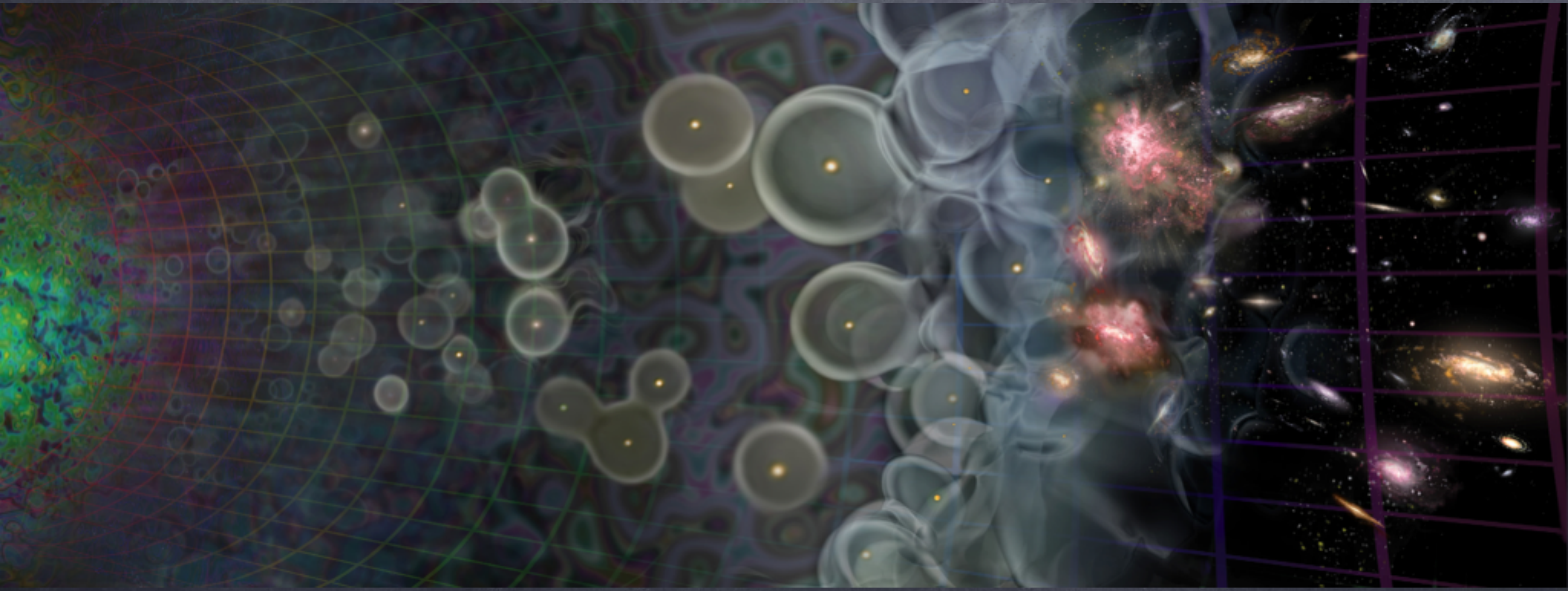
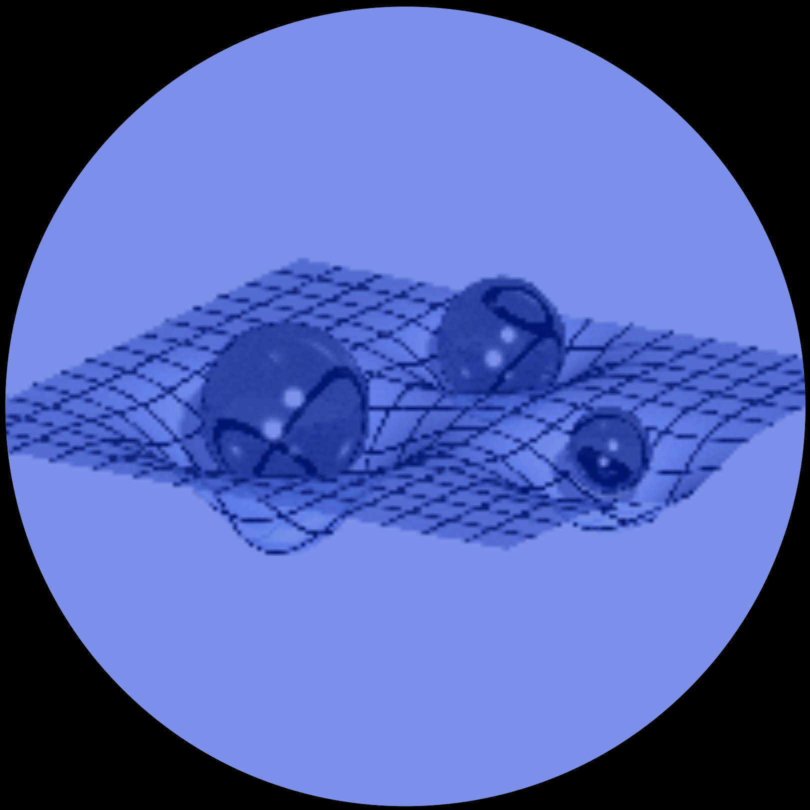
Introdução à Cosmologia Física

