

PESQUISA OPERACIONAL I – EXERCÍCIOS



**É UM
CLÁSSICO**



Uma empresa transporta bananas de **Brodowski, Cravinhos e Guataporã** para **Ribeirão Preto e Sertãozinho**. O **custo** por tonelada será estimado pela distância entre as cidades em trajeto sem pedágio. **O que fazer?**

	Ribeirão Preto	Sertãozinho	Oferta
Brodowski	36.5	61.3	40 toneladas
Cravinhos	23.7	56.8	50 toneladas
Guatapar	61.7	56.1	60 toneladas
Demanda	65 toneladas	35 toneladas	



Capítulo 7





1. Problema do Transporte

36.5	61.3	40 †
23.7	56.8	50 †
61.7	56.1	60 †
65 †	35 †	

7-3

Variáveis

x_{ij} = quantidade de bananas transportadas da cidade i para a cidade j

Função-objetivo

$$\min f = 36.5 * x_{11} + 61.3 * x_{12} + 0 * x_{13} + 23.7 * x_{21} + 56.8 * x_{22} + 0 * x_{23} + 61.7 * x_{31} + 56.1 * x_{32} + 0 * x_{33}$$

Restrições

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 60$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 65$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 35$$

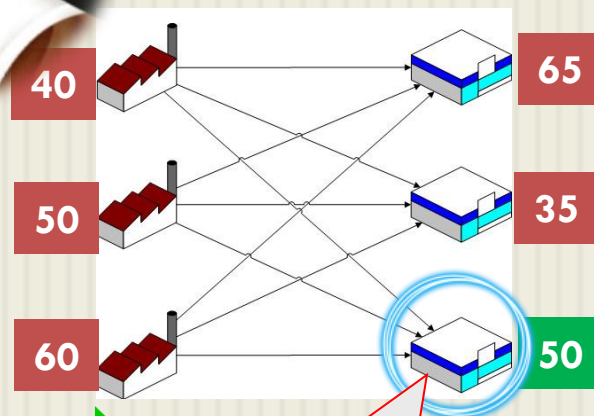
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0$$

É UM CLASSICO



Modelo I



Capítulo 7

150



100

Cidade Fantasma
(ou Dummy)



1. Problema do Transporte

36.5	61.3	40 †
23.7	56.8	50 †
61.7	56.1	60 †
65 †	35 †	

7-4

Variáveis

x_{ij} = quantidade de bananas transportadas da cidade i para a cidade j

Função-objetivo

$$\min f = 36.5 * x_{11} + 61.3 * x_{12} + 23.7 * x_{21} + 56.8 * x_{22} + 61.7 * x_{31} + 56.1 * x_{32}$$

Restrições

$$x_{11} + x_{12} \leq 40$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 60$$

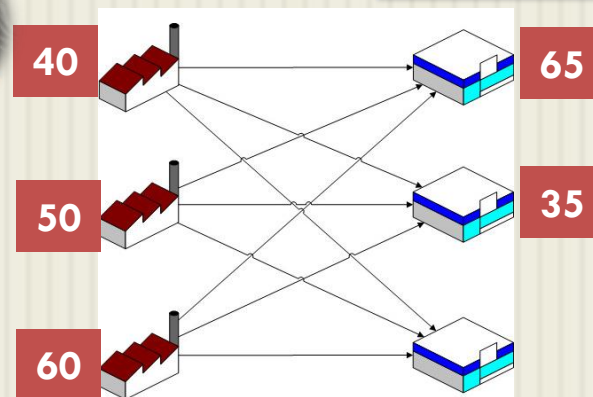
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 65$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 35$$

$$x_{ij} \geq 0$$



Modelo II



Capítulo 7

150



100





1. Problema do Transporte

36.5	61.3	40 †
23.7	56.8	50 †
61.7	56.1	60 †
65 †	35 †	

7-5

É UM CLASSICO



```

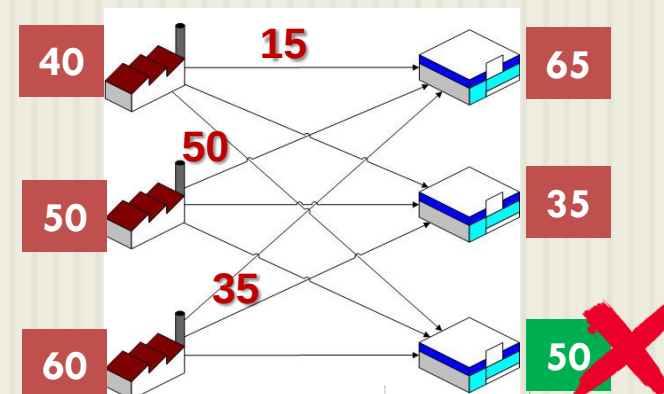
Lingo 16.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

min = 36.5 * x11 + 61.3 * x12 +
23.7 * x21 + 56.8 * x22 +
61.7 * x31 + 56.1 * x32;
x11 + x12 <= 40;
x21 + x22 <= 50;
x31 + x32 <= 60;
x11 + x21 + x31 >= 65;
x12 + x22 + x32 >= 35;
end
  
```

Função-Objetivo = 3696



Variable	Value
X11	15.00000
X12	0.000000
X21	50.00000
X22	0.000000
X31	0.000000
X32	35.00000



Capítulo 7





2. Transporte Custo Total



**Variáveis
inteiras**



Há carga para transportar de **Ribeirão Preto** para **São Paulo** (**30 toneladas**) e **Rio de Janeiro** (**20 toneladas**). Dispõe-se de **8** aviões B-727, **15** aviões Electra e **12** aviões Bandeirante. O custo total da viagem (R\$) e a capacidade dos aviões são fornecidos abaixo. **O que fazer?**

	B-727	Electra	Bandeirante	Carga
São Paulo	23	5	1.4	30 ton
Rio de Janeiro	58	10	3.8	20 ton
Quantidade de aviões	8 aviões	15 aviões	12 aviões	
Capacidade dos aviões	45 ton	7 ton	4 ton	





2. Transporte Custo Total

7-7



**Variáveis
inteiras**

23	5	1.4	30 t
58	10	3.8	20 t
8	15	12	
45 t	7 t	4 t	

Variáveis

x_{ij} = quantidade de aviões do tipo i enviados para a cidade j

Função-objetivo

min $f = 23 \cdot x_{11} + 58 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{21} + 10 \cdot x_{22} + 1.4 \cdot x_{31} + 3.8 \cdot x_{32}$



Restrições

$$x_{11} + x_{12} \leq 8$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 15$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 12$$

$$45 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{21} + 4 \cdot x_{31} \geq 30$$

$$45 \cdot x_{12} + 7 \cdot x_{22} + 4 \cdot x_{32} \geq 20$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ e inteiras}$$



Capítulo 7

2. Transporte Custo Total

7-8



**Variáveis
inteiras**

23	5	1.4	30 t
58	10	3.8	20 t
8	15	12	
45 t	7 t	4 t	

Função-Objetivo = 32400

```
Lingo 16.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

min = 23*x11 + 58*x12 +
5*x21 + 10*x22 +
1.4*x31 + 3.8*x32;
x11 + x12 <= 8;
x21 + x22 <= 15;
x31 + x32 <= 12;
45*x11 + 7*x21 + 4*x31 >= 30;
45*x12 + 7*x22 + 4*x32 >= 20;
@gin(x11); @gin(x12);
@gin(x21); @gin(x22);
@gin(x31); @gin(x32);
end
```

Variable	Value
X11	0.000000
X12	0.000000
X21	1.000000
X22	0.000000
X31	6.000000
X32	5.000000



1 avião Electra para SP
6 aviões Bandeirante para SP
5 aviões Bandeirante para o RJ

3. Problema do Transbordo



7-9

É UM
CLASSICO

Uma empresa responsável pelo abastecimento semanal de um produto às cidades de **SP** e **RJ** pretende criar um plano de distribuição a partir de **Campinas, Sorocaba** e **SJ Campos**. As quantidades semanalmente disponíveis são **70, 130 e 120 toneladas**, respectivamente.

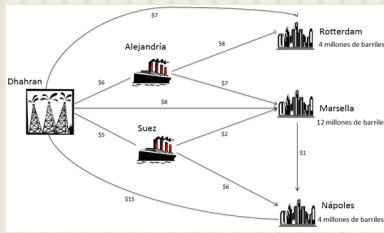
O consumo semanal previsto é de **180 toneladas** em **SP** e **140 toneladas** no **RJ**. Há também a possibilidade de abastecimento através de entrepostos. Os entrepostos localizam-se nos centros produtores e consumidores, e ainda em **Volta Redonda** e **Ribeirão Preto**.

