Estática dos Fluidos

PME3222 - Mecânica dos Fluidos Para Eng. Civil

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

1° Semestre de 2019

Conteúdo da Aula

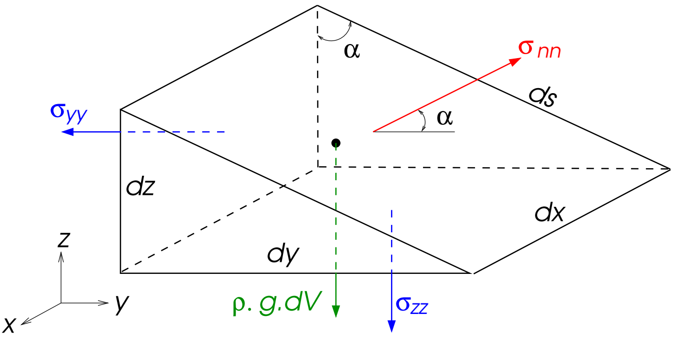
Introdução

Uma vez que um fluido é definido como sendo um meio material incapaz de resistir a qualquer valor de tensão de cisalhamento, segue-se que para um fluido em repouso (estático) somente tensões normais podem estar presentes.

A pressão que se encontra num fluido em repouso tem muitas aplicações práticas que vão desde cálculos de forças sobre objetos submersos, instrumentação para medição de pressão até dedução de propriedades associadas à atmosfera e aos oceanos. Os mesmos princípios poderão ser utilizados para determinar forças envolvidas em sistemas hidráulicos, como prensas, freios de automóveis, etc.

Conceito de Pressão

Parte-se de uma situação generalizada: um fluido perfeito (não estão presentes tensões de cisalhamento) escoando pode ser analisado por meio de um elemento de fluido de forma arbitrária, como ilustrado na figura abaixo.



Conceito de Pressão

Aplicando a 2^a Lei de Newton nas direções z e y:

Direção z:

$$dF_z = dF_{zz} + dF_n + dF_m = dm.a_z$$

onde dF_{zz} é devida à σ_{zz}; dF_n é devida a σ_{nn}; e dF_m é devida à massa (força peso).

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn}.ds.dx.\text{sen}\alpha - \rho.g.dV = \rho.dV.a_z$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\text{sen}\alpha = dy/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dy}{ds} - \rho \cdot g \cdot \frac{dx.dy.dz}{2} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_z$$

Dividindo por $dx.dy$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz} + \rho \cdot g \cdot \frac{dz}{2} + \rho \cdot \frac{dz}{2} \cdot a_z = \sigma_{zz} + \rho \cdot \frac{dz}{2} \cdot (g + a_z)$$

como dz é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz}$$

Conceito de Pressão

Direção y:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn}.ds.dx.\cos\alpha = \rho.dV.a_y$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\cos\alpha = dz/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dz}{ds} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_y$$

Dividindo por $dx.dz$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy} + \rho \cdot \frac{dy}{2} \cdot a_y$$

como dy é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}$$

Analogamente, para a direção x, a mesma conclusão seria obtida: $\sigma_{nn} = \sigma_{xx}$.

Conceito de Pressão

Assim, para o escoamento de fluido perfeito (invíscido), a tensão normal em um ponto é a mesma em todas as direções. Ela é, portanto, uma grandeza escalar.

A tensão normal em um escoamento de fluido perfeito é igual à *pressão termodinâmica* com sinal contrário: $\sigma_{nn} = -p$

Para a situação do fluido em repouso, $a_z = a_y = 0$ e os resultados obtidos continuam válidos: $\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{nn} = -p$.

Há dois modos de interpretar a propriedade pressão: (1) escala microscópica onde cada molécula é considerada individualmente; ou (2) escala macroscópica onde é o conjunto de moléculas que determina o comportamento médio do meio contínuo.