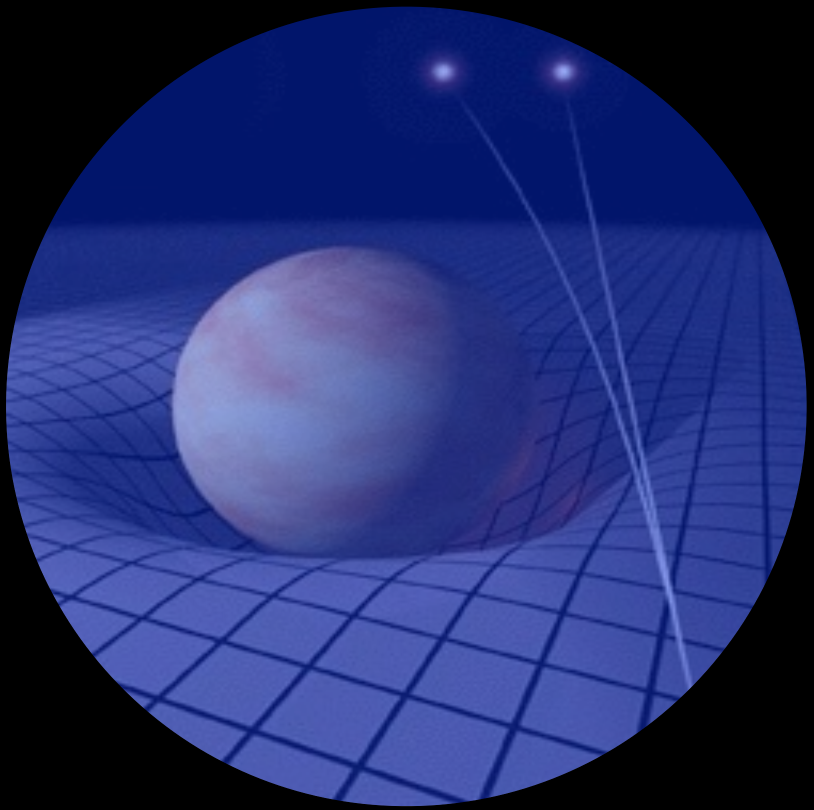


As Equações de Einstein



A matéria curva o espaço, determinando a métrica...

... e a métrica determina a cinemática da matéria...



Matéria e métrica determinam em conjunto a **dinâmica**

Matéria e gravidade têm que funcionar dentro de uma **dinâmica consistente**

➟ **Simetrias básicas implicam em leis de conservação (Teorema de Noether)**

As Equações de Einstein

A conservação do TEM deve ter uma contrapartida do lado da métrica do espaço-tempo.

De fato, a ação de Einstein-Hilbert satisfaz esse vínculo, e temos que:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + L_m \right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}}$$

Devido ao **Princípio Cosmológico**, em primeira aproximação os lados direito e esquerdo dessa equação devem ser **funções do tempo, apenas.**

Os únicos **parâmetros livres** dessa teoria são **constantes** no espaço e no tempo:

Métrica:

Curvatura espacial
Constante Cosmológica (Λ)

Matéria:

Massas
Constantes de acoplamento

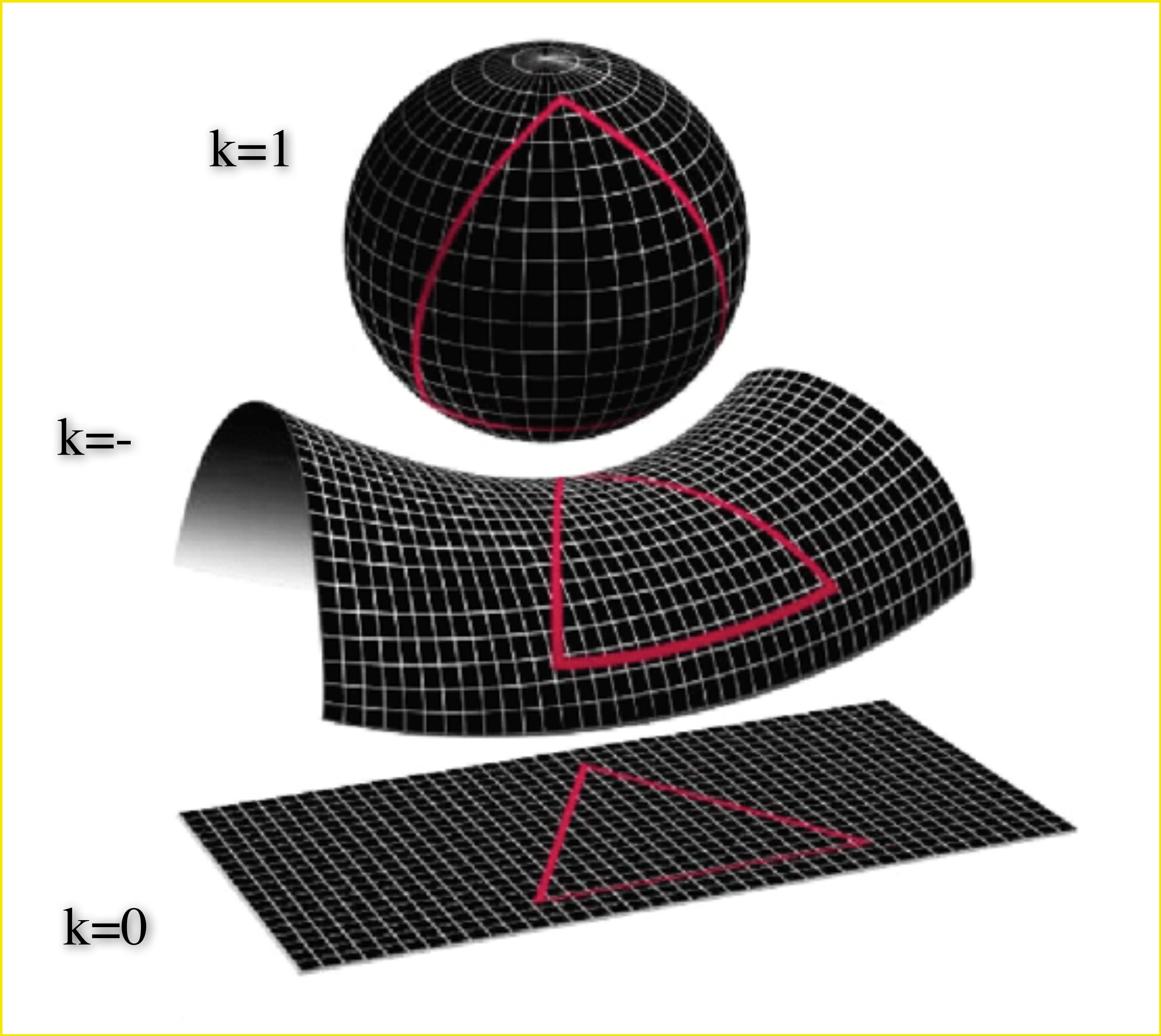
A cinemática do universo: as equações de Friedmann

A. Friedmann (1922-24), G. Lemaitre (1927), H. P. Robertson (1935-36), A. G. Walker(1937)

Seções espaciais de curvatura constante:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d\Sigma^2$$

Def.: $a(t_0)=1$



$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2$$

$(r/R_0)^2$

$$d\Sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Alguns sistemas de coordenadas populares usados para expressar as seções espaciais de FLRW:

Coordenadas polares:

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\, d\Omega^2$$

$k = \pm (R_0)^{-2}$

Coordenadas hiper-esféricas:

$$r = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\sqrt{k}\,\chi\right) \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = d\chi^2 + \frac{1}{k} \sin^2\left(\sqrt{k}\,\chi\right) d\Omega^2$$

Coordenadas conformes-Cartesianas:

$$r = \frac{R}{1+\frac{k}{4}R^2} \quad \Rightarrow \quad d\Sigma^2 = \frac{dR^2 + R^2 d\Omega^2}{(1+\frac{k}{4}R^2)^2}$$

Seções espaciais homogêneas e isotrópicas

A escolha mais comum é a segunda, já que em coordenadas hiper-esféricas as geodésicas radiais são triviais.

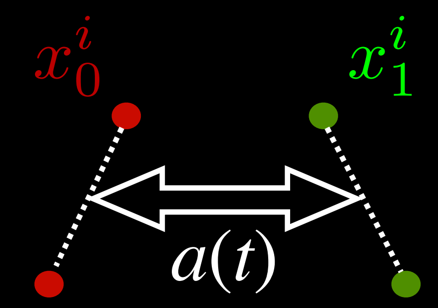
A métrica de FLRW e a expansão do universo

Considere dois corpos **em repouso**, em dois locais diferentes.

