém-se:

$$F_z = Q_z \quad (H)$$

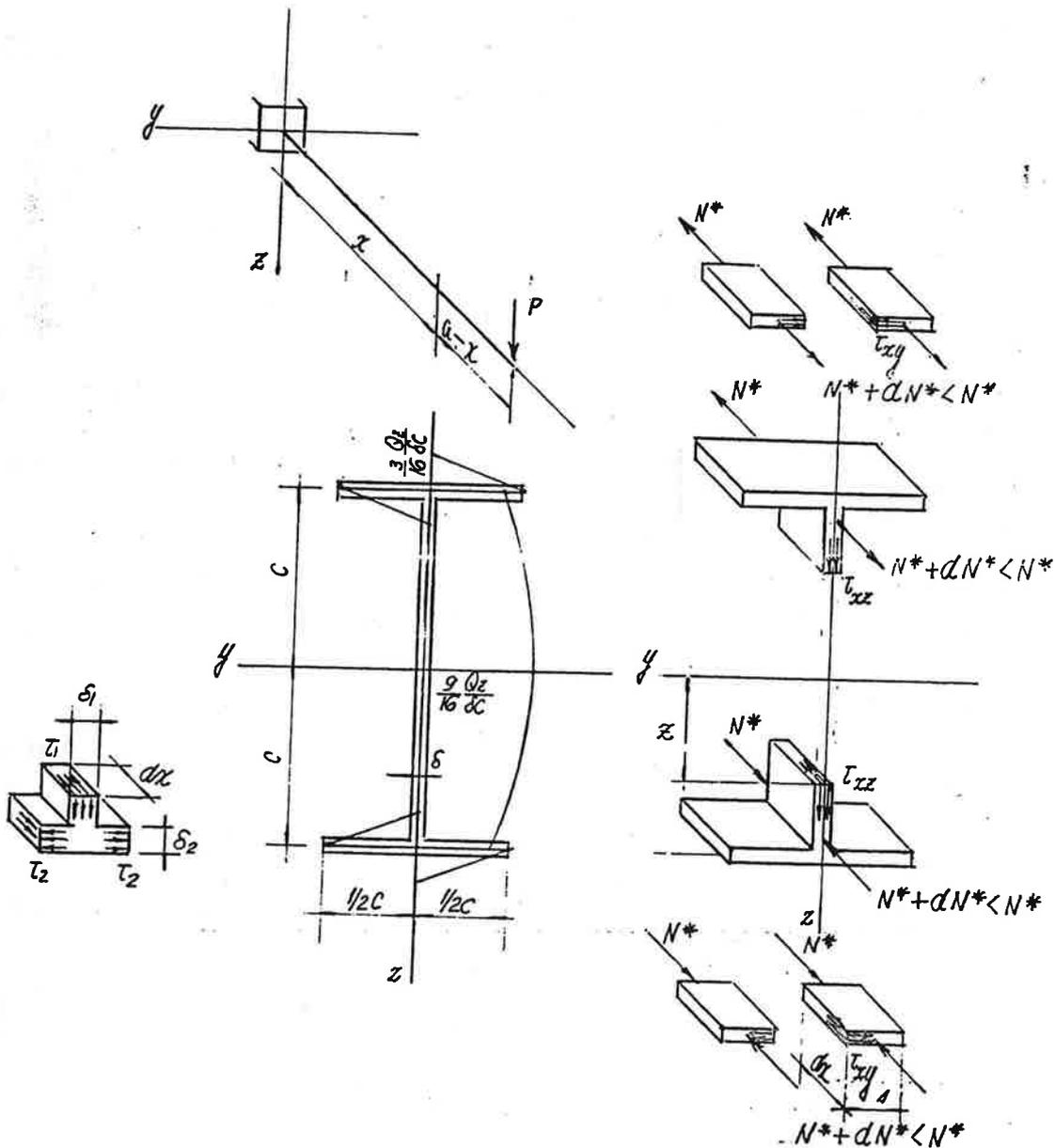
TENSÕES TANGENCIAIS EM SEÇÕES DELGADAS.

A distribuição de tensões tangenciais em seções delgadas é obtida com a formulação apresentada anteriormente, isto é, determina-se o equilíbrio segundo a direção longitudinal de elementos de dimensão dx , considerando que as tensões tangenciais (supostas constantes ao longo da espessura) devem ser tangentes ao contorno da seção e que, em planos perpendiculares, as tensões tangenciais tem mesmo valor absoluto, direção perpendicular à intersecção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à intersecção dos planos.

SEÇÕES ABERTAS SIMÉTRICAS.

Na viga que se mostra na fig, os esforços solicitantes em uma seção caracterizada pela coordenada x são dados por:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a - x) \quad (1)$$



Como o momento fletor é, em valor absoluto, decrescente com x , a resultante N^* das tensões normais σ_x , dada por:

$$N^* = \int_s \sigma_x dS = \int \frac{M_y}{I_y} z dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (2)$$

é decrescente com x , ou seja, $dN^* < 0$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nas "mesas", obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada s , é dada por:

$$\tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (4)$$

O momento de inércia é dado por:

$$I_y = I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = \frac{\delta(2c)^3}{12} + 2\left[\frac{c\delta^3}{12} + c\delta c^2\right] = \frac{8}{3}\delta c^3 + 2\delta c^2 \quad (5)$$

onde $I_y^{(1)}$ é o momento de inércia do retângulo de dimensões $\delta \times 2c$ e $I_y^{(2)}$, o momento de inércia do retângulo de dimensões $c \times \delta$ relativamente ao eixo de y .

Como $\delta \ll c$, resulta:

$$I_y \approx \frac{8}{3}\delta c^2 \quad (5')$$

O momento estático é dado por:

$$M_{sy}^* = \delta s c \quad (6)$$

Substituindo na expressão (4) os valores de I_y e de M_{sy}^* dados pelas expressões (5') e (6), obtém-se:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{\delta} \delta c s \frac{3}{8\delta c^3} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (7)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = \frac{1}{2}(c - \delta) \approx \frac{1}{2}c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ na "alma", obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada z , é dada por:

$$\tau_{zx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (8)$$

onde:

$$M_{sy}^* = M_{sy}^{*(1)} + M_{sy}^{*(2)} = \delta(c-z)\left[c - \frac{1}{2}(c-z)\right] + \delta c c = \frac{1}{2}\delta(3c^2 - z^2) \quad (9)$$

sendo $M_{sy}^{*(1)}$ o momento estático do retângulo de dimensões $\delta \times (c-z)$ e $M_{sy}^{*(2)}$, o momento estático do retângulo de dimensões $\delta \times c$ relativamente ao eixo y .

Substituindo na expressão (8) os valores de I_y e M_{sy}^* dados pelas expressões (5') e (9), obtém-se:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (10)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm(c - \frac{1}{2}\delta) \approx \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

Considerando o equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx indicado na fig., correspondente à união da alma e da mesa (no caso geral, com espessuras δ_1 e δ_2), tem-se:

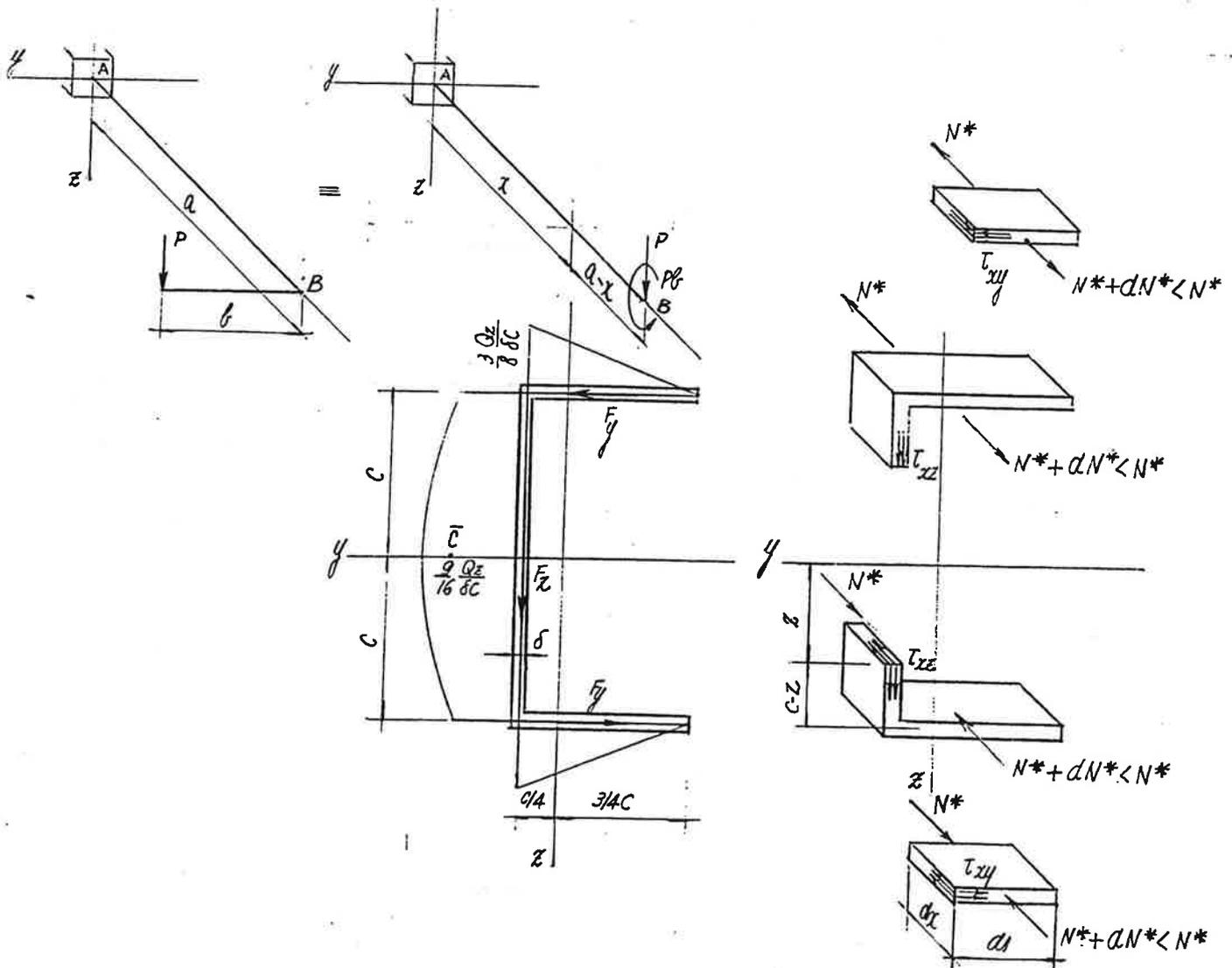
$$\tau_1 \delta_1 dx = 2\tau_2 \delta_2 dx \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{\delta_2} \tau_1 \quad (11)$$

No caso presente, $\tau_1 = \tau_{xz}$, $\tau_2 = \tau_{xy}$ e $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, de modo que $\tau_{xy} = \frac{1}{2}\tau_{xz}$.

SEÇÕES ABERTAS NÃO-SIMÉTRICAS.

Considere-se a estrutura que se mostra na fig. A análise da barra AB, que se supõe um perfil C, pode ser feita considerando os esforços externos estaticamente equivalentes aplicados no ponto B, aos quais correspondem os seguintes esforços solicitantes na seção transversal caracterizada pela coordenada x:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a-x) \quad M_x = Pb \quad (1)$$



A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nos segmentos horizontais, obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada s, é dada por:

$$\tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{\delta I_y} \quad (2)$$

onde:

$$I_y = I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = \frac{\delta (2c)^3}{12} + 2\left[\frac{c \delta^3}{12} + c \delta c^2\right] \approx \frac{8}{3} \delta c^3 \quad (3')$$

$$M_{sy}^* = \delta s c \quad (3'')$$

de modo que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{\delta} \delta c s \frac{3}{8 \delta c^3} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (4)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{8} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ no segmento vertical, obtida a partir do equilíbrio segundo a direção x do elemento de dimensão dx caracterizado pela coordenada z , é dada por:

$$\tau_{xz} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{\delta I_y} \quad (5)$$

onde:

$$M_{sy}^* = M_{sy1}^* + M_{sy2}^* = \delta (c - z) \left[c - \frac{1}{2}(c - z) \right] + \delta c c = \frac{1}{2} \delta (3c^2 - z^2) \quad (6)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{\delta} \frac{1}{2} \delta (3c^2 - z^2) \frac{3}{8 \delta c^3} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

A resultante F_y das tensões τ_{xy} em um dos segmentos horizontais é dada por:

$$dF_y = \tau_{xy} \delta ds \Rightarrow F_y = \int_{s=0}^{s=c} \tau_{xy} \delta ds = \frac{3}{16} Q_z \quad (8)$$

e a resultante F_z das tensões τ_{xz} no segmento vertical é dada por:

$$dF_z = \tau_{xz} \delta dz \Rightarrow F_z = \int_{z=-c}^{z=c} \tau_{xz} \delta dz = Q_z \quad (9)$$

A distribuição de tensões tangenciais obtida corresponde, portanto, aos seguintes esforços solicitantes:

1) força cortante nula segundo a direção y , visto que:

$$Q_y = F_y - F_y = 0 \quad (10)$$

uma vez que o sentido das tensões τ_{xy} nos segmentos horizontais são opostos.

2) força cortante Q_z .

3) momento segundo a direção x , dada por:

$$M_x = F_z \frac{c}{4} + 2F_y c = Q_z \frac{c}{4} + 2 \frac{3}{16} Q_z c = Q_z \left(\frac{c}{4} + \frac{3}{8} c \right) \quad (11)$$

Os esforços solicitantes Q_z e M_x são estaticamente equivalentes à força Q_z aplicada em um ponto \bar{C} - denominado *centro de cisalhamento* - caracterizado pela coordenada \bar{y} , tal que:

$$Q_z \bar{y} = M_x \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{Q_z} = \frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \quad (12)$$

Conclui-se, pois, que a distribuição de tensões obtidas só é válida quando na seção transversal os esforços solicitantes forem os seguintes:

$$Q_y = 0 \quad Q_z \quad M_x = Q_z \bar{y} = Q_z \left(\frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \right) \quad (13)$$

ou, em vista das expressões (1), quando:

$$b = \bar{y} = \frac{c}{4} + \frac{3}{8}c \quad (14)$$

Quando $b \neq \bar{y}$ procede-se à seguinte decomposição:

$$M_x = M'_x + M''_x \quad (15)$$

onde:

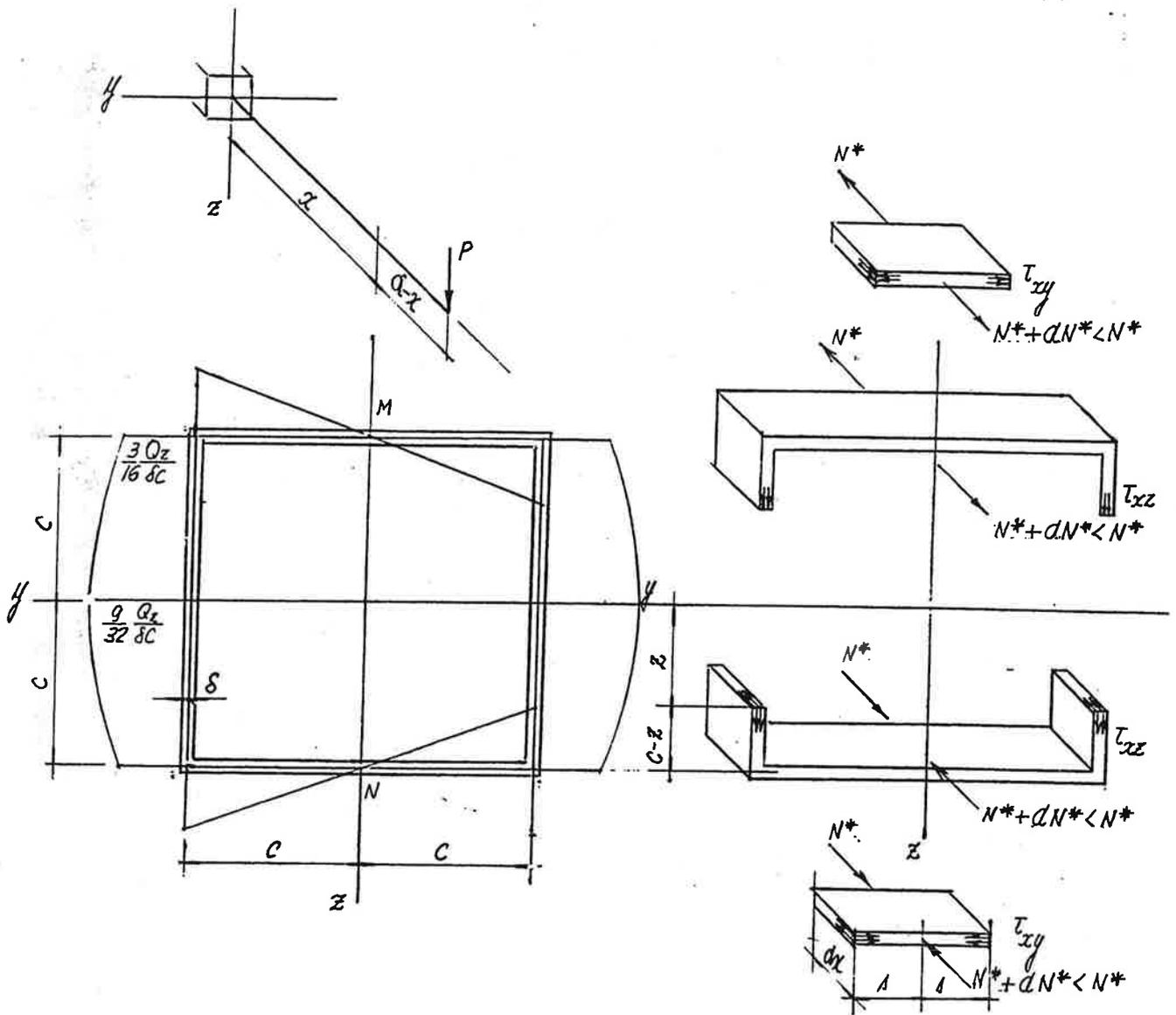
$$M'_x = P \bar{y} \quad M''_x = P (b - \bar{y}) \quad (16)$$