Os custos unitários de transporte por tonelada encontram-se na Tabela a seguir. **Qual o plano?**

Transshipment
Problem

Capítulo 7





3. Problema do Transbordo

É UM CLASSICO



Custo

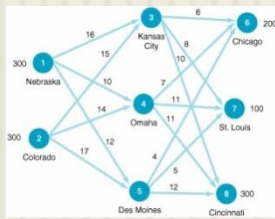
	C	S	SJ	VR	RP	SP	RJ
C	0	20	20	15	10	13	25
S	20	0	30	15	18	25	16
SJ	20	30	0	35	20	15	40
VR	15	15	35	0	15	20	7
RP	10	18	20	15	0	12	20
SP	13	25	15	20	12	0	27
RJ	25	16	40	7	20	27	0



Transshipment Problem

Capítulo 7





3. Problema do Transbordo

7-11

Função-objetivo

$$\text{Min } f = 20 \cdot x_{12} + 20 \cdot x_{13} + 15 \cdot x_{14} + 10 \cdot x_{15} + \dots + 27 \cdot x_{76}$$



É UM CLASSICO

Variáveis

x_{ij} = quantidade a transportar da cidade i para a cidade j

Restrições

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} - x_{21} - x_{31} - x_{41} - x_{51} - x_{61} - x_{71} &= 70 \quad \text{C} \\ x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} - x_{12} - x_{32} - x_{42} - x_{52} - x_{62} - x_{72} &= 130 \quad \text{S} \\ x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} - x_{13} - x_{23} - x_{43} - x_{53} - x_{63} - x_{73} &= 120 \quad \text{SJ} \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{54} - x_{64} - x_{74} &= 0 \quad \text{VR} \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{56} + x_{57} - x_{15} - x_{25} - x_{35} - x_{45} - x_{65} - x_{75} &= 0 \quad \text{RP} \\ -x_{61} - x_{62} - x_{63} - x_{64} - x_{65} - x_{67} + x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{76} &= 180 \quad \text{SP} \\ -x_{71} - x_{72} - x_{73} - x_{74} - x_{75} - x_{76} + x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} &= 140 \quad \text{RJ} \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$



Transshipment Problem

Capítulo 7



3. Problema do Transbordo

Função-Objetivo = 4880

7-12

min = $20 \times x_{12} + 20 \times x_{13} + 15 \times x_{14} + 10 \times x_{15} + 13 \times x_{16} + 25 \times x_{17} + 30 \times x_{23} + 15 \times x_{24} + 18 \times x_{25} + 25 \times x_{26} + 16 \times x_{27} + 35 \times x_{34} + 20 \times x_{35} + 15 \times x_{36} + 40 \times x_{37} + 15 \times x_{45} + 20 \times x_{46} + 7 \times x_{47} + 10 \times x_{51} + 18 \times x_{52} + 20 \times x_{53} + 15 \times x_{54} + 12 \times x_{56} + 20 \times x_{57} + 13 \times x_{61} + 25 \times x_{62} + 15 \times x_{63} + 20 \times x_{64} + 12 \times x_{65} + 27 \times x_{67} + 25 \times x_{71} + 16 \times x_{72} + 40 \times x_{73} + 7 \times x_{74} + 20 \times x_{75} + 27 \times x_{76};$

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} - x_{21} - x_{31} - x_{41} - x_{51} - x_{61} - x_{71} = 70;$

$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} - x_{12} - x_{32} - x_{42} - x_{52} - x_{62} - x_{72} = 130;$

$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} - x_{13} - x_{23} - x_{43} - x_{53} - x_{63} - x_{73} = 120;$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} + x_{47} - x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{54} - x_{64} - x_{74} = 0;$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{56} + x_{57} - x_{15} - x_{25} - x_{35} - x_{45} - x_{65} - x_{75} = 0;$

$-x_{61} - x_{62} - x_{63} - x_{64} - x_{65} - x_{67} + x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{76} = 180;$

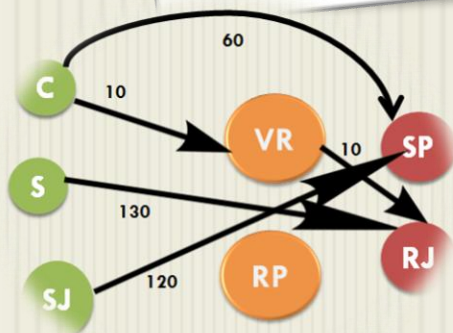
$-x_{71} - x_{72} - x_{73} - x_{74} - x_{75} - x_{76} + x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} = 140;$

end

É UM CLASSICO

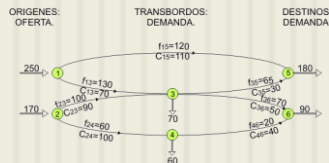
Variable	Value
X12	0.000000
X13	0.000000
X14	10.000000
X15	0.000000
X16	60.000000
X17	0.000000
X21	0.000000
X23	0.000000
X24	0.000000
X25	0.000000
X26	0.000000
X27	130.000000
X31	0.000000
X32	0.000000
X34	0.000000
X35	0.000000
X36	120.000000
X37	0.000000
X41	0.000000
X42	0.000000
X43	0.000000
X45	0.000000
X46	0.000000
X47	10.000000
X51	0.000000
X52	0.000000
X53	0.000000
X54	0.000000
X56	0.000000
X57	0.000000
X61	0.000000
X62	0.000000
X63	0.000000
X64	0.000000
X65	0.000000
X67	0.000000
X71	0.000000
X72	0.000000
X73	0.000000
X74	0.000000
X75	0.000000
X76	0.000000

	1	2	3	4	5	6	7	
1				10		60		70
2							130	130
3						120		120
4							10	
5								
6								
7								
						180	140	



Transshipment Problem

No balanceado: $\sum \text{oferta} = 250 + 170 = 420 > 400 = 70 + 60 + 180 + 90 = \sum \text{demanda}$.



4. Problema do Transbordo Obrigatório



7-13

Uma empresa responsável pelo abastecimento semanal de um produto às cidades de **SP** e **RJ** pretende criar um plano de distribuição a partir de **Campinas**, **Sorocaba** e **SJ Campos**. As quantidades semanalmente disponíveis são **70, 130 e 120 toneladas**, respectivamente.

O consumo semanal previsto é de **180 toneladas** em **SP** e **140 toneladas** no **RJ**.

O abastecimento é feito através de **entrepósitos**. Os entrepostos localizam-se em **Volta Redonda** e **Ribeirão Preto**.

	C	S	SJ	VR	RP	SP	RJ
C	0	20	20	15	10	13	25
S	20	0	30	15	18	25	16
SJ	20	30	0	35	20	15	40
VR	15	15	35	0	15	20	7
RP	10	18	20	15	0	12	20
SP	13	25	15	20	12	0	27
RJ	25	16	40	7	20	27	0

Os custos unitários de transporte por tonelada encontram-se na Tabela ao lado.
Qual o plano?

Transshipment
Problem

Capítulo 7



4. Problema do Transbordo Obrigatório

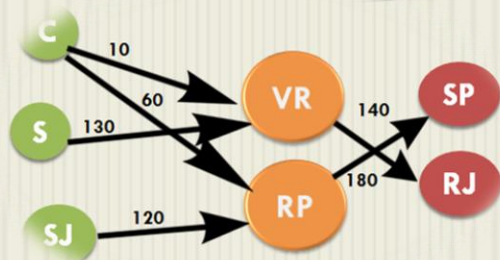
7-14

```

min = 20*x12 + 20*x13 + 15*x14 + 10*x15 +
      30*x23 + 15*x24 + 18*x25 +
      35*x34 + 20*x35 +
      20*x21 +
      20*x31 + 30*x32 +
      20*x46 + 7 *x47 +
      12*x56 + 20*x57 +
      + 27*x67 +
      27*x76;
x12 + x13 + x14 + x15 - x21 - x31 = 70;
x21 + x23 + x24 + x25 - x12 - x32 = 130;
x31 + x32 + x34 + x35 - x13 - x23 = 120;
x46 + x47 - x14 - x24 - x34 = 0;
x56 + x57 - x15 - x25 - x35 = 0;
- x67 + x46 + x56 + x76 = 180;
- x76 + x47 + x57 + x67 = 140;
end
    
```



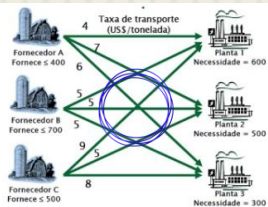
Variable	Value
X12	0.000000
X13	0.000000
X14	10.000000
X15	60.000000
X21	0.000000
X23	0.000000
X24	130.000000
X25	0.000000
X31	0.000000
X32	0.000000
X34	0.000000
X35	120.000000
X46	0.000000
X47	140.000000
X56	180.000000
X57	0.000000
X67	0.000000
X76	0.000000



	1	2	3	4	5	6	7	
1				10	60			70
2				130				130
3					120			120
4							140	
5						180		
6								
7								
						180	140	

Função-Objetivo = 8240

Transshipment Problem



5. Problema do Centro de Transbordo de Carga

7-15

Uma empresa tem cargas de **5** cidades (**1, 2, 3, 4, 5**) para transportar para **4** outras cidades (**6, 7, 8 e 9**). As cargas devem obrigatoriamente passar pelas Filiais de Emissão (**E1 ou E2**), pelos Centros de Transbordo de Cargas (**C1 ou C2**) e pelas Filiais de Destino (**D1 ou D2**). As cargas e os custos são fornecidos nas Tabelas abaixo. **O que fazer?**