A distância (tipo-espaço) entre eles é dada, numa hipersuperfície **t=const.**, por:

$$\Delta s^2 = \Delta l^2(t) = a^2(t)(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)^2 = a^2(t)\, \Delta\vec{x}^{\,2}$$

constante!



A **velocidade** com a qual esses corpos "em repouso" estão se afastando é dada por:

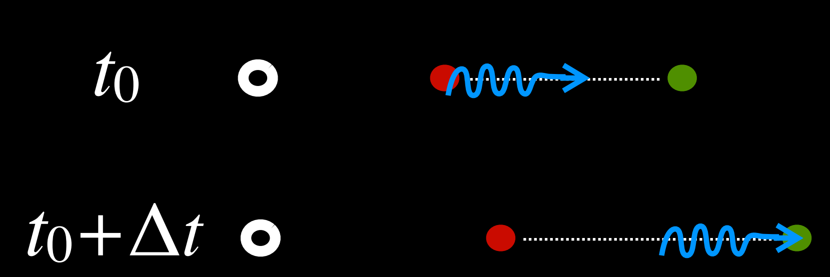
$$v = \frac{d}{dt}\Delta l = \frac{\dot{a}}{a}\Delta l \qquad \frac{\dot{a}}{a} \equiv H$$

Parâmetro de Hubble

Considere agora um raio de luz se propagando na direção radial - e vamos usar **coordenadas hiper-esféricas**. Temos:

$$ds_0^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d\chi^2 = 0$$

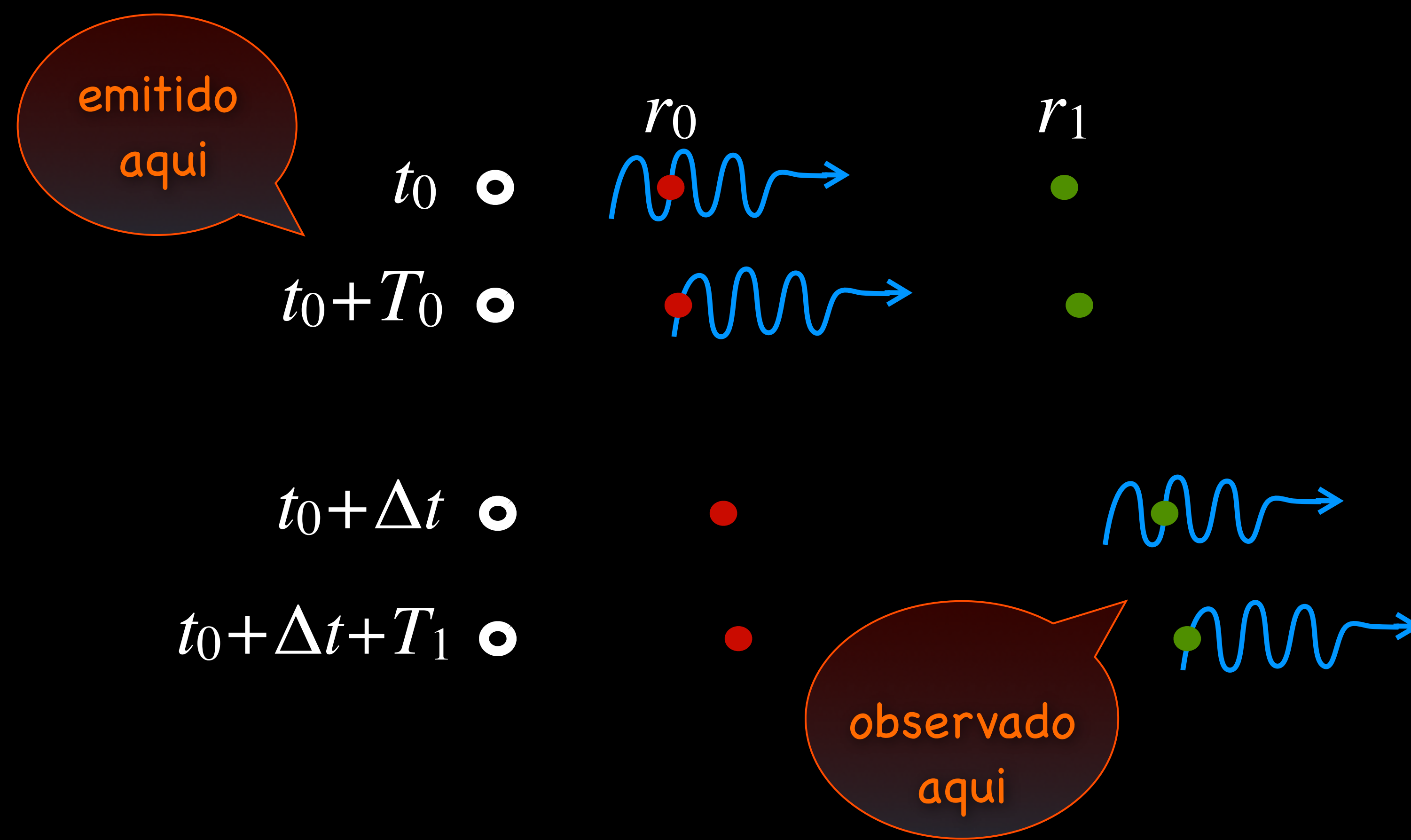
$$\Rightarrow \chi = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{dt}{a(t)}$$