O carregamento externo composto de P e M'_x provoca flexão desacompanhada de torção (à qual corresponde a distribuição de tensões tangenciais determinada acima), ao passo que o carregamento M''_x provoca, satisfeitas certas condições, torção desacompanhada de flexão (à qual corresponde a distribuição de tensões a ser determinada em capítulo subsequente).

SEÇÕES FECHADAS SIMÉTRICAS.

Na viga que se mostra na fig, os esforços solicitantes em uma seção caracterizada pela coordenada x são dados por:

$$Q_z = P \quad M_y = -P(a-x) \quad (1)$$



A distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ pode ser obtida considerando-se, como se mostra na fig, o equilíbrio na direção longitudinal de elementos de dimensão dx , simétricos relativamente ao eixo y e caracterizados pelas coordenadas s e z . Assim, para as tensões $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, tem-se:

$$2 \tau_{yx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z M_{sy}^*}{2\delta I_y} \quad (2)$$

onde:

$$I_y = 2I_y^{(1)} + 2I_y^{(2)} = 2 \frac{\delta (2c)^3}{12} + 2 \left[\frac{2c\delta^3}{12} + 2c\delta c^2 \right] \approx \frac{16}{3} \delta c^3 \quad (3')$$

$$M_{sy}^* = 2s\delta c = 2\delta cs \quad (3'')$$

de modo que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_z}{2\delta} 2\delta cs \frac{3}{16\delta c^3} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c^2} s \quad (4)$$

Quando $s = 0$, $\tau_{xy} = 0$; quando $s = c$, $\tau_{xy} = \frac{3}{16} \frac{Q_z}{\delta c}$.

Para as tensões $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, tem-se:

$$2\tau_{zx} \delta dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{2\delta} \frac{dN^*}{dx} = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{M_{sy}^*}{I_y} \quad (5)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_{sy}^* &= 2M_{sy}^{*(1)} + 2M_{sy}^{*(2)} \\ &= 2\delta(c-z) \left[c - \frac{1}{2}(c-z) \right] + 2c\delta c = \delta(3c^2 - z^2) \end{aligned} \quad (6)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{2\delta} \delta(3c^2 - z^2) \frac{3}{16\delta c^3} = \frac{3}{32} \frac{Q_z}{\delta c} \left(3 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

Quando $z = 0$, $\tau_{xz} = \frac{9}{32} \frac{Q_z}{\delta c}$; quando $z = \pm c$, $\tau_{xz} = \frac{6}{32} \frac{Q_z}{\delta c}$.

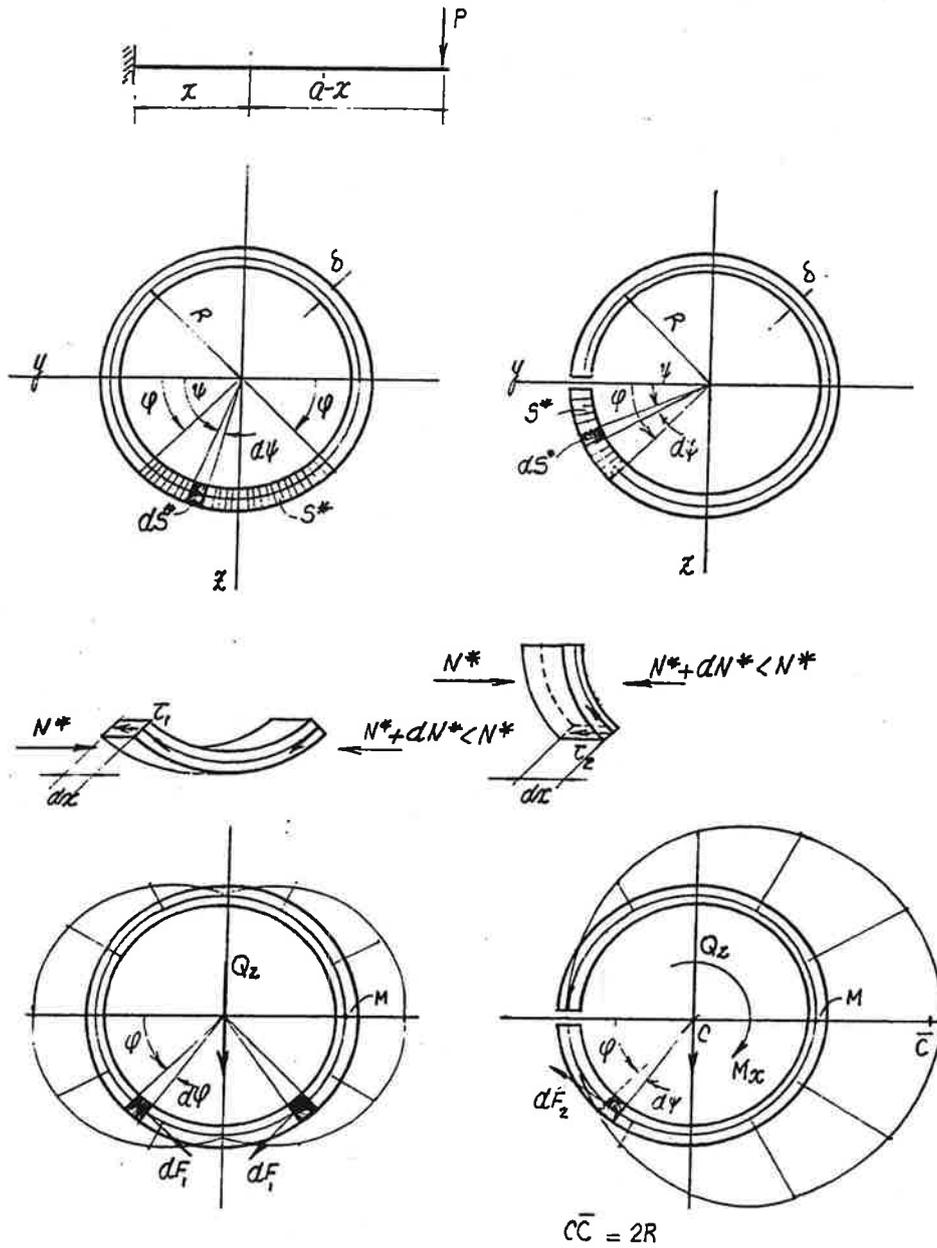
O fato de a tensão tangencial ser nula nos pontos M e N sugere que se pode obter a distribuição de tensões tangenciais em uma seção fechada simétrica, solicitada por força cortante Q_z , considerando a seção aberta correspondente ao corte da barra segundo o plano xz, solicitada pela força cortante $\frac{1}{2}Q_z$.

É, de resto, a conclusão a que se chega, escrevendo a expressão (5) da seguinte maneira:

$$\tau_{xz} = \frac{(\frac{1}{2}Q_z)}{\delta} \frac{(\frac{1}{2}M_{sy}^*)}{(\frac{1}{2}I_y)} = \frac{(\frac{1}{2}Q_z)M_{sy}^{*(C)}}{\delta I_y^{(C)}} \quad (8)$$

EXEMPLO.