	Carga	E1	E2
1	10	5	
2	10	3	
3	10	2	2
4	10	6	5
5	10		8

	C1	C2
E1	12	15
E2	16	10

	D1	D2
C1	19	21
C2	12	20

	6	7	8	9
D1	9	7	8	4
D2				5
Carga	10	15	15	10

Transshipment
Problem

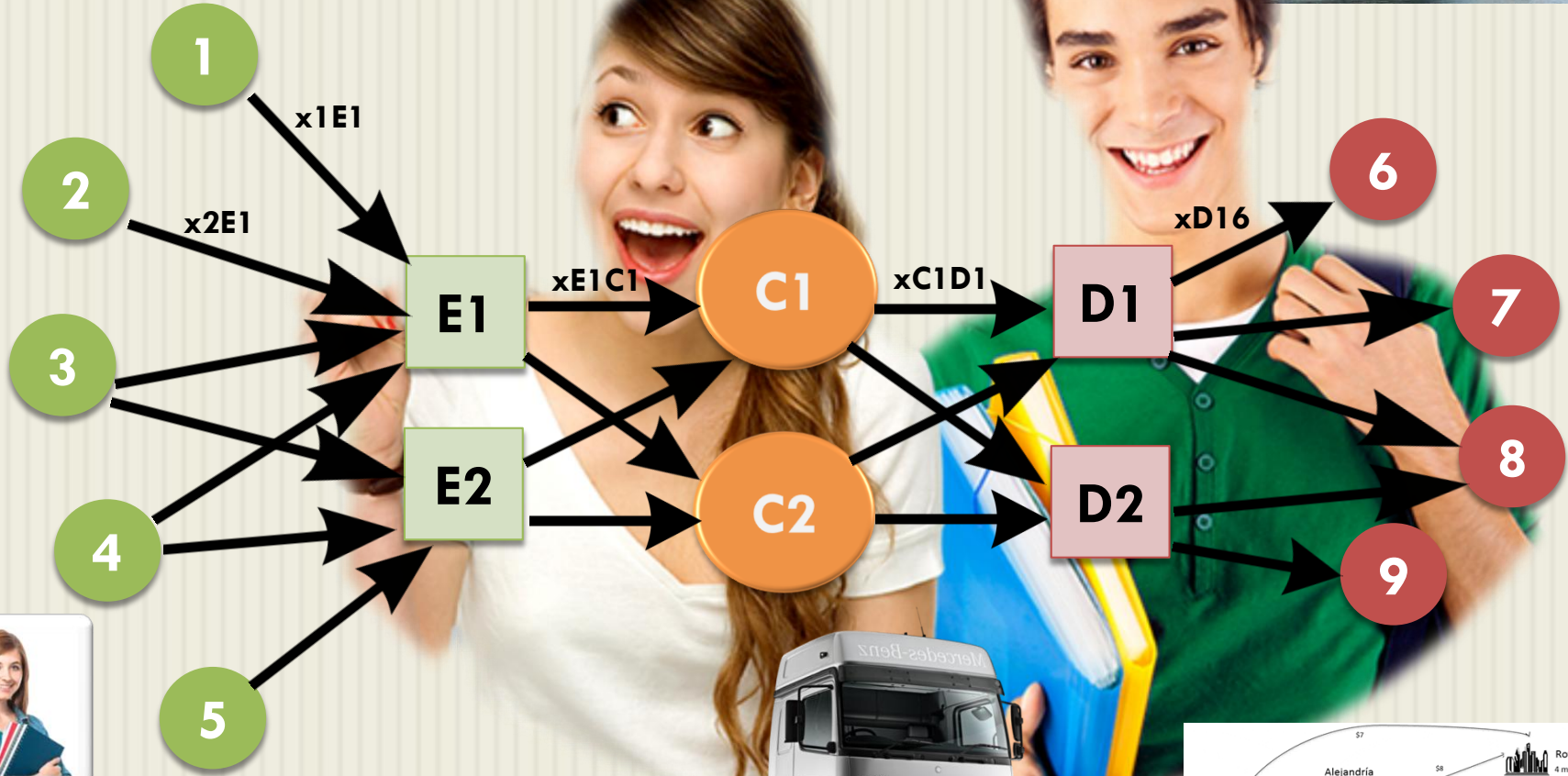
Capítulo 7

Custo



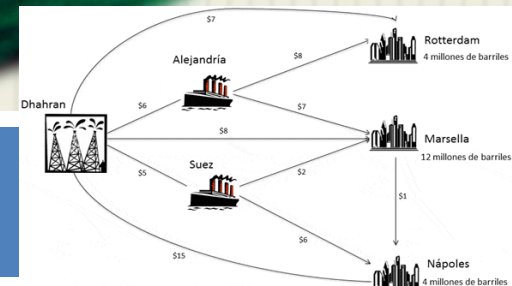
5. Problema do Centro de Transbordo de Carga

7-16



Transshipment Problem

Capítulo 7



5. Problema do Centro de Transbordo de Carga

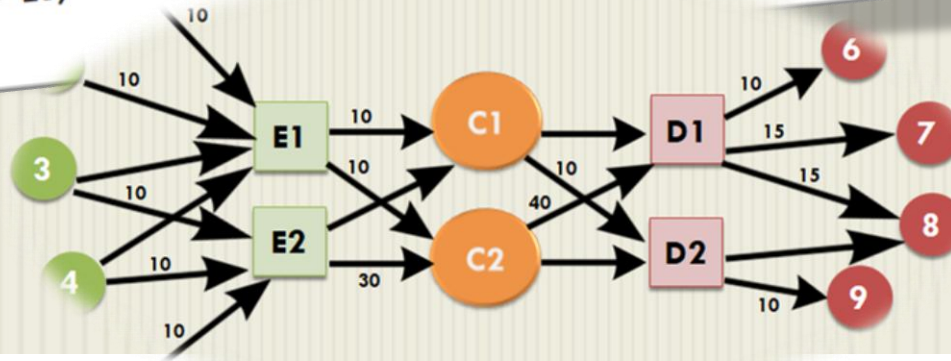


Função-Objetivo = 1855

7-17

min = 5*x1E1 + 3*x2E1 + 2*x3E1 + 2*x3E2 + 6*x4E1 + 5*x4E2 + 8*x5E2 +
 12*xE1C1 + 15*xE1C2 + 16*xE2C1 + 10*xE2C2 +
 19*xC1D1 + 21*xC1D2 + 12*xC2D1 + 20*xC2D2 +
 9*xD16 + 7*xD17 + 8*xD18 + 4*xD28 + 5*xD29;
 x1E1 = 10; x2E1 = 10; x3E1 + x3E2 = 10; x4E1 + x4E2 = 10; x5E2 = 10;
 xE1C1 + xE1C2 = x1E1 + x2E1 + x3E1 + x4E1;
 xE2C1 + xE2C2 = x3E2 + x4E2 + x5E2;
 xC1D1 + xC1D2 = xE1C1 + xE2C1;
 xC2D1 + xC2D2 = xE1C2 + xE2C2;
 xD16 + xD17 + xD18 = xC1D1 + xC2D1;
 xD28 + xD29 = xC1D2 + xC2D2;
 xD16 = 10; xD17 = 15; xD18 + xD28 = 15;
 xD29 = 10;
 end

Variable	Value
X1E1	10.00000
X2E1	10.00000
X3E1	0.000000
X3E2	10.00000
X4E1	0.000000
X4E2	10.00000
X5E2	10.00000
XE1C1	10.00000
XE1C2	10.00000
XE2C1	0.000000
XE2C2	30.00000
XC1D1	0.000000
XC1D2	10.00000
XC2D1	40.00000
XC2D2	0.000000
XD16	10.00000
XD17	15.00000
XD18	15.00000
XD28	0.000000
XD29	10.00000

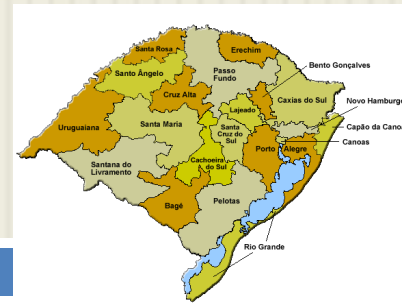


Transshipment
Problem

Capítulo 7



6. Localização de Armazéns RS



7-18

A CEARS quer construir **três** novos armazéns agrícolas. Dados os custos abaixo, localizar os armazéns.

Opções	Custo Construção	Capacidade	Uruguaiana	Pelotas	Caxias do Sul	Passo Fundo	Porto Alegre
Alegrete	7 milhões	600 kton	2,10	6,30	7,80	6,30	7,50
Caçapava do Sul	5 milhões	750 kton	5,70	2,70	4,50	4,50	3,78
Tupanciretá	9 milhões	350 kton	5,40	5,58	4,38	2,88	4,80
Vacaria	6 milhões	450 kton	10,20	6,54	1,14	2,40	3,00
Santa Rosa	4 milhões	400 kton	5,58	7,86	6,00	3,48	6,84
Demanda			150 kton	450 kton	300 kton	250 kton	500 kton

Custo de transporte

Capítulo 7



6. Localização de Armazéns RS

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se localizar na cidade } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

x_{ij} = quantidade enviada de i para j

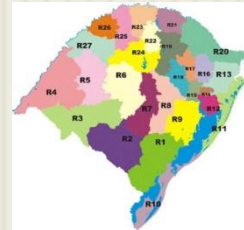
Modelo Matemático

Minimizar = $7000y_1 + 5000y_2 + 9000y_3 + 6000y_4 + 4000y_5 + 2,1 x_{11} + 6,3 x_{12} + 7,8 x_{13} + \dots + 6,84x_{55}$

Sujeito a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\leq 600 y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\leq 750 y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\leq 350 y_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &\leq 450 y_4 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &\leq 400 y_5 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 450 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 250 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 500 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i &= 0/1 \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$



6. Localização de Armazéns RS EXCEL



7-20



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Variáveis											
2	1	1	0	0	1							
3	150	200	150	0	0			150		150		
4	0	250	0	0	500			450		450		
5	0	0	0	0	0			300		300		
6	0	0	1,24E-13	0	0			250		250		
7	0	0	150	250	0			500		500		
8												
9	Dados											
10	7000	5000	9000	6000	4000			500		600		600
11								750		750		750
12	2,1	6,3	7,8	6,3	7,5			0		350		0
13	5,7	2,7	4,5	4,5	3,78			1,24E-13		450		0
14	5,4	5,58	4,38	2,88	4,8			400		400		400
15	10,2	6,54	1,14	2,4	3							
16	5,58	7,86	6	3,48	6,84							
17								3		3		
18												
						Construção						
						16000						
						Transporte						
						7080						
						FO Total						
						23080						
								150	200	150		600
									250		500	750
												350
												450
										150	250	400
								150	450	300	250	500

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: ☐ Máx. ☒ Mín. ☐ Valor de: 0

Alterando Células Variáveis:

\$A\$2:\$E\$7

Sujeito às Restrições:

\$A\$2:\$E\$2 = binário
 \$H\$10 <= \$L\$10
 \$H\$11 <= \$L\$11
 \$H\$12 <= \$L\$12
 \$H\$13 <= \$L\$13
 \$H\$14 <= \$L\$14
 \$H\$17 = \$J\$17
 \$H\$3 = \$J\$3
 \$H\$4 = \$J\$4
 \$H\$5 = \$J\$5
 \$H\$6 = \$J\$6
 \$H\$7 = \$J\$7