O redshift cosmológico

Suponha que temos uma fonte de luz emitindo radiação com frequência ν_0 numa posição radial r_0, e num instante t_0. Um instante T_0 depois, t_0+T_0 , a fonte de luz estará emitindo radiação com a mesma fase (+2π) que tinha em t_0 .

Os raio de luz emitidos em t_0 e t_0+T_0 são, depois, observado numa posição r_1 :



$$\chi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0+T_0}^{t_1+T_1} \frac{dt}{a(t)}$$

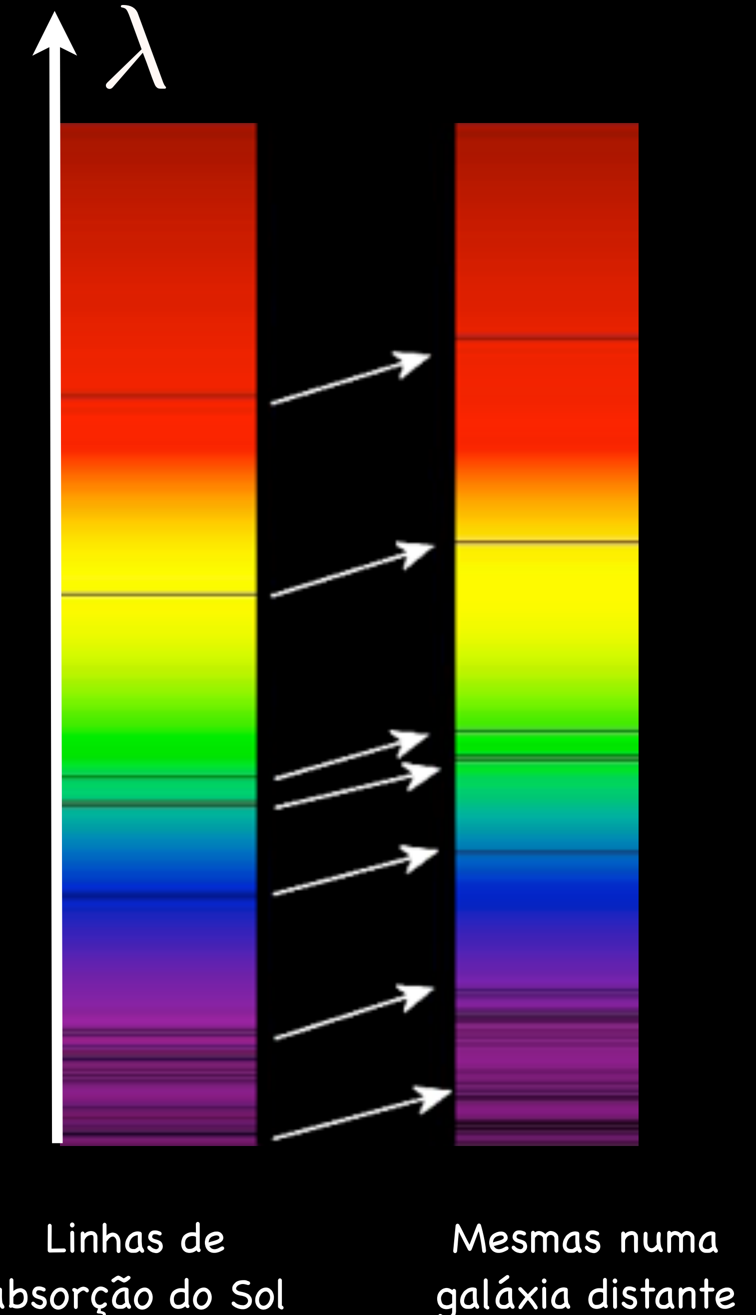
$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{a(t_0)} \simeq \frac{T_1}{a(t_1)} \qquad \Rightarrow \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$$

Em termos do **comprimento de onda** da luz: $$\frac{\lambda_{\rm obs}}{\lambda_{\rm emm}} = \frac{a(t_{\rm obs})}{a(t_{\rm emm})}$$

O **"redshift"** (ou "blueshift") é definido como: $$1+z = \frac{\lambda_{\rm obs}}{\lambda_{\rm emm}} = \frac{\nu_{\rm emm}}{\nu_{\rm obs}}$$

$$\Rightarrow \; z = \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda_{\rm emm}}{\lambda_{\rm emm}} = \frac{\nu_{\rm emm} - \nu_{\rm obs}}{\nu_{\rm obs}}$$



Qualquer linha de emissão ou absorção pode ser usada para calcular o redshift!