Comparar a distribuição de tensões tangenciais nas seções transversais da fig.



Considerando o equilíbrio segundo a direção longitudinal dos elementos indicados na fig., obtém-se, na seção delgada fechada,

$$\tau_1 = \frac{Q_z M_{sy1}^*}{2 \delta I_y} \quad (A)$$

onde:

$$I_{y1} = \int_S z^2 ds = \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} (R \sin \psi)^2 \delta R d\psi = \pi \delta R^3 \quad (B')$$

$$M_{sy1}^* = \int_{S_1} z dS = \int_{\psi=\pi-\varphi}^{\psi=\varphi} (R \sin\psi) \delta R d\psi = 2 \delta R^2 \cos\varphi \quad (B'')$$

de modo que:

$$\tau_1 = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{2\delta R^2 \cos\varphi}{\pi \delta R^3} = \frac{Q_z}{\pi \delta R} \cos\varphi \quad (C)$$

e, na seção delgada aberta,

$$\tau_2 = \frac{Q_z}{\delta} \frac{M_{sy2}^*}{I_y} \quad (D)$$

onde:

$$I_{y2} = I_{y1} = \pi \delta R^3 \quad (E')$$

$$M_{sy2}^* = \int_{S_2} z dS = \int_{\psi=0}^{\psi=\varphi} (R \sin\varphi) \delta R d\psi = \delta R^2 (1 - \cos\varphi) \quad (E'')$$

de modo que:

$$\tau_2 = \frac{Q_z}{\delta} \frac{\delta R^2 (1 - \cos\varphi)}{\pi \delta R^3} = \frac{Q_z}{\pi \delta R} (1 - \cos\varphi) \quad (F)$$

No ponto M, tem-se:

$$\tau_2 = 2\tau_1 = \frac{Q_z}{\pi \delta R} \quad (G)$$

Em um elemento da área $dS = \delta R d\varphi$, caracterizado pelo ângulo φ a força resultante das tensões tangenciais e suas projeções segundo as direções y e z são dadas por:

$$dF = \tau \delta R d\varphi \quad (H')$$

$$dF_y = dF \sin\varphi = \tau \delta R \sin\varphi d\varphi \quad (H'')$$

$$dF_z = dF \cos\varphi = \tau \delta R \cos\varphi d\varphi \quad (H''')$$

enquanto o momento segundo a direção x é dado por:

$$dM_x = dF R = \tau \delta R^2 d\varphi \quad (I)$$

Considerando nas expressões anteriores os valores de τ_1 e τ_2 , dados pelas expressões (C) e (F), obtém-se:

$$F_{y1} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_1 \delta R \sin\varphi d\varphi = 0 \quad F_{y2} = \int_0^{2\pi} \tau_2 \delta R \sin\varphi d\varphi = 0 \quad (J')$$

$$F_{z1} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_1 \delta R \cos\varphi d\varphi = Q_z \quad F_{z2} = \int_0^{2\pi} \tau_2 \delta R \cos\varphi d\varphi = Q_z \quad (J'')$$

$$M_{x1} = M'_{x1} - M''_{x1} = 0 \quad M_{x2} = \int_0^{2\pi} \tau_2 \delta R^2 d\varphi = Q_z (2R) \quad (J''')$$

onde:

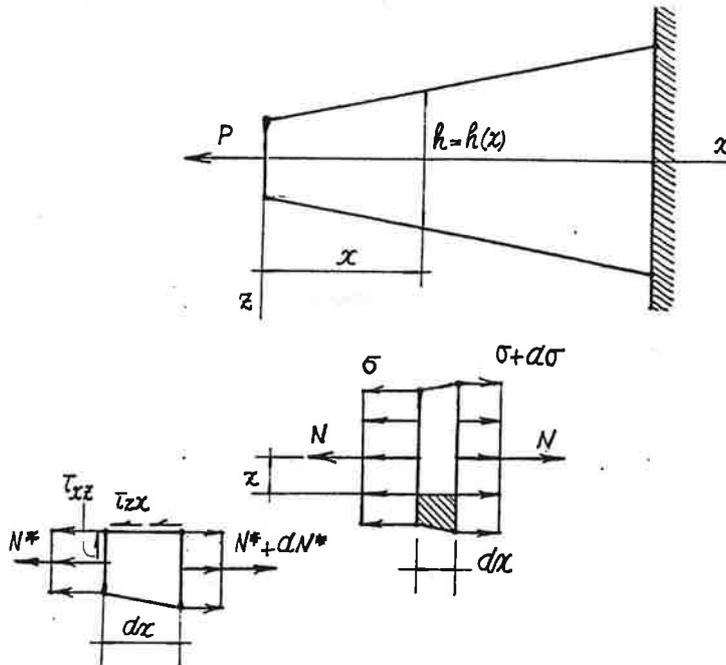
$$M'_{x1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_1 \delta R^2 d\varphi = \frac{2}{\pi} Q_z R \quad (L)$$

Conclui-se que a distribuição de tensões tangenciais τ_2 só é válida quando a força cortante Q_z for acompanhada do momento $M_x = Q_z (2R)$, o que equivale considerar a força cortante Q_z no centro do cisalhamento \bar{C} .

TENSÕES TANGENCIAIS EM BARRAS DE SEÇÕES VARIÁVEIS.

TRAÇÃO OU COMPRESSÃO SIMPLES.

Considere-se em uma barra de seção variável, como a que se mostra na fig., submetida a tração ou compressão simples, um segmento de dimensão dx .



Na face caracterizada pela coordenada x , à força normal N corresponde a distribuição de tensões normais σ_x , enquanto, na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, à força normal $N+dN$ corresponde a distribuição de tensões normais $\sigma_x + d\sigma_x$, onde a parcela $d\sigma_x$ é devida a variação da seção transversal.

Considere-se, em seguida, nesse segmento o elemento indicado na fig., cuja face superior é caracterizada pela coordenada z .

Na face caracterizada pela coordenada x , de área S^* , à distribuição de tensões normais σ_x corresponde a força N^* , dada por:

$$N^* = \sigma_x S^* = N \frac{S^*}{S} \quad (1)$$

enquanto, na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, à distribuição de tensões normais $\sigma_x + d\sigma_x$ corresponde a força $N^* + dN^*$.

Considerando o equilíbrio das forças segundo a direção x , obtém-se a distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, da seguinte maneira:

$$\tau_{zx} b dx = dN^* \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{dN^*}{dx} \quad (2)$$

Substituindo na expressão anterior o valor de N^* dado pela expressão (1), obtém-se:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left(N \frac{S^*}{S} \right) = \frac{N^*}{b} \frac{d}{dx} \left(\frac{S^*}{S} \right) \quad (3)$$

No caso de seção transversal retangular, tem-se:

$$S = b h \quad S^* = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{S^*}{S} \right) = \frac{z}{h^2} \frac{dh}{dx} \quad (4)$$

de modo que:

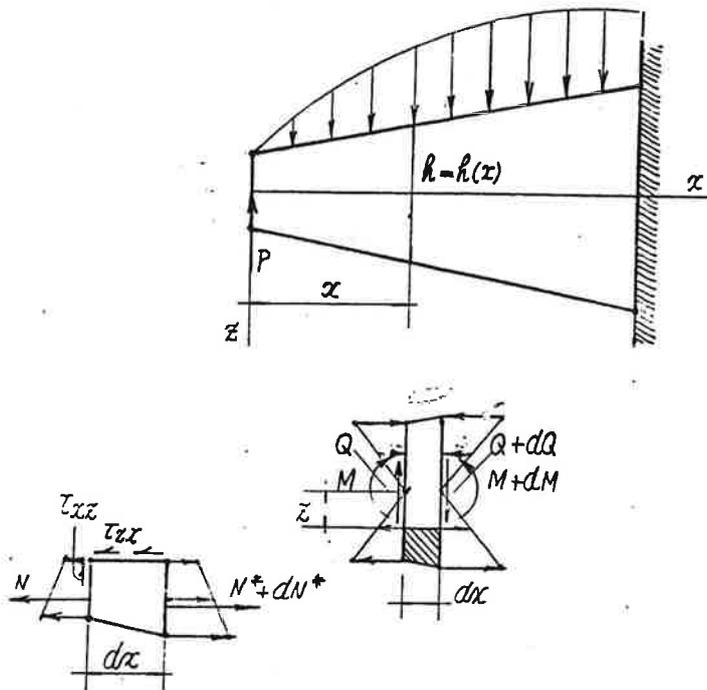
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N}{b h} \frac{z}{h} \frac{dh}{dx} \quad (5)$$

Na expressão anterior, a força normal N é positiva quando de tração, e o termo $\frac{dh}{dx}$ é positivo quando h cresce com x .