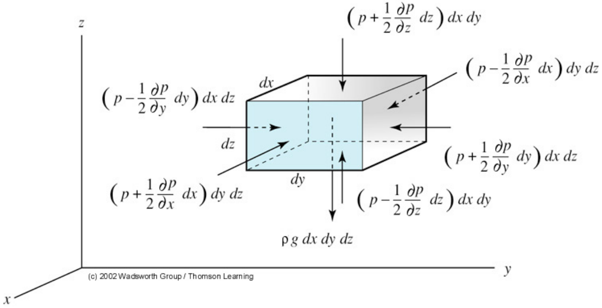
Conceito de Pressão

Do ponto de vista microscópico, o fluido é composto por um grande número de moléculas movendo-se de forma randômica e, frequentemente, colidindo-se umas contra as outras e contra as paredes do reservatório que as contém. Durante estas colisões há mudança de velocidade das partículas e, consequentemente, mudança de quantidade de movimento. Assim, a pressão num fluido (segundo este ponto de vista) é uma medida a quantidade de movimento linear médio do moléculas no fluido.

Do ponto de vista macroscópico a pressão de fluido é uma variável (propriedade) de estado, como a temperatura e a massa específica, e a mudança da propriedade pressão durante um processo é governada pelas leis da termodinâmica.

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

Considere o elemento de fluido em repouso mostrado na figura abaixo.



Para este elemento, a força de campo (peso, associada ao campo gravitacional) é dada por:

$$d\vec{F}_c = \vec{g}.dm = \vec{g}.\rho.dV = \vec{g}.\rho.dx.dy.dz$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força de superfície resultante (devida à pressão atuante nas faces do elemento) pode ser escrita por:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_s \;=\; & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)\cdot dy\cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)\cdot dy\cdot dz\right]\cdot\vec{i} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)\cdot dx\cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)\cdot dx\cdot dz\right]\cdot\vec{j} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{2}\right)\cdot dx\cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{2}\right)\cdot dx\cdot dy\right]\cdot\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
d\vec{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dz
$$

$$
\therefore d\vec{F}_s = -\vec{\nabla}p.dx.dy.dz
$$

A Equação Básica de Estática dos Fluidos

A força resultante sobre o elemento será a soma da força de campo e de superfície:

$$d\vec{F}_R = d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dx.dy.dz = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dV$$

$$\frac{d\vec{F}_R}{dV} = -\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}$$

Para o fluido em repouso esta força resultante deve ser nula. Conclui-se, portanto, que:

$$-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g} = 0$$

Como a aceleração da gravidade só atua em uma direção, no caso do elemento ilustrado na direção do eixo Oz ($g_z = -g$), segue-se que a equação vetorial acima acima, decomposta, resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0\ ;\ \text{e}\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g = -\gamma$$