Tipicamente, observamos **aqui** na Terra ($r=\chi=0, t=0$) a luz que é emitida por **galáxias distantes** num instante t no passado.

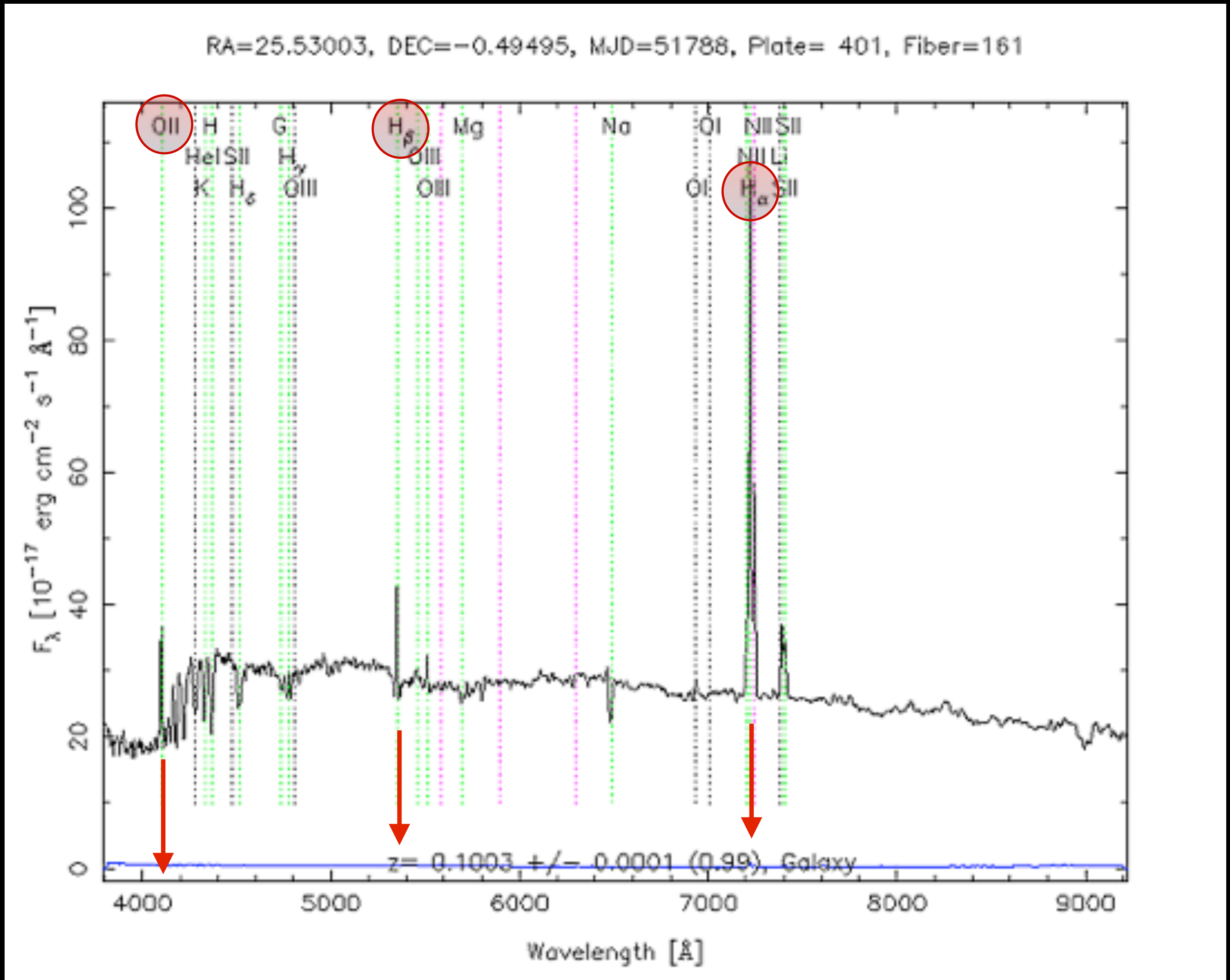
Como, por convenção, o fator de escala hoje é $a_0 = a(t_0) = 1$, temos que o **redshift** dessas galáxias distantes é:

$$z = \frac{\lambda_{\rm obs} - \lambda}{\lambda} = \frac{a_0}{a(t)} - 1 = \frac{1}{a(t)} - 1$$