FLEXÃO NORMAL SIMPLES.

Em uma barra de seção variável, como a que se mostra na fig., submetida a flexão normal simples, a distribuição de tensões tangenciais $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ é dada, de acordo com a expressão (4) do item tensões tangenciais em seções cheias, por:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{b} \frac{M_{sy}^*}{I_y} + \frac{M_y}{b} \frac{d}{dx} \left(\frac{M_{sy}^*}{I_y} \right) \quad (1)$$



No caso de seção retangular, tem-se:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad M_{sy}^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{M_{sy}^*}{I_y} \right) = \frac{6}{h^2} \left(3 \frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{dh}{dx} \quad (2)$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q_z}{bh} \left(\frac{3}{2} - 6 \frac{z^2}{h^2} \right) - 6 \frac{M_y}{bh^2} \left(\frac{1}{4} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} \quad (3)$$

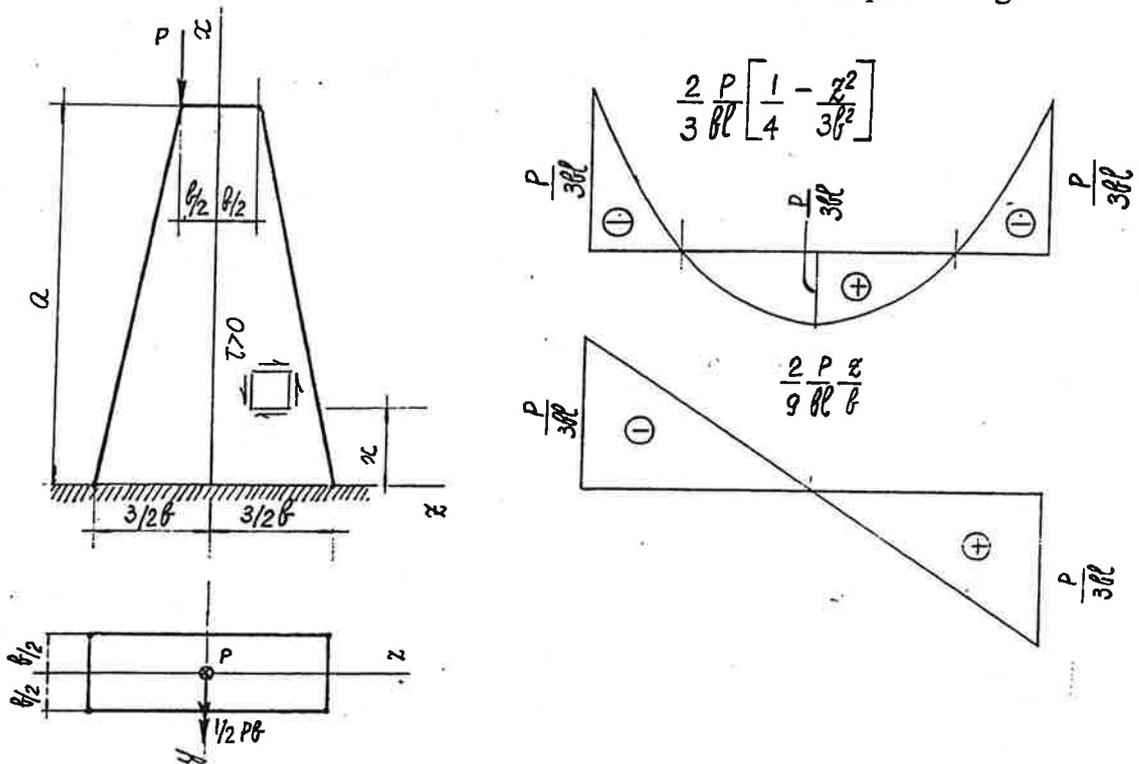
Quando $z = 0$,

$$\tau_{xz0} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{bh} - \frac{3}{2} \frac{M_y}{bh^2} \frac{dh}{dx} \quad (4)$$

Nas expressões anteriores, a força cortante $Q_z = \frac{dM_y}{dx}$ é positiva quando M_y cresce com x , o momento fletor é positivo quando provoca tração nas fibras caracterizadas pela coordenada z positiva, e o termo $\frac{dh}{dx}$ é positivo quando h cresce com x .

EXEMPLO.

Determinar a distribuição de tensões tangenciais na base do pilar da fig.



Os esforços solicitantes em uma seção transversal caracterizada pela coordenada x , de dimensões $b \times h$, onde:

$$h = 3b - \frac{2b}{a}x \quad (A)$$

são dados por:

$$N = -P \quad Q_z = 0 \quad M_y = \frac{1}{2}Pb \quad (B)$$

de modo que, de acordo com as expressões (4) do item tração ou compressão simples e (3) do item flexão normal simples, tem-se:

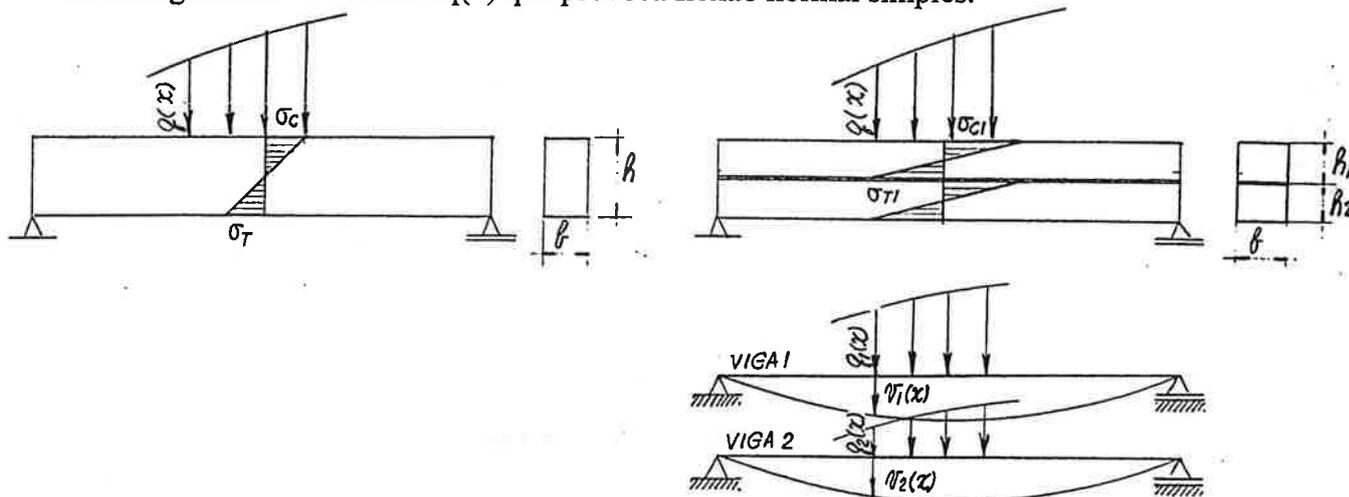
$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -6 \frac{M_y}{b h^2} \left(\frac{1}{4} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{N z}{b h^2} \frac{dh}{dx} \\ &= -6 \frac{(\frac{1}{2}Pb)}{b (3b)^2} \left[\frac{1}{4} - 3 \frac{z^2}{(3b)^2} \right] \left(-2 \frac{b}{a} \right) + \frac{(-P)z}{b (3b)^2} \left(-2 \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{2P}{3ba} \left[\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3b^2} \right] + \frac{2Pz}{9blb} \end{aligned} \quad (C)$$

A resultante Q_z da distribuição τ_{xz} é dada por:

$$Q_z = \int_S \tau_{xz} dS = \int_{-\frac{3}{2}b}^{\frac{3}{2}b} \tau_{xz} b dz = 0 \quad (D)$$

LIGAÇÕES LONGITUDINAIS.

Considere-se uma viga V de dimensões $b \times h$ submetida, como se mostra na fig., ao carregamento transversal $q(x)$ que provoca flexão normal simples.