☒ Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução: LP Simplex

Método de Solução

Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolva Fechar



Capítulo 7

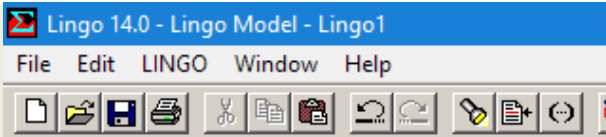


6. Localização de Armazéns RS LINGO

Distribuição Geográfica das CRE's (Coordenadoras Regionais de Educação) no Estado do Rio Grande do Sul



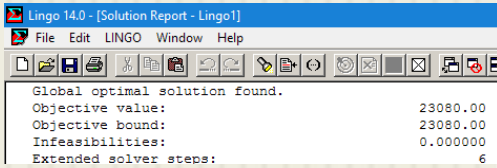
7-21



```
Lingo Model - Lingo1

min = 7000*y1 + 5000*y2 + 9000*y3 + 6000*y4 + 4000*y5
+ 2.1*x11 + 6.3*x12 + 7.8*x13 + 6.3*x14 + 7.5*x15 +
5.7*x21 + 2.7*x22 + 4.5*x23 + 4.5*x24 + 3.78*x25 +
5.4*x31 + 5.58*x32 + 4.38*x33 + 2.88*x34 + 4.8*x35 +
10.2*x41 + 6.54*x42 + 1.14*x43 + 2.4*x44 + 3*x45 +
5.58*x51 + 7.86*x52 + 6*x53 + 3.48*x54 + 6.84*x55;
x11 + x12 + x13 + x14 + x15 <= 600*y1;
x21 + x22 + x23 + x24 + x25 <= 750*y2;
x31 + x32 + x33 + x34 + x35 <= 350*y3;
x41 + x42 + x43 + x44 + x45 <= 450*y4;
x51 + x52 + x53 + x54 + x55 <= 400*y5;
x11 + x21 + x31 + x41 + x51 = 150;
x12 + x22 + x32 + x42 + x52 = 450;
x13 + x23 + x33 + x43 + x53 = 300;
x14 + x24 + x34 + x44 + x54 = 250;
x15 + x25 + x35 + x45 + x55 = 500;
y1 + y2 + y3 + y4 + y5 = 3;
@bin(y1); @bin(y2); @bin(y3); @bin(y4); @bin(y5);
end
```

150	200	150			600
	250			500	750
					350
					450
		150	250		400
150	450	300	250	500	



Variable	Value
Y1	1.000000
Y2	1.000000
Y3	0.000000
Y4	0.000000
Y5	1.000000
X11	150.0000
X12	200.0000
X13	150.0000
X14	0.000000
X15	0.000000
X21	0.000000
X22	250.0000
X23	0.000000
X24	0.000000
X25	500.0000
X31	0.000000
X32	0.000000
X33	0.000000
X34	0.000000
X35	0.000000
X41	0.000000
X42	0.000000
X43	0.000000
X44	0.000000
X45	0.000000
X51	0.000000
X52	0.000000
X53	150.0000
X54	250.0000
X55	0.000000



7. Problema das Reuniões



7-22

Uma empresa com filiais em **4** cidades da região sudeste (**Ribeirão Preto, São José do Rio Preto, Uberlândia, Londrina e Presidente Prudente**) quer marcar **1** ou **2** reuniões entre seus colaboradores em uma destas cidades, a que for mais conveniente para seus colaboradores.

Distâncias

Resolver o problema da

p-mediana e localizar:

a) Uma cidade

b) Duas cidades

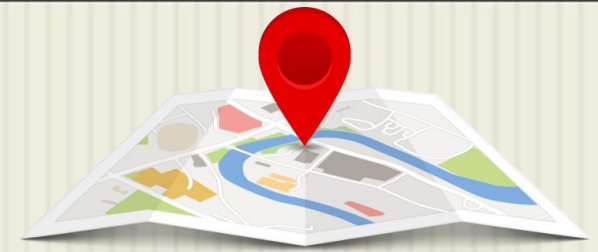
	RP	SJRP	U	L	PP
RP	0	186	281	471	446
SJRP	186	0	289	390	275
U	281	289	0	743	562
L	471	390	743	0	162
PP	446	275	562	162	0



Capítulo 7



Modelo da P-Mediana



7-23

Modelo Matemático

Localização: Modelo da p-Mediana

Minimizar $f = \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} \sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} d[i,j] \times x[i,j]$

Distância entre i e j

Sujeito a: $\sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} x[i,j] = 1 \quad (i=1 \text{ a } N^{\circ} \text{ de Locais})$

Um local i é atribuído a uma única mediana j

$\sum_{j=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} x[j,j] = p$

Nº de medianas

$\sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} x[i,j] \leq N^{\circ} \text{ máximo} \quad (j=1 \text{ a } N^{\circ} \text{ de Locais})$

Nº mínimo e máximo de locais atribuídos a uma mediana j

$N^{\circ} \text{ Mínimo} \times x[j,j] \leq \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de Locais}} x[i,j] \leq N^{\circ} \text{ Máximo} \quad (j=1 \text{ a } N^{\circ} \text{ de Locais})$

Existência da mediana j

$x[i,j] \leq x[j,j]$

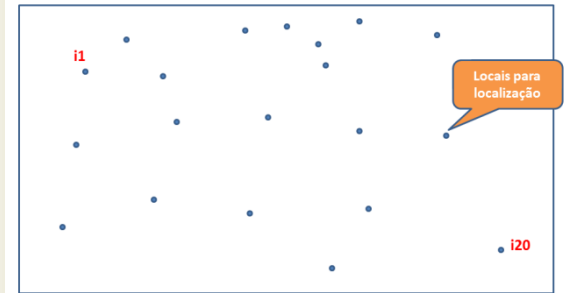
Local i é ou não atribuído à mediana j

$x[i,j] = 0/1$

$(i, j=1 \text{ a } N^{\circ} \text{ de Locais})$

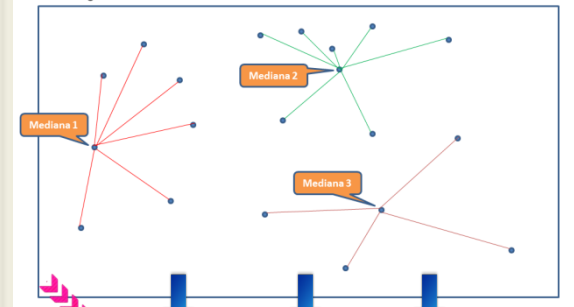
Localização: Modelo da p-Mediana

Problema: Dados n pontos, localizar p medianas.



Localização: Modelo da p-Mediana

N = 20 e p = 3 medianas para prestação de serviços:



	x11	x12	x13
x21			
x31			

Capítulo 7

	L1	L2	L3
L1	1	0	0
L2	0	0	1
L3	0	0	1

7. Problema das Reuniões



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o agente da cidade } i \\ & \text{é designado para} \\ & \text{reunião na cidade } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

7-24

Modelo Matemático

Minimizar = $186*x_{12} + 281*x_{13} + 471*x_{14} + 446*x_{15} + 186*x_{21} + 289*x_{23} + 390*x_{24} + 275*x_{25} + 281*x_{31} + 289*x_{32} + 743*x_{34} + 562*x_{35} + 471*x_{41} + 390*x_{42} + 743*x_{43} + 162*x_{45} + 446*x_{51} + 275*x_{52} + 562*x_{53} + 162*x_{54}$;

Sujeito a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1; & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1; & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1; \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1; & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1; & x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} + x_{55} &= 2; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &\leq 3; & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &\leq 3; & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &\leq 3; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &\leq 3; & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &\leq 3; & & \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &\geq x_{11}; & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &\geq x_{22}; & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &\geq x_{33}; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &\geq x_{44}; & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &\geq x_{55}; & & \\ x_{21} &\leq x_{11}; x_{31} \leq x_{11}; x_{41} \leq x_{11}; x_{51} \leq x_{11}; \\ x_{12} &\leq x_{22}; x_{32} \leq x_{22}; x_{42} \leq x_{22}; x_{52} \leq x_{22}; \\ x_{13} &\leq x_{33}; x_{23} \leq x_{33}; x_{43} \leq x_{33}; x_{53} \leq x_{33}; \\ x_{14} &\leq x_{44}; x_{24} \leq x_{44}; x_{34} \leq x_{44}; x_{54} \leq x_{44}; \\ x_{15} &\leq x_{55}; x_{25} \leq x_{55}; x_{35} \leq x_{55}; x_{45} \leq x_{55}; \end{aligned}$$



	x11	x12	x13	x14	x15
	x21	x22	x23	x24	x25
	x31	x32	x33	x34	x35
	x41	x42	x43	x44	x45
	x51	x52	x53	x54	x55



7. Problema das Reuniões

➤ **P-MEDIANA**



Variable	Value
X12	0.000000
X13	0.000000
X14	0.000000
X15	0.000000
X21	1.000000
X23	0.000000
X24	0.000000
X25	0.000000
X31	1.000000
X32	0.000000
X34	0.000000
X35	0.000000
X41	0.000000
X42	0.000000
X43	0.000000
X45	1.000000
X51	0.000000
X52	0.000000
X53	0.000000
X54	0.000000
X11	1.000000
X22	0.000000
X33	0.000000
X44	0.000000
X55	1.000000

7-25

Lingo 16.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit Solver Window Help