Exemplo: galáxia em z=0.1003

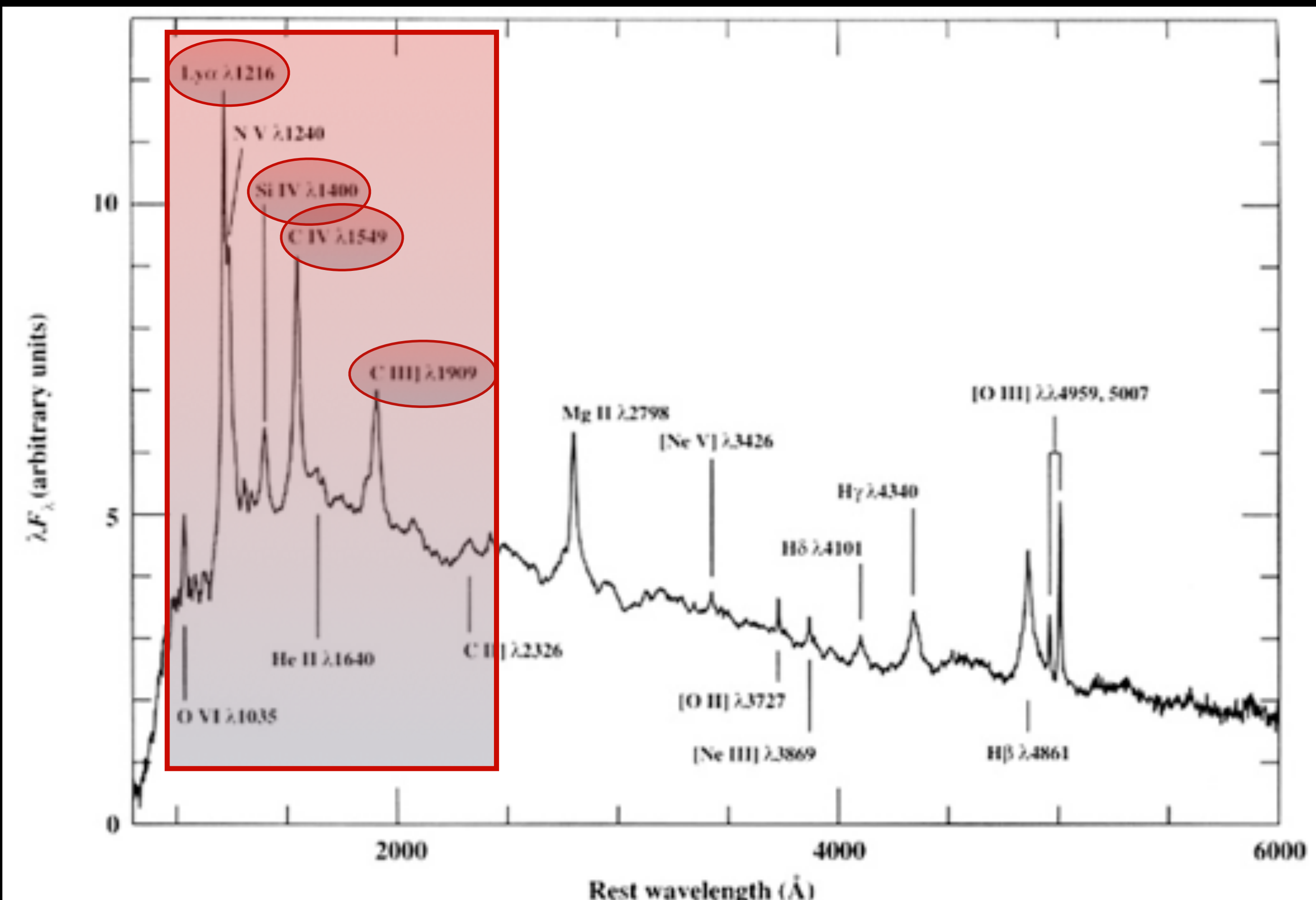
Em repouso, essas linhas são:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_\alpha &: 6563\,\mathring{A} \\ \mathrm{H}_\beta &: 4861\,\mathring{A} \\ \mathrm{OII} &: 3727\,\mathring{A} \end{aligned}$$