O equilíbrio do segmento de dimensão dx , limitado à esquerda pela seção caracterizada pela coordenada x , a qual é solicitada pelos esforços Q e M , e à direita pela seção caracterizada pela coordenada $x + dx$, a qual é solicitada pelos esforços $Q + dQ$ e $M + dM$, é expresso pelas seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (1')$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (1'')$$

Em um ponto caracterizado pela coordenada x , o deslocamento transversal $w(x)$ e a rotação $\varphi(x)$ podem ser determinados mediante a integração da equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

As expressões (1'') e (2) permitem escrever:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (3)$$

Considere-se, em seguida, duas vigas sobrepostas V_1 e V_2 de dimensões $b \times h_1$ e $b \times h_2$, com $h_1 + h_2 = h$, submetidas, como se mostra na fig., ao mesmo carregamento transversal $q(x)$ que provoca flexão normal simples.

Seja $q_1(x)$ a parcela de $q(x)$ que solicita a viga V_1 e $q_2(x)$ a parcela de $q(x)$ que solicita a viga V_2 , de modo que:

$$q_1 + q_2 = q \quad (4)$$

Analisando isoladamente as vigas V_1 e V_2 , pode-se, em vista da expressão (3), escrever:

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{q_1}{EI_1} \quad (5')$$

$$\frac{d^4 w_2}{dx^4} = \frac{q_2}{EI_2} \quad (5'')$$

Como, em cada ponto x , o deslocamento transversal de cada uma das vigas é o mesmo, resulta:

$$w_1 = w_2 \Rightarrow \frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{d^4 w_2}{dx^4} \Rightarrow \frac{q_1}{EI_1} = \frac{q_2}{EI_2} \quad (6)$$

Considerando as expressões (4) e (6), obtém-se:

$$q_1 = \frac{EI_1}{EI_1 + EI_2} q \quad (7')$$

$$q_2 = \frac{EI_2}{EI_1 + EI_2} q \quad (7'')$$

A fim de comparar o comportamento das duas estruturas quando solicitadas por um carregamento uniforme q , suponha-se que a viga V tenha dimensões $b \times h$ e que as vigas V_1 e V_2 tenham dimensões $b \times \frac{1}{2}h$.

Na viga V , as tensões normais máximas na seção central são dadas por:

$$\sigma_T^* = -\sigma_C^* = \frac{M_{\max}}{I} \frac{h}{2} = \frac{ql^2}{8} \frac{12}{bh^3} \frac{h}{2} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{bh^2} \quad (8)$$

enquanto, nas vigas V_1 e V_2 , solicitadas, em vista das expressões (7), pelo carregamento:

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}q \quad (9)$$

são dadas por:

$$\sigma_{T1}^* = -\sigma_{C1}^* = \frac{M_{\max 1}}{I_1} \frac{h_1}{2} = \frac{q_1 l^2}{8} \frac{12}{bh_1^3} \frac{h_1}{2} = \frac{3}{4} \frac{q_1 l^2}{bh_1^2} = \frac{3}{2} \frac{ql^2}{bh^2} = 2\sigma_T^* \quad (10)$$

Na viga V , o deslocamento no meio do vão é dado por:

$$w^* = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E bh^3} = \frac{5}{32} \frac{ql^4}{Ebh^3} \quad (11)$$

enquanto, nas vigas V_1 e V_2 , é dado por:

$$w_1^* = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI_1} = \frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{E bh_1^3} = \frac{5}{32} \frac{q_1 l^4}{Ebh_1^3} = \frac{5}{8} \frac{q_1 l^4}{Ebh^3} = 4w^* \quad (12)$$

A tensão tangencial no plano horizontal situado a meia altura da viga V é dada por:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (13)$$

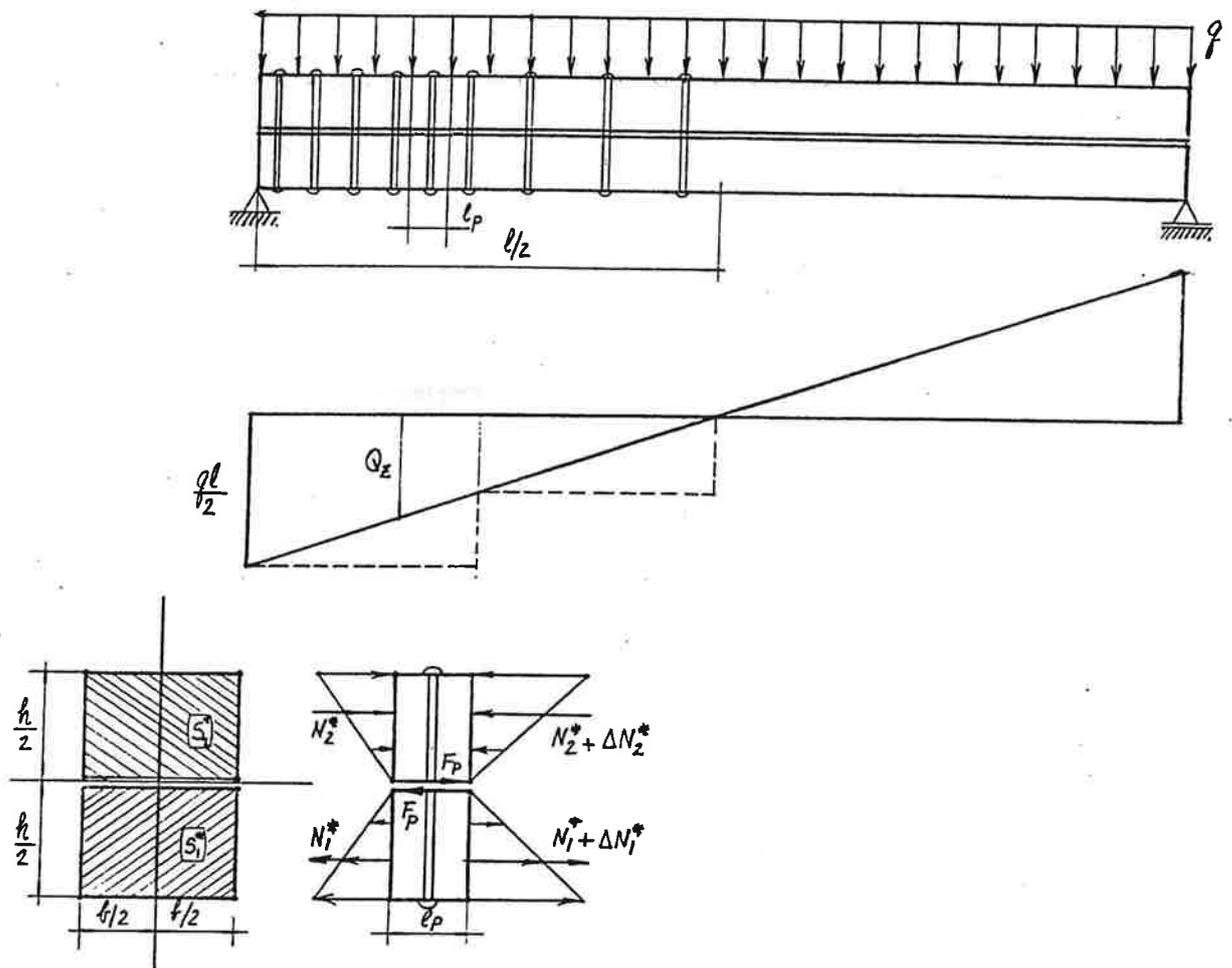
enquanto nas vigas V_1 e V_2 , é dada por:

$$\tau = 0 \quad (14)$$

uma vez que o plano horizontal coincide com a interface das vigas.

Os resultados anteriores mostram a conveniência de ligar as vigas V_1 e V_2 , de maneira que a viga resultante se comporte como a viga V .

A ligação das vigas V_1 e V_2 pode ser feita, como se mostra na fig., por parafusos, cujo espaçamento e_p é determinado considerando o equilíbrio de um dos elementos E_1 ou E_2 , de dimensão e_p .