Lingo Model - Lingo1

```

min = 186*x12 + 281*x13 + 471*x14 + 446*x15 + 186*x21 + 289*x23
x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = 1;
x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 1;
x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 1;
x41 + x42 + x43 + x44 + x45 = 1;
x11 + x22 + x33 + x44 + x55 = 2;
x11 + x21 + x31 + x41 + x51 <= 3;
x12 + x22 + x32 + x42 + x52 <= 3;
x13 + x23 + x33 + x43 + x53 <= 3;
x14 + x24 + x34 + x44 + x54 <= 3;
x15 + x25 + x35 + x45 + x55 <= 3;
x11 + x21 + x31 + x41 + x51 >= x11;
x12 + x22 + x32 + x42 + x52 >= x22;
x13 + x23 + x33 + x43 + x53 >= x33;
x14 + x24 + x34 + x44 + x54 >= x44;
x15 + x25 + x35 + x45 + x55 >= x55;
x21 <= x11; x31 <= x11; x41 <= x11; x51 <= x11;
x12 <= x22; x32 <= x22; x42 <= x22; x52 <= x22;
x13 <= x33; x23 <= x33; x43 <= x33; x53 <= x33;
x14 <= x44; x24 <= x44; x34 <= x44; x54 <= x44;
x15 <= x55; x25 <= x55; x35 <= x55; x45 <= x55;
@bin(x11); @bin(x12); @bin(x13); @bin(x14); @bin(x15);
    
```



Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: ☐ Máx ☒ Mín ☐ Valor de:

Células variáveis:

Submeter às restrições:

	RP	L		PP			
RP	0	186	281	471	446		
SJRP	186	0	289	390	275	629	
U	281	289	0	743	562		
L	471	390	743	0	162		
PP	446	275	562	162	0		
	1	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	0	0	1	
	1	0	0	0	0	1	
	0	0	0	1	0	1	
	0	0	0	1	0	1	
						2	2

Capítulo 7



8. Problema dos Incineradores

➤ P-MEDIANA



$$v(\text{PMC}) = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

sujeito a $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ para todo $i \in N$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = p$$
$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} \leq Q_{ij} \text{ para todo } j \in N$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\}; i, j \in N$$

7-26

A Plus quer construir **1** ou **2** incineradores para destruir produtos tóxicos transportados de **5** cidades (**A, B, C, D, E**) para incineração em qualquer uma destas cidades. A capacidade de cada incinerador instalado será de **1000** toneladas.

Distâncias

Resolver o problema da **p-mediana** e localizar:

- a) **Um incinerador**
- b) **Dois incineradores**

	A	B	C	D	E	Tonela das
A	0	9	6	4	2	100
B	9	0	7	1	5	200
C	6	7	0	3	8	150
D	4	1	3	0	3	150
E	2	5	8	3	0	300



8. Problema dos Incineradores

P-MEDIANA



$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o produto tóxico da cidade } i \text{ é designado para o incinerador da cidade } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

7-27

Modelo Matemático

Minimizar $= 9 \cdot x_{12} + 6 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{14} + 2 \cdot x_{15} + 9 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{23} + 1 \cdot x_{24} + 5 \cdot x_{25} + 6 \cdot x_{31} + 7 \cdot x_{32} + 3 \cdot x_{34} + 8 \cdot x_{35} + 4 \cdot x_{41} + 1 \cdot x_{42} + 3 \cdot x_{43} + 3 \cdot x_{45} + 2 \cdot x_{51} + 5 \cdot x_{52} + 8 \cdot x_{53} + 3 \cdot x_{54};$

s/a $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1; \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1; \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1;$
 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1; \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \quad x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} + x_{55} = 1;$
 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 5; \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \leq 5; \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \leq 5;$
 $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} \leq 5; \quad x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} \leq 5; \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \geq 2 \cdot x_{11};$
 $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \geq 2 \cdot x_{22}; \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \geq 2 \cdot x_{33}; \quad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} \geq 2 \cdot x_{44};$
 $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} \geq 2 \cdot x_{55};$

$100 \cdot x_{11} + 200 \cdot x_{21} + 150 \cdot x_{31} + 150 \cdot x_{41} + 300 \cdot x_{51} \leq 1000 \cdot x_{11};$
 $100 \cdot x_{12} + 200 \cdot x_{22} + 150 \cdot x_{32} + 150 \cdot x_{42} + 300 \cdot x_{52} \leq 1000 \cdot x_{22};$
 $100 \cdot x_{13} + 200 \cdot x_{23} + 150 \cdot x_{33} + 150 \cdot x_{43} + 300 \cdot x_{53} \leq 1000 \cdot x_{33};$
 $100 \cdot x_{14} + 200 \cdot x_{24} + 150 \cdot x_{34} + 150 \cdot x_{44} + 300 \cdot x_{54} \leq 1000 \cdot x_{44};$
 $100 \cdot x_{15} + 200 \cdot x_{25} + 150 \cdot x_{35} + 150 \cdot x_{45} + 300 \cdot x_{55} \leq 1000 \cdot x_{55};$
 $x_{21} \leq x_{11}; \quad x_{31} \leq x_{11}; \quad x_{41} \leq x_{11}; \quad x_{51} \leq x_{11}; \quad x_{12} \leq x_{22}; \quad x_{32} \leq x_{22}; \quad x_{42} \leq x_{22}; \quad x_{52} \leq x_{22};$
 $x_{13} \leq x_{33}; \quad x_{23} \leq x_{33}; \quad x_{43} \leq x_{33}; \quad x_{53} \leq x_{33}; \quad x_{14} \leq x_{44}; \quad x_{24} \leq x_{44}; \quad x_{34} \leq x_{44}; \quad x_{54} \leq x_{44};$
 $x_{15} \leq x_{55}; \quad x_{25} \leq x_{55}; \quad x_{35} \leq x_{55}; \quad x_{45} \leq x_{55};$



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}
	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}



8. Problema dos Incineradores

➤ **P-MEDIANA**



Variable	Value
X12	0.000000
X13	0.000000
X14	1.000000
X15	0.000000
X21	0.000000
X23	0.000000
X24	1.000000
X25	0.000000
X31	0.000000
X32	0.000000
X34	1.000000
X35	0.000000
X41	0.000000
X42	0.000000
X43	0.000000
X45	0.000000
X51	0.000000
X52	0.000000
X53	0.000000
X54	1.000000
X11	0.000000
X22	0.000000
X33	0.000000
X44	1.000000
X55	0.000000



7-28

```
Lingo 16.0 - Lingo Model - Lingo1
File Edit Solver Window Help

min = 9*x12 + 6*x13 + 4*x14 + 2*x15
+ 9*x21 + 7*x23 + 1*x24 + 5*x25
+ 6*x31 + 7*x32 + 3*x34 + 8*x35
+ 4*x41 + 1*x42 + 3*x43 + 3*x45
+ 2*x51 + 5*x52 + 8*x53 + 3*x54;
x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = 1;
x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = 1;
x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 1;
x41 + x42 + x43 + x44 + x45 = 1;
x51 + x52 + x53 + x54 + x55 = 1;
100*x11 + 200*x21 + 150*x31 + 150*x41 + 300*x51 <= 1000*x11;
100*x12 + 200*x22 + 150*x32 + 150*x42 + 300*x52 <= 1000*x22;
100*x13 + 200*x23 + 150*x33 + 150*x43 + 300*x53 <= 1000*x33;
100*x14 + 200*x24 + 150*x34 + 150*x44 + 300*x54 <= 1000*x44;
100*x15 + 200*x25 + 150*x35 + 150*x45 + 300*x55 <= 1000*x55;
x11 + x22 + x33 + x44 + x55 = 1;
x21 <= x11; x31 <= x11; x41 <= x11; x51 <= x11;
x12 <= x22; x32 <= x22; x42 <= x22; x52 <= x22;
x13 <= x33; x23 <= x33; x43 <= x33; x53 <= x33;
x14 <= x44; x24 <= x44; x34 <= x44; x54 <= x44;
x15 <= x55; x25 <= x55; x35 <= x55; x45 <= x55;
@bin(x11); @bin(x12); @bin(x13); @bin(x14); @bin(x15);
@bin(x21); @bin(x22); @bin(x23); @bin(x24); @bin(x25);
```

Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: ☐ Máx ☒ Mín ☐ Valor de:

Células variáveis:

Submeter às restrições:

Variáveis					
0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	

Distâncias					
0	9	6	4	2	
9	0	7	1	5	
6	7	0	3	8	
4	1	3	0	3	
2	5	8	3	0	

Fluxos					
0	0	0	0	0	
100	200	150	50	300	
1000	1000	1000	1000	1000	

FO					
11					
Horizontal					
1					
1					
1					
1					
1					
1					
Diagonal					
1					
1					
Fluxos					
0					
0					
0					
900					
0					



Capítulo 7

9. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO



7-29



Dispõe-se de **4** operários para executar **4** tarefas. O custo da designação está na Tabela abaixo. **Encontrar a designação de custo mínimo.**

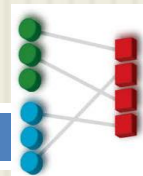


	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4
Operário 1	6	3	2	4
Operário 2	10	6	2	5
Operário 3	6	10	9	8
Operário 4	11	5	4	9





Modelo da Designação



7-30

Modelo Matemático

Designação de:

- Operações a máquinas
- Operários a tarefas
- Trabalhadores a locais de trabalho
- Dinheiro a investimentos

Designação de custo mínimo

Minimizar o custo do transporte dos agentes designados aos locais de trabalho

Designação de lucro máximo

Maximizar a satisfação dos agentes designados aos locais de trabalho



$$\min f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Custo

$$s/a \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1..n)$$

Horizontal

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1..n)$$

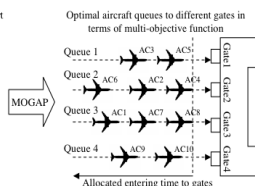
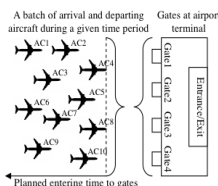
Vertical

$$x_{ij} = 0/1$$

	x11	x12	x13	x14
	x21	x22	x23	x24
	x31	x32	x33	x34
	x41	x42	x43	x44



Capítulo 7



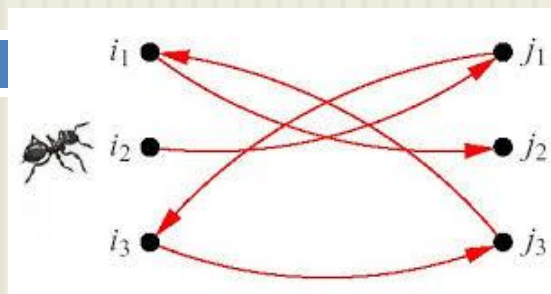
9. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO



7-31

Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é designado a } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



	T1	T2	T3	T4
O1	6	3	2	4
O2	10	6	2	5
O3	6	10	9	8
O4	11	5	4	9

Função-Objetivo

$$\begin{aligned} \min f = & 6x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \\ & + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + \\ & 2x_{23} + 5x_{24} + 6x_{31} + 10x_{32} \\ & + 9x_{33} + 8x_{34} + 11x_{41} + \\ & 5x_{42} + 4x_{43} + 9x_{44} \end{aligned}$$

Restrições

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

x11	x12	x13	x14
x21	x22	x23	x24
x31	x32	x33	x34
x41	x42	x43	x44



9. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ BÁSICO

			4
		2	
6			
	5		

7-32



M12	A	B	C	D	E	F
1						
2		Variáveis				
3		0	0	0	1	
4		0	0	1	0	
5		1	0	0	0	
6		0	1	0	0	
7						
8		FO				17
9		6	3	2	4	
10		10	6	2	5	
11		6	10	9	8	
12		11	5	4	9	
13						
14		Restrições				
15		1			1	
16		1			1	
17		1			1	
18		1			1	
19						

Solução:

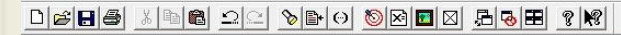
$$\begin{matrix} x_{14} = 1 & x_{23} = 1 \\ x_{31} = 1 & x_{42} = 1 \end{matrix}$$

**Operário 1 - Tarefa 4
Operário 2 - Tarefa 3
Operário 3 - Tarefa 1
Operário 4 - Tarefa 2**

O custo dessa designação, dado pela soma total do custo da designação dos operários às tarefas, é igual a 4 + 2 + 6 + 5 = 17

Lingo 14.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit LINGO Window Help



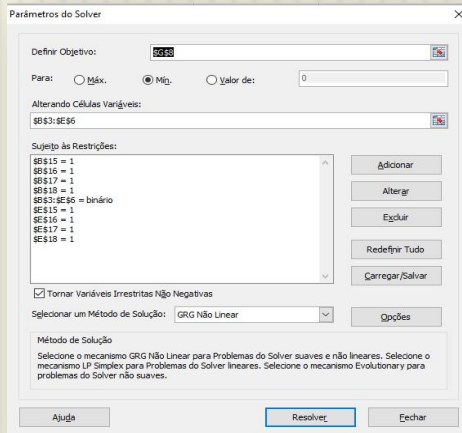
Lingo Model - Lingo1

```
Min = 6*x11 + 3*x12 + 2*x13 + 4*x14 +
10*x21 + 6*x22 + 2*x23 + 5*x24 +
6*x31 + 10*x32 + 9*x33 + 8*x34 +
11*x41 + 5*x42 + 4*x43 + 9*x44;
```

```
x11 + x12 + x13 + x14 = 1;
x21 + x22 + x23 + x24 = 1;
x31 + x32 + x33 + x34 = 1;
x41 + x42 + x43 + x44 = 1;
x11 + x21 + x31 + x41 = 1;
x12 + x22 + x32 + x42 = 1;
x13 + x23 + x33 + x43 = 1;
x14 + x24 + x34 + x44 = 1;
```

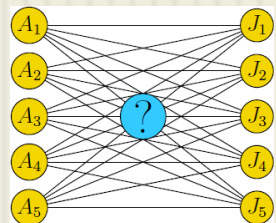
```
@gin(x11);
@gin(x12);
@gin(x13);
@gin(x14);
@gin(x21);
@gin(x22);
@gin(x23);
@gin(x24);
...
end
```

Variable	Value
X11	0.000000
X12	0.000000
X13	0.000000
X14	1.000000
X21	0.000000
X22	0.000000
X23	1.000000
X24	0.000000
X31	1.000000
X32	0.000000
X33	0.000000
X34	0.000000
X41	0.000000
X42	1.000000
X43	0.000000
X44	0.000000



Capítulo 7





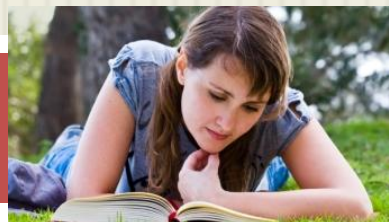
10. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO



7-33

Um gerente vai realizar a conferência anual de vendas da empresa. Para auxiliar, ele contratou **4** funcionários temporários (Ana, Ivo, João e Silas) e cada um deles vai lidar com uma das **4** seguintes tarefas: **1) Word; 2) Excel; 3) Powerpoint; 4) Inscrições**. Ele precisa determinar qual pessoa realizará cada tarefa. A Tabela ao lado fornece quantas horas cada um deles precisa para realizar cada tarefa e o salário por hora com base na formação de cada um deles. **O que fazer?**

	Word	Excel	Ppt	Inscrições	Salário/Hora
Ana	35	41	27	40	\$ 14
Ivo	47	45	32	51	\$ 12
João	39	56	36	43	\$ 13
Silas	32	51	25	46	\$ 15



Capítulo 7



10. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO



7-34

35 x 14 = 390

Variáveis

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é designado a } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



	T1	T2	T3	T4
O1	490	574	378	560
O2	564	540	384	612
O3	507	728	468	559
O4	480	765	375	690

Função-Objetivo

$\min f = 490x_{11} + 574x_{12} + 378x_{13} + 560x_{14} + 564x_{21} + 540x_{22} + 384x_{23} + 612x_{24} + 507x_{31} + 728x_{32} + 468x_{33} + 559x_{34} + 480x_{41} + 765x_{42} + 375x_{43} + 690x_{44}$

Restrições

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$
 $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$
 $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$
 $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$
 $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$
 $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$
 $x_{ij} = 0/1$

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}



Capítulo 7



10. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ **BÁSICO+**



		378	
	540		
			559
480			

7-35

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Variáveis						
3		0	0	1	0			
4		0	1	0	0			
5		0	0	0	1			
6		1	0	0	0			
7								
8		FO					1957	
9		490	574	378	560			
10		564	540	384	612			
11		507	728	468	559			
12		480	765	375	690			
13								
14		Restrições						
15		1			1			
16		1			1			
17		1			1			
18		1			1			
19								

Solução:

$$\begin{matrix} x_{13} = 1 & x_{23} = 1 \\ x_{34} = 1 & x_{41} = 1 \end{matrix}$$

Ana - Powerpoint
Ivo - Excel
João - Inscrições
Silas - Word

O custo da designação, dado pela soma total do custo da designação dos funcionários às tarefas, é igual a 378 + 540 + 559 + 480 = 1957

```

Lingo 14.0 - Lingo Model - Lingo1
File Edit LINGO Window Help

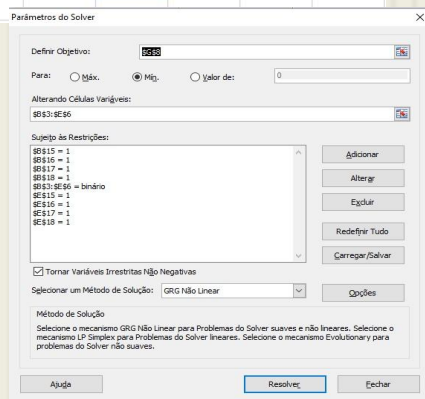
Lingo Model - Lingo1
Min = 490*x11 + 574*x12 + 378*x13 + 560*x14 +
564*x21 + 540*x22 + 384*x23 + 612*x24 +
507*x31 + 728*x32 + 468*x33 + 559*x34 +
480*x41 + 765*x42 + 375*x43 + 690*x44;

x11 + x12 + x13 + x14 = 1;
x21 + x22 + x23 + x24 = 1;
x31 + x32 + x33 + x34 = 1;
x41 + x42 + x43 + x44 = 1;
x11 + x21 + x31 + x41 = 1;
x12 + x22 + x32 + x42 = 1;
x13 + x23 + x33 + x43 = 1;
x14 + x24 + x34 + x44 = 1;

@gin(x11);
@gin(x12);
@gin(x13);
@gin(x14);
@gin(x21);
@gin(x22);
@gin(x23);
@gin(x24);

end
    
```

Variable	Value
X11	0.000000
X12	0.000000
X13	1.000000
X14	0.000000
X21	0.000000
X22	1.000000
X23	0.000000
X24	0.000000
X31	0.000000
X32	0.000000
X33	0.000000
X34	1.000000
X41	1.000000
X42	0.000000
X43	0.000000
X44	0.000000



Capítulo 7



11. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ TERCEIRIZAÇÃO



7-36

Uma prestadora de serviços dispõe de **7** agentes para designação a **3** locais de trabalho, sendo que os locais requerem **3**, **2** e **1** agentes respectivamente, ou seja, **6** agentes no total. Os custos de designação são dados pelas tarifas de transporte público dos agentes aos locais de trabalho fornecidas na **Tabela** abaixo. **O que fazer?**

	Local 1	Local 2	Local 3
Agente 1	4	6	3
Agente 2	2	4	7
Agente 3	5	3	2
Agente 4	3	7	2
Agente 5	4	8	5
Agente 6	1	9	6
Agente 7	5	7	9



Capítulo 7

11. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ TERCEIRIZAÇÃO

	L1	L2	L3
A1	4	6	3
A2	2	4	7
A3	5	3	2
A4	3	7	2
A5	4	8	5
A6	1	9	6
A7	5	7	9

x11	x12	x13
x21	x22	x23
x31	x32	x33
x41	x42	x43
x51	x52	x53
x61	x62	x63
x71	x72	x73



Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é designado a } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função-Objetivo

$$\min f = 4x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 3x_{41} + 7x_{42} + 2x_{43} + 4x_{51} + 8x_{52} + 5x_{53} + x_{61} + 9x_{62} + 6x_{63} + 5x_{71} + 7x_{72} + 9x_{73}$$

Restrições

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} &\leq 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} &\leq 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} &\leq 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} &= 3 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} &= 2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} &= 1 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$

11. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

TERCEIRIZAÇÃO

1		
	1	
	1	
		1
1		
1		



7-38

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Variáveis				Restrições			
3		1	0	0		1		3	
4		0	1	0		1		2	
5		0	1	0		1		1	
6		0	0	1		1			
7		1	0	0		1			
8		1	0	0		1			
9		0	0	0		0			
10									
11		FO							
12		4	6	3				18	
13		2	4	7					
14		5	3	2					
15		3	7	2					
16		4	8	5					
17		1	9	6					
18		5	7	9					
19									

Solução:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 & x_{22} &= 1 \\ x_{32} &= 1 & x_{43} &= 1 \\ x_{51} &= 1 & x_{61} &= 1 \end{aligned}$$

Os agentes 1, 5 e 6 serão designados ao local 1, os agentes 2 e 3 para o local 2 e o agente 4 para o local 3. O agente 7 não será designado.