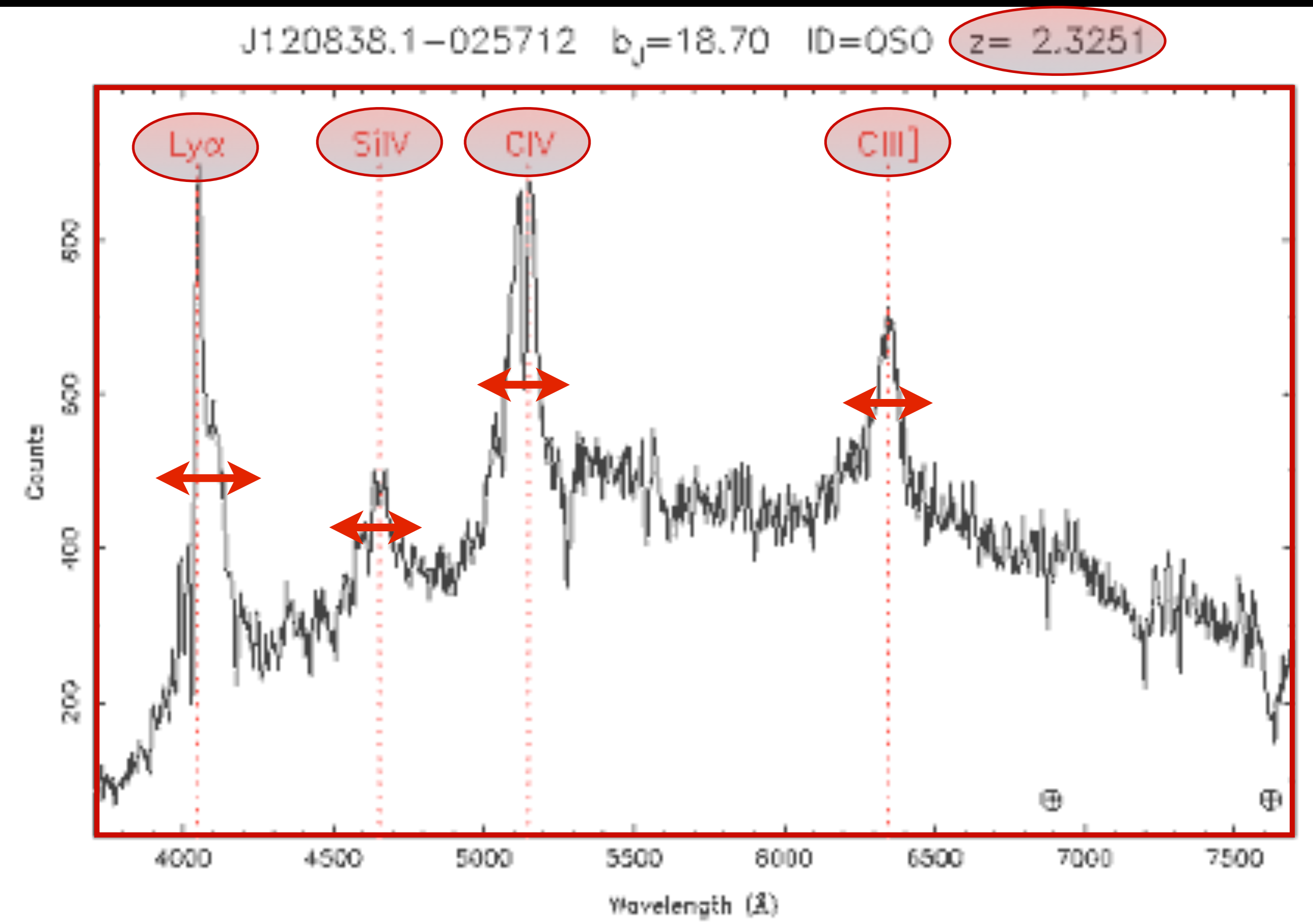


Outro exemplo: quasar ("quasi-stellar object")

Modelo (quasar típico, restframe)



Quasar verdadeiro (2dF survey)



O redshift cosmológico e o efeito Doppler se manifestam do mesmo modo!

Uma outra derivação do redshift

Como a luz é uma geodésica nula, temos: $l^\mu = (E = h\nu \, , \, \vec{p})$ $\qquad E = \dfrac{dT}{d\tau} \quad , \quad \vec{p} = \dfrac{d\vec{X}}{d\tau}$

com: $\quad l^\mu l_\mu = g_{\mu\nu} \, l^\mu \, l^\nu = 0 \qquad \Rightarrow \; E = \dfrac{a\, p}{1 + \frac{k}{4} X^2}$

Vamos usar as coordenadas conformes-Cartesianas, e assumir que a luz se propaga na direção radial X:

$$\frac{dl^0}{d\tau} + \Gamma^0_{ij} \, l^i l^j = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{dT} \, a \, \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \, \frac{d\tau}{dT} \, a \, \frac{1}{1 + \frac{k}{4} X^2} \, p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \, \frac{1}{E} \, \frac{1}{a} \, E^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{da} + \frac{E}{a} = 0 \qquad \Rightarrow \quad E \sim \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \nu \sim \frac{1}{a} \\ \lambda \sim a \end{gathered}}$$