Medição da Pressão

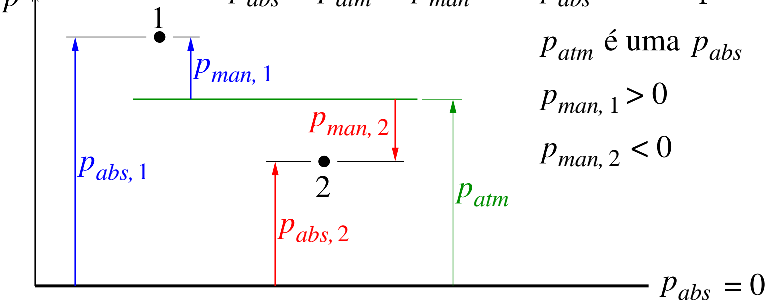
$$p_{abs} = p_{atm} + p_{man}$$

$p_{abs} > 0$ sempre

p_{atm} é uma p_{abs}

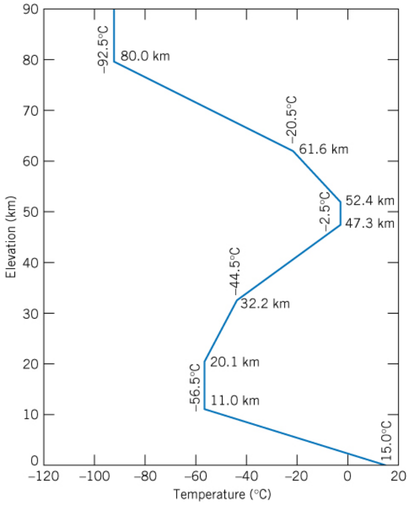
$p_{man,\,1} > 0$

$p_{man,\,2} < 0$



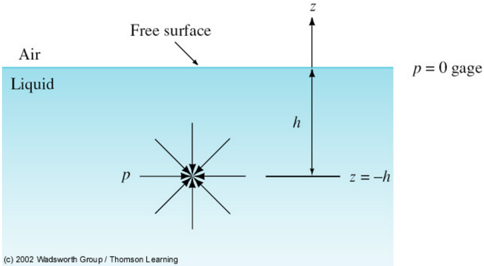
Subscritos: *abs* $\equiv$ absoluta; *man* $\equiv$ manométrica; *atm* $\equiv$ atmosférica.

Atmosfera Padrão



Em aviação o estabelecimento de uma atmosfera (fictícia) padrão é importante para que se tenha um padrão de comparação e de referência. Um dos padrões utilizados é a atmosfera padrão americana, ilustrada na figura ao lado. É importante salientar que esta atmosfera não é real, mas é uma tentativa de reprodução da atmosfera real dentro de certos limites observáveis de correlação com esta. Na atmosfera padrão americana, ao nível do mar, tem-se: 15 °C; 101,3 kPa; 1,225 kg/m^3; e $1,789 \times 10^{-5}$ Pa.s.

Variação da Pressão em Um Fluido Estático



Tomando a equação deduzida anteriormente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho . g = -\gamma$$

e integrando-a dentro dos limites (ver figura ao lado) estabelecidos, para um fluido incompressível, resulta:

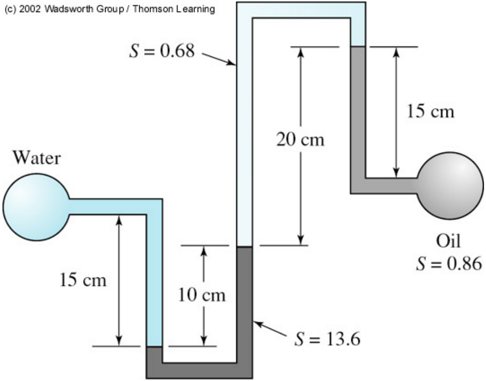
$$\int_{p(z)}^{p_0} dp = -\gamma \cdot \int_{z=-h}^{0} dz$$

$$p_0 - p(z) = -\gamma.[0 - (-h)]$$

$$p(z) = p_0 + \gamma.h = p_0 + \rho.g.h$$

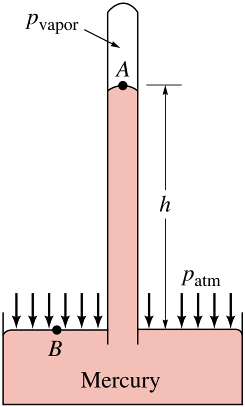
Lei de Stevin

Variação da Pressão em Um Fluido Estático



Princípio dos vasos comunicantes: A pressão é igual num mesmo fluido compressível em repouso, na mesma cota, sem solução de continuidade.