O custo dessa designação, dado pela soma total do custo do transporte dos agentes aos locais de trabalho, é igual a $(4 + 4 + 1) + (4 + 3) + (2) = 18$.

```

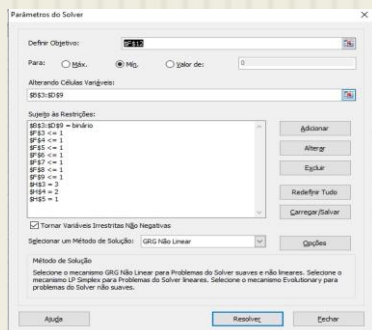
Lingo 14.0 - Lingo Model - Lingo2
File Edit LINGO Window Help

Lingo Model - Lingo2
Min = 4*x11 + 6*x12 + 3*x13 +
2*x21 + 4*x22 + 7*x23 +
5*x31 + 3*x32 + 2*x33 +
3*x41 + 7*x42 + 2*x43 +
4*x51 + 8*x52 + 5*x53 +
x61 + 9*x62 + 6*x63 +
5*x71 + 7*x72 + 9*x73;
x11 + x12 + x13 <= 1;
x21 + x22 + x23 <= 1;
x31 + x32 + x33 <= 1;
x41 + x42 + x43 <= 1;
x51 + x52 + x53 <= 1;
x61 + x62 + x63 <= 1;
x71 + x72 + x73 <= 1;
x11 + x21 + x31 + x41 + x51 + x61 + x71 = 3;
x12 + x22 + x32 + x42 + x52 + x62 + x72 = 2;
x13 + x23 + x33 + x43 + x53 + x63 + x73 = 1;

end
    
```



Variable	Value
X11	1.000000
X12	0.000000
X13	0.000000
X21	0.000000
X22	1.000000
X23	0.000000
X31	0.000000
X32	1.000000
X33	0.000000
X41	0.000000
X42	0.000000
X43	1.000000
X51	1.000000
X52	0.000000
X53	0.000000
X61	1.000000
X62	0.000000
X63	0.000000
X71	0.000000
X72	0.000000
X73	0.000000



Capítulo 7



12. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ SALAS DE CIRURGIAS



7-39



Um hospital tem **5** médicos e **7** cirurgias para serem programadas para o dia seguinte em **3** salas, com tempo igual a **10** horas disponíveis em cada uma das salas (**600** minutos).

A **Tabela 1** apresenta as preferências de cada um dos médicos pelas salas, onde: **0** (= não), **5** (= indiferente), **10** (= sim). A **Tabela 2** fornece o tempo em minutos que os médicos necessitam, em média, para efetuar cada uma das cirurgias.

O que fazer?



12. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ SALAS DE CIRURGIAS



7-40

Preferências
dos médicos

Médico	Sala 1	Sala 2	Sala 3
1	10	5	0
2	10	10	10
3	0	10	5
4	5	10	0
5	10	5	10



Duração das cirurgias

Cirurgia	Médico	Tempo de cirurgia (minutos)
1	1	400
2	2	180
3	3	120
4	4	60
5	5	480
6	3	90
7	1	240



Capítulo

12. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

➤ SALAS DE CIRURGIAS

10	5	0
10	10	10
0	10	5
5	10	0
10	5	10
0	10	5
10	5	0

x11	x12	x13
x21	x22	x23
x31	x32	x33
x41	x42	x43
x51		x53
x61		x63
x71		x73



Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é designado a } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função-Objetivo

$$\begin{aligned} \max f = & 10x_{11} + 5x_{12} \\ & + 0x_{13} + 10x_{21} + \\ & 10x_{22} + 10x_{23} + 0x_{31} \\ & + 10x_{32} + 5x_{33} + \\ & 5x_{41} + 10x_{42} + 0x_{43} \\ & + 10x_{51} + 5x_{52} + \\ & 10x_{53} + 0x_{61} + 10x_{62} \\ & + 5x_{63} + 10x_{71} + \\ & 5x_{72} + 0x_{73} \end{aligned}$$



Restrições

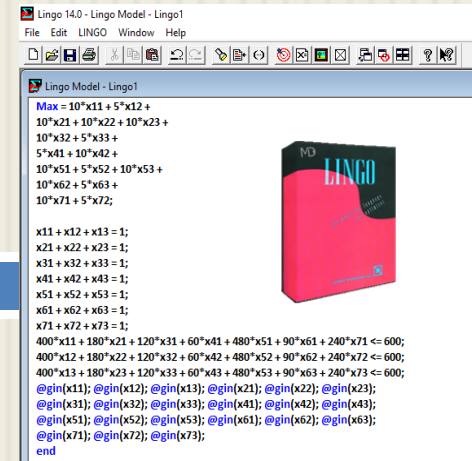
$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} &= 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} &= 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} &= 1 \\ 400x_{11} + 180x_{21} + 120x_{31} + \\ 60x_{41} + 480x_{51} + 90x_{61} + \\ 240x_{71} &\leq 600 \\ 400x_{12} + 180x_{22} + 120x_{32} + \\ 60x_{42} + 480x_{52} + 90x_{62} + \\ 240x_{72} &\leq 600 \\ 400x_{13} + 180x_{23} + 120x_{33} + \\ 60x_{43} + 480x_{53} + 90x_{63} + \\ 240x_{73} &\leq 600 \\ x_{ij} &= 0/1 \end{aligned}$$





12. PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

SALAS DE CIRURGIAS



7-42

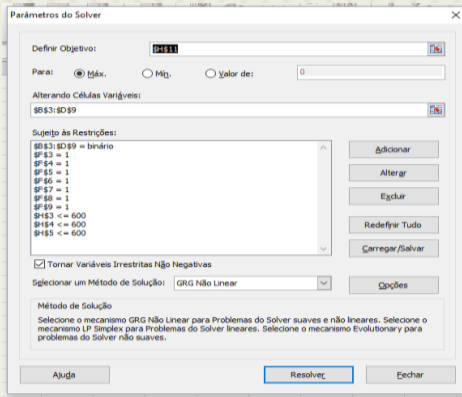
H11	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Varáveis				Restrições			
3		1	0	0		1		580	
4		1	0	0		1		510	
5		0	1	0		1		480	
6		0	1	0		1			
7		0	0	1		1			
8		0	1	0		1			
9		0	1	0		1			
10									
11		FO				Tempo		65	
12		10	5	0		400			
13		10	10	10		180			
14		0	10	5		120			
15		5	10	0		60			
16		10	5	10		480			
17		0	10	5		90			
18		10	5	0		240			
19									

Solução:

$x_{11} = 1$ $x_{21} = 1$
 $x_{32} = 1$ $x_{42} = 1$
 $x_{53} = 1$ $x_{62} = 1$
 $x_{72} = 1$

Assim, as cirurgias 1 e 2 serão designadas à sala 1, as cirurgias 3, 4, 6 e 7 à sala 2, e a cirurgia 5 à sala 3.

A soma das preferências da designação obtida é igual a $(10 + 10) + (10 + 10 + 10 + 5) + (10) = 65$, que corresponde ao máximo de atendimento das preferências de cada médico.



Variable	Value
X11	1.000000
X12	0.000000
X21	1.000000
X22	0.000000
X23	0.000000
X32	1.000000
X33	0.000000
X41	0.000000
X42	1.000000
X51	0.000000
X52	0.000000
X53	1.000000
X62	1.000000
X63	0.000000
X71	0.000000
X72	1.000000
X13	0.000000
X31	0.000000
X43	0.000000
X61	0.000000
X73	0.000000



13. Problema dos Correios

7-43

Uma franquia dos Correios deseja determinar o número de funcionários de horário integral que deve contratar para iniciar suas atividades. Para fazê-lo, recebeu uma Tabela dos Correios com número mínimo de funcionários por dia da semana. Essas informações se encontram na Tabela ao lado. O sindicato dos empregados dos Correios mantém um acordo sindical que determina que cada empregado deve trabalhar **5 dias** consecutivos e folgar em seguida **2 dias** (por exemplo: um empregado que trabalhe de segunda a sexta feira deve folgar no sábado e no domingo), e que as franquias devem ter apenas empregados com horário integral. **Qual o número total de empregados que a franquia deve contratar e o número de empregados por dia?**



Dia da semana	Número de funcionários
Domingo	11
Segunda-feira	18
Terça-feira	12
Quarta-feira	15
Quinta-feira	19
Sexta-feira	14
Sábado	16



13. Problema dos Correios

7-44

Variáveis

x_i = número de funcionários que começam a trabalhar no dia i (domingo... sábado)

Função-objetivo

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$



Restrições

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 11$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 18$$

$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 15$$

$$x_i \geq 0 \text{ e inteiras}$$



13. Problema dos Correios

7-45

Lingo 16.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit Solver Window Help



Lingo Model - Lingo1

```
min = x1 + x2 + x3 + x4 +
x5 + x6 + x7;
x1 + x2 + x3 + x4 + x5 >= 19;
x2 + x3 + x4 + x5 + x6 >= 14;
x3 + x4 + x5 + x6 + x7 >= 16;
x4 + x5 + x6 + x7 + x1 >= 11;
x5 + x6 + x7 + x1 + x2 >= 18;
x6 + x7 + x1 + x2 + x3 >= 12;
x7 + x1 + x2 + x3 + x4 >= 15;
@gin(x1); @gin(x2);
@gin(x3); @gin(x4);
@gin(x5); @gin(x6);
@gin(x7);
end
```



Solução:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 & x_2 &= 2 \\ x_3 &= 4 & x_4 &= 0 \\ x_5 &= 8 & x_6 &= 0 \\ x_7 &= 4 \end{aligned}$$

Desta forma, 5 agentes começam a trabalhar no domingo, 2 na segunda, 4 na terça, 8 na quinta e 4 no sábado.