As resultantes das tensões normais na face esquerda dos elementos E_1 e E_2 são dadas por:

$$N_1^* = M_y \frac{M_{sy1}^*}{I_y} \quad N_2^* = M_y \frac{M_{sy2}^*}{I_y} \quad (15)$$

onde:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad M_{sy1}^* = M_{sy2}^* = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \quad (16)$$

e na face direita por:

$$N_1^* + \Delta N_1^* \quad N_2^* = \Delta N_2^* \quad (17)$$

onde ΔN_1^* e ΔN_2^* são dados, em primeira aproximação, por:

$$\Delta N_1^* = \frac{dN_1^*}{dx} \Delta x = \frac{dN_1^*}{dx} e_p = Q_z \frac{M_{sy1}^*}{I_y} e_p \quad (18')$$

$$\Delta N_2^* = \frac{dN_2^*}{dx} \Delta x = \frac{dN_2^*}{dx} e_p = Q_z \frac{M_{sy2}^*}{I_y} e_p \quad (18'')$$

Os incrementos ΔN_1^* e ΔN_2^* são equilibrados pela força F_p transmitida na seção transversal do parafuso, isto é,

$$\Delta N_1^* = F_p \Rightarrow Q_z \frac{M_{sy1}^*}{I_y} e_p = \bar{\tau}_p A_p \quad (19)$$

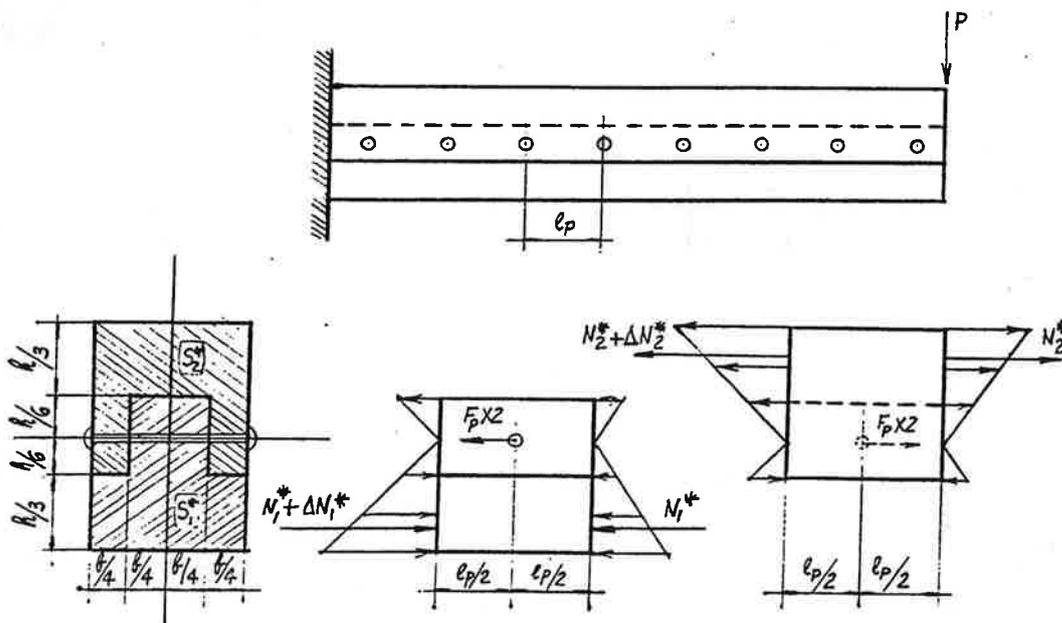
de modo que:

$$e_p = \frac{\bar{\tau}_p A_p I_y}{Q_z M_{sy1}^*} = \frac{3 \bar{\tau}_p A_p}{2 Q_z h} \quad (20)$$

Na prática costuma-se dividir o vão em trechos nos quais se considera a força cortante Q_z constante, de modo que se tenha espaçamento e_p constante em cada trecho.

EXEMPLO 1.

Determinar, na viga da fig., o espaçamento e_p dos parafusos de seção transversal $A_p = 0.5 \text{ cm}^2$ e tensão admissível $\bar{\tau}_p = 1000 \text{ kgf/cm}^2$.



As resultantes das tensões normais nos elementos E_1 e E_2 , de dimensão e_p , são dadas, na face direita, por:

$$N_1^* = M_y \frac{M_{sy1}^*}{I_y} \quad N_2^* = M_y \frac{M_{sy2}^*}{I_y} \quad (A)$$

onde:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (B')$$

$$M_{sy1}^* = b \frac{h}{3} \frac{h}{3} + \frac{b}{2} \frac{h}{3} \cdot 0 = \frac{bh^2}{9} \quad (B'')$$

$$M_{sy2}^* = b \frac{h}{3} \frac{h}{3} + 2 \frac{b}{4} \frac{h}{3} \cdot 0 = \frac{bh^2}{9} \quad (B''')$$

e na face esquerda por:

$$N_1^* + \Delta N_1^* \quad N_2^* + \Delta N_2^* \quad (C)$$

onde:

$$\Delta N_1^* = \frac{dN_1^*}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M_{sy1}^*}{I_y} e_p = Q_z \frac{bh^2}{9} \frac{12}{bh^3} e_p = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{h} e_p \quad (D')$$

$$\Delta N_2^* = \frac{dN_2^*}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M_{sy2}^*}{I_y} e_p = \frac{4}{3} \frac{Q_z}{h} e_p \quad (D'')$$

Os incrementos ΔN_1^* e ΔN_2^* são equilibrados pelas forças F_p transmitidas nas duas seções transversais do parafuso, isto é:

$$\Delta N_1^* = 2F_p \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{Q_z}{h} e_p = 2\bar{\tau}_p A_p \quad (E)$$

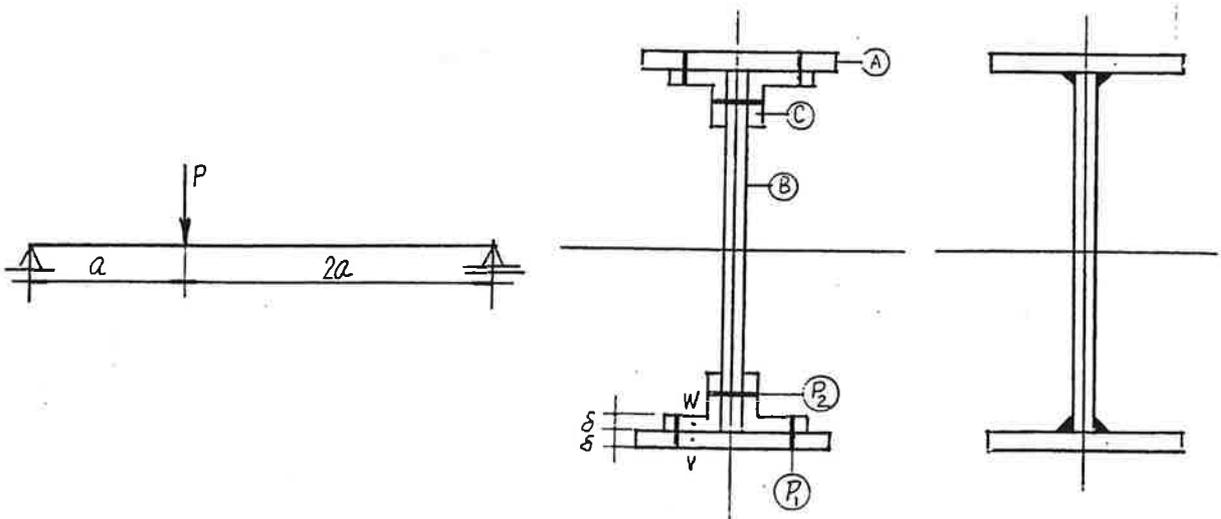
de modo que:

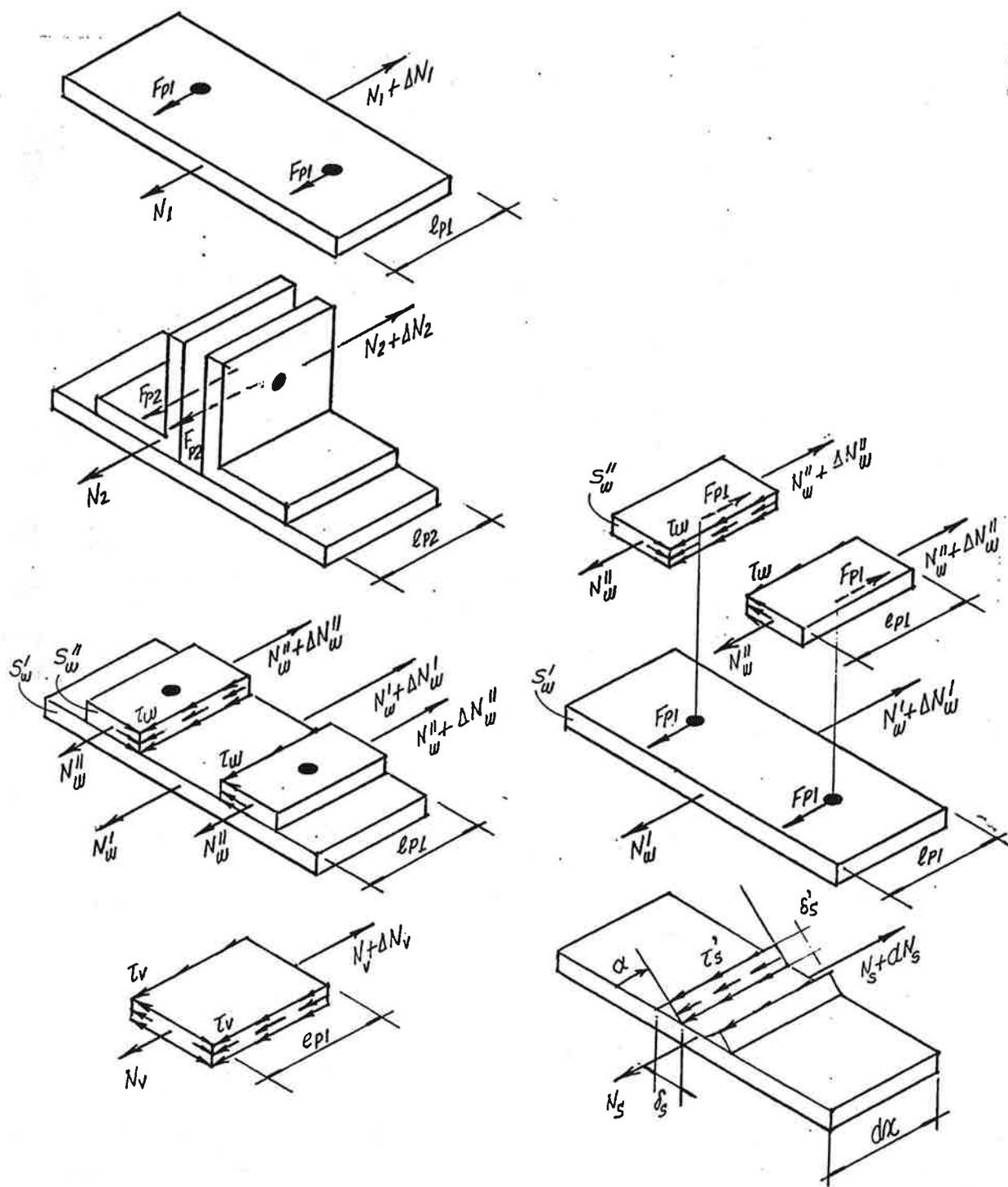
$$e_p = \frac{3}{2} \frac{\bar{\tau}_p A_p}{Q_z} h = \frac{3}{2} \frac{1000 \cdot 0.5}{1200} 24 = 15 \text{ cm} \quad (F)$$

EXEMPLO 2.

Dada a estrutura da fig., determinar:

- os espaçamentos e_{p1} e e_{p2} dos parafusos P_1 , de seção transversal A_{p1} , e P_2 , de seção transversal A_{p2} , ambos com tensão admissível $\bar{\tau}_p$.
- a tensão tangencial nos pontos V e W.
- a espessura da solda admissível $\bar{\tau}_s$.





Na determinação do espaçamento dos parafusos bem como das tensões tangenciais τ_v e τ_w , supõe-se que não haja atrito entre as chapas e a cantoneira, isto é, que a ligação entre as chapas e a cantoneira se dê exclusivamente nos parafusos.

Considerando o segmento de dimensão e_{p1} indicado na fig., tem-se:

$$N_1 = M_y \frac{M_{sy1}}{I_y} \Rightarrow \Delta N_1 = \frac{dN_1}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M_{sy1}}{I_y} e_{p1} \quad (A)$$

onde:

$$I_y = 2I_y^{(A)} + I_y^{(B)} + 4I_y^{(C)} \quad M_{sy1} = M_{sy}^{(A)} \quad (A')$$

de modo que, para que haja equilíbrio, deve-se ter:

$$\Delta N_1 = 2F_{p1} \Rightarrow Q_z \frac{M_{sy1}}{I_y} e_{p1} = 2\bar{\tau}_p A_p \Rightarrow e_{p1} = 2 \frac{\bar{\tau}_p A_p}{Q_z} \frac{I_y}{M_{sy1}} \quad (B)$$

Considerando o segmento de dimensão e_{p2} indicado na fig., tem-se:

$$N_2 = M_y \frac{M_{sy2}}{I_y} \Rightarrow \Delta N_2 = \frac{dN_2}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M_{sy2}}{I_y} e_{p2} \quad (C)$$

onde:

$$M_{sy2} = M_{sy}^{(A)} + 2M_{sy}^{(C)} \quad (C')$$

de modo que, para que haja equilíbrio, deve-se ter:

$$\Delta N_2 = 2F_{p2} \Rightarrow Q_z \frac{M_{sy2}}{I_y} e_{p2} = 2\bar{\tau}_p A_p \Rightarrow e_{p2} = 2 \frac{\bar{\tau}_p A_p}{Q_z} \frac{I_y}{M_{sy2}} \quad (D)$$

A tensão no ponto V pode ser obtida considerando, como se mostra na fig., o equilíbrio segundo a direção x do segmento de dimensão e_{p1} , ou seja:

$$N_v = M_y \frac{M_{syv}}{I_y} \quad (E)$$

$$\Delta N_v = \frac{dN_v}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M_{syv}}{I_y} e_{p1} \quad (F)$$

$$\Delta N_v = 2\tau_v \delta e_{p1} \Rightarrow \tau_v = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{M_{syv}}{I_y} \quad (G)$$

A tensão no ponto W pode ser obtida considerando, como se mostra na fig., o equilíbrio segundo a direção x do segmento de dimensão e_{p1} , ou seja:

$$N_w = N'_w + 2N''_w = M_y \frac{M'_{syw}}{I_y} + 2M_y \frac{M''_{syw}}{I_y} = M_y \frac{M'_{syw} + 2M''_{syw}}{I_y} \quad (H)$$

$$\Delta N_w = \frac{dN_w}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M'_{syw} + 2M''_{syw}}{I_y} e_{p1} \quad (I)$$

$$\Delta N_w = 2\tau_w \delta e_{p1} \Rightarrow \tau_w = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{M'_{syw} + 2M''_{syw}}{I_y} \quad (J)$$

Alternativamente, mediante a decomposição indicada na fig., pode-se escrever, considerando sucessivamente o equilíbrio segundo a direção x do segmento inferior e de cada um dos segmentos superiores:

$$N'_w = M_y \frac{M'_{syw}}{I_y} \Rightarrow \Delta N'_w = \frac{dN'_w}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M'_{syw}}{I_y} e_{p1} \quad (K)$$

$$\Delta N'_w = 2F_{p1} \Rightarrow F_{p1} = \frac{Q_z}{2} \frac{M'_{syw}}{I_y} e_{p1} \quad (L)$$

$$N''_w = M_y \frac{M''_{syw}}{I_y} \Rightarrow \Delta N''_w = \frac{dN''_w}{dx} \Delta x = Q_z \frac{M''_{syw}}{I_y} e_{p1} \quad (M)$$

$$\Delta N''_w + F_{p1} = \tau_w \delta e_{p1} \Rightarrow \tau_w = \frac{Q_z}{2\delta} \frac{M'_{syw} + 2M''_{syw}}{I_y} \quad (N)$$

Deve-se notar que a tensão tangencial no ponto W é muito maior do que no ponto V, e que os sentidos são contrários.

Considerando o segmento de dimensão dx indicado na fig., tem-se:

$$N_s = M_y \frac{M_{sys}}{I_y} \Rightarrow dN_s = Q_z \frac{M_{sys}}{I_y} dx \quad (O)$$

onde:

$$I_y = 2I_y^{(A)} + I_y^{(B)} \quad M_{sys} = M_{sy}^{(A)} \quad (O')$$

de modo que, considerando o equilíbrio segundo a direção x, obtém-se, em uma seção genérica caracterizada pelo ângulo α , a tensão tangencial τ_s , da seguinte maneira:

$$dN_s = 2F_s \Rightarrow Q_z \frac{M_{sys}}{I_y} dx = 2\tau_s \delta_s dx \Rightarrow \tau_s = \frac{Q_z}{2\delta_s} \frac{M_{sys}}{I_y} \quad (P)$$

O máximo valor de τ_s ocorre quando δ_s é mínimo, isto é, quando $\alpha = 45^\circ$, de modo que:

$$\tau_{s\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Q_z}{\delta_s} \frac{M_{sys}}{I_y} \quad (Q)$$

Impondo que o valor acima não ultrapasse a tensão admissível da solda $\bar{\tau}_s$, obtém-se:

$$\delta_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Q_z}{\bar{\tau}_s} \frac{M_{sys}}{I_y} \quad (R)$$