Domingo	11	Segunda	18
Terça	12	Quarta	15
Quinta	19	Sexta	14
Sábado	16		

Função-Objetivo = 23

Variable	Value
X1	5.000000
X2	2.000000
X3	4.000000
X4	0.000000
X5	8.000000
X6	0.000000
X7	4.000000



Capítulo 7



14. Problema da Companhia Aérea

7-46



Período	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4	Turno 5	Nº mínimo de comissários
6-8h	x					48
8-10h	x	x				79
10-12h	x	x				65
12-14h	x	x	x			87
14-16h		x	x			64
16-18h			x	x		73
18-20h			x	x		82
20-22h				x		43
22-0h				x	x	52
0-6h					x	15
Custo diário por comissário	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195	

A Union Airways precisa decidir o número de comissários para trabalhar em cada um dos turnos.
Que decisão tomar?



Capítulo 7

14.Problema da Companhia Aérea

7-47

Variáveis

x_i = número de comissários no turno i

Restrições

$$x_1 \geq 48$$

$$x_1 + x_2 \geq 79 \quad \text{ ~~$x_1 + x_2 \geq 65$~~ }$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 87$$

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

$$\text{ ~~$x_3 + x_4 \geq 73$~~ } \quad x_3 + x_4 \geq 82$$

$$x_4 \geq 43$$

$$x_4 + x_5 \geq 52$$

$$x_5 \geq 15$$

$$x_i \geq 0 \text{ e inteiras}$$



Função-objetivo

$$\min f = 170 \cdot x_1 + 160 \cdot x_2 + 175 \cdot x_3 + 180 \cdot x_4 + 195 \cdot x_5$$



14. Problema da Companhia Aérea

7-48

Lingo 16.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit Solver Window Help

Lingo Model - Lingo1

```
min = 170*x1 + 160*x2 + 175*x3 +  
180*x4 + 195*x5 ;  
x1 >= 48;  
x1 + x2 >= 79;  
x1 + x2 + x3 >= 87;  
x2 + x3 >= 64;  
x3 + x4 >= 82;  
x4 >= 43;  
x4 + x5 >= 52;  
x5 >= 15;  
@gin(x1); @gin(x2);  
@gin(x3); @gin(x4);  
@gin(x5);  
end
```

Solução:

$x1 = 48$ $x2 = 31$
 $x3 = 39$ $x4 = 43$
 $x5 = 15$

Desta forma, 48 comissários trabalharão no turno 1, 31 no turno 2, 39 no turno 3, 43 no turno 4 e 15 comissários no turno 5.

Função-Objetivo = 30610

Variable	Value
X1	48.00000
X2	31.00000
X3	39.00000
X4	43.00000
X5	15.00000
X6	0.000000
X7	0.000000



Capítulo 7



15. Transporte Público

7-49



O transporte público de uma cidade é formado por uma frota de **140** ônibus distribuídos em **22** linhas conforme a **Tabela** a seguir.



Redistribuir a quantidade de ônibus em cada linha.

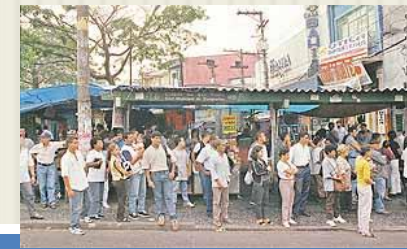


Capítulo 7

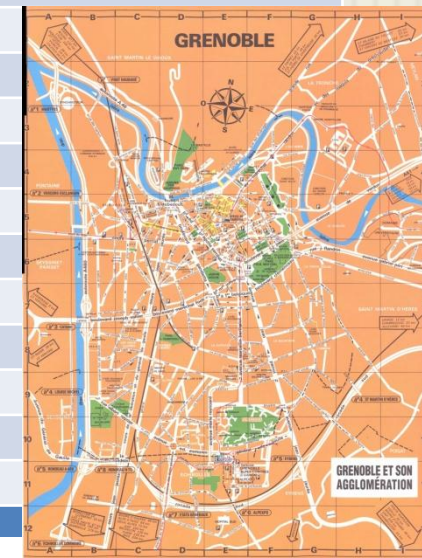


15. Transporte Público

7-50



Linha de ônibus	Tempo de rotação (s)	Comprimento (m)	Quantidade de ônibus
1	3717	10160	6
2	4982	17280	8
3	3688	10280	6
4	4337	13400	7
5	6405	23940	14
6	3769	13080	6
7	3968	13460	5
8	4900	17460	4
9	5746	22220	7
10	5753	24600	7
11	7388	30890	14
12	2832	7620	3
13	4182	13100	12
14	3618	12340	3
15	4009	20040	2
16	5291	17390	8
17	5710	20250	7
18	3742	13540	3
19	3875	16260	3
20	3436	10440	5
21	5167	19740	6
22	3950	14000	4





15. Transporte Público



7-51

Modelo Matemático

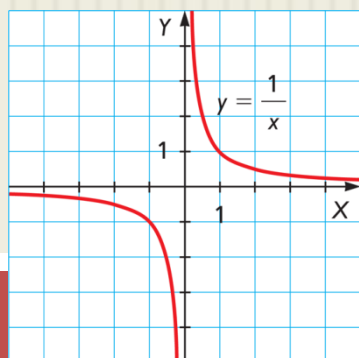
Minimizar $\sum \text{TR}_i / x_i$

Sujeito a $\left\{ \begin{array}{l} \sum x_i = 140 \\ x_i \geq 1 \text{ e inteiro} \end{array} \right.$

TR_i = tempo de rotação da linha i

x_i = quantidade de ônibus na linha i

Programação Não Linear Inteira



Capítulo 7



7-52



15. Transporte Público EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Variáveis		FO		Restrições			
2	6		3717		140		15607,39	
3	7		4982					
4	6		3688					
5	6		4337					
6	8		6405					
7	6		3769					
8	6		3968					
9	7		4900					
10	7		5746					
11	7		5753					
12	8		7388					
13	5		2832					
14	6		4182					
15	6		3618					
16	6		4009					
17	7		5291					
18	7		5710					
19	6		3742					
20	6		3875					
21	5		3436					
22	6		5167					
23	6		3950					
24								



Definir Objetivo:

5652

Para:

☐ Máx.☒ Mín.☐ Valor de:

0

Alterando Células Variáveis:

\$A\$2:\$A\$23

Sujeito às Restrições:

\$A\$2:\$A\$23 = número inteiro

\$A\$2:\$A\$23 >= 1

\$E\$2 = 140

Adicionar

Alterar

Excluir

Redefinir Tudo

Salvar

Não Negativas

Não Negativas

Selecione o
para

Capítulo 7



7-53



15. Transporte Público LINGO



```
Lingo 14.0 - Lingo Model - Lingo1
File Edit LINGO Window Help

min = 3717/x1 + 4982/x2 + 3688/x3 + 4337/x4 + 6405/x5 +
3769/x6 + 3968/x7 + 4900/x8 + 5746/x9 + 5753/x10 +
7388/x11 + 2832/x12 + 4182/x13 + 3618/x14 + 4009/x15 +
5291/x16 + 5710/x17 + 3742/x18 + 3875/x19 + 3436/x20 +
5167/x21 + 3950/x22;
x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 +
x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 +
x19 + x20 + x21 + x22 = 140;
x1 >= 1; x2 >= 1; x3 >= 1; x4 >= 1; x5 >= 1; x6 >= 1; x7 >= 1;
x8 >= 1; x9 >= 1; x10 >= 1; x11 >= 1; x12 >= 1; x13 >= 1;
x14 >= 1; x15 >= 1; x16 >= 1; x17 >= 1; x18 >= 1; x19 >= 1;
x20 >= 1; x21 >= 1; x22 >= 1;
@gin(x1); @gin(x2); @gin(x3); @gin(x4); @gin(x5);
@gin(x6); @gin(x7); @gin(x8); @gin(x9); @gin(x10);
@gin(x11); @gin(x12); @gin(x13); @gin(x14);
@gin(x15); @gin(x16); @gin(x17); @gin(x18);
@gin(x19); @gin(x20); @gin(x21); @gin(x22);
end
```

Variable	Value
X1	6.000000
X2	7.000000
X3	6.000000
X4	6.000000
X5	7.000000
X6	6.000000
X7	6.000000
X8	7.000000
X9	7.000000
X10	7.000000
X11	8.000000
X12	5.000000
X13	6.000000
X14	6.000000
X15	6.000000
X16	7.000000
X17	7.000000
X18	6.000000
X19	6.000000
X20	5.000000
X21	7.000000
X22	6.000000



Capítulo