Medição da Pressão Atmosférica



Inicialmente em vácuo ($p_{abs} \approx 0$) o tubo é mergulhado num recipiente com mercúrio. A pressão atmosférica atuante na superfície do recipinete empurra a coluna de mercúrio para cima. No equilíbrio a pressão atmosférica suporta a coluna de mercúrio. A altura da coluna é uma indicação da pressão atmosférica local. O mercúrio é muito utilizado em barômetros, uma vez que a sua pressão de vapor é baixíssima. Assim, independente da temperatura ambiente, a contra-pressão que o vapor de mércurio faz no sentido de empurrar a coluna de mercúrio para baixo é insignificante e pode ser desprezada: $p_{atm} = p_{vapor} + \gamma.h = \gamma.h$

Variação da Pressão na Atmosfera Padrão Americana

Gases, por serem compressíveis, apresentarão variação da sua massa específica com a variação da pressão. Como a pressão num meio fluido estático varia com a altura, segue-se que para gases haverá variação da sua massa específica com a altura. Considerando ar atmosférico como gás ideal:

$$dp = -\rho.g.dz = -\frac{p.g}{R.T} \cdot dz = -\frac{p.g}{R.(T_0 - m.z)} \cdot dz$$

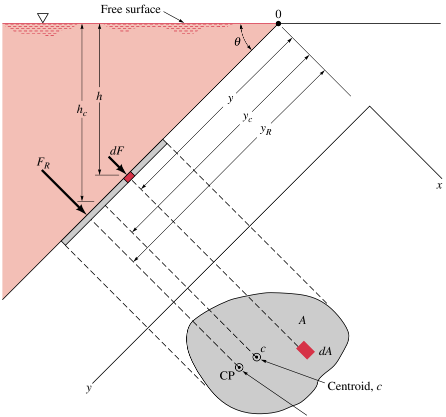
onde $T = T_0 - m.z$ é um modelo de variação de T com a altura z nos primeiros 11 km da atmosfera padrão americana. O símbolo m é a razão de decremento de $T(z)$ [coeficiente angular da reta $T = f(z)$]. Procedendo à integração desde $p = p_0$ em $z = 0$ até uma pressão p e altura z genéricos, obtém-se:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{0}^{z} \frac{g}{R.(T_0 - m.z)} \cdot dz$$

O resultado é:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{m.z}{T_0}\right)^{g/m.R} = p_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/m.R}$$

Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana



Relação entre coordendas:

$$h = y.\text{sen}\theta$$

Força resultante da distribuição de pressão:

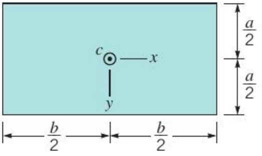
$$\begin{aligned} F_R &= \gamma.A.y_c.\text{sen}\theta \\ &= \gamma.A.h_c \end{aligned}$$

Posição no eixo y do centro de pressão, y_R:

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c.A}$$

Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana

Momentos de inércia de duas áreas planas comuns: retângulo e círculo.

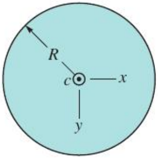


$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$



$$A = \pi R^2$$

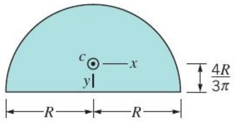
$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$

I_{xc} significa momento de inércia em torno do eixo paralelo ao eixo x que passa pelo centróide c da figura; I_{yc} significa momento de inércia em torno do eixo paralelo ao eixo y que passa pelo centróide c da figura; e I_{xyc} é o produto de inércia em relação ao sistema de coordenadas ortogonal que passa através do centróide da área e é criado por uma translação do sistema de coordendas xy.

Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana

Momentos de inércia de duas áreas planas comuns: semi-círculo e triângulo.

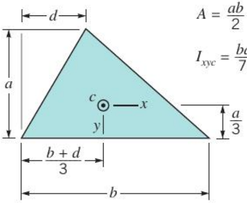


$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

$$I_{xyc} = 0$$

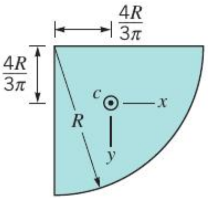


$$A = \frac{ab}{2} \qquad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$

Força Hidrostática sobre uma Superfície Plana

Momentos de inércia de um quarto de círculo.



$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

Coordenada x_R de aplicação de F_R:

$$F_R.x_R = \int_A y.\text{sen}\theta.x.y.dA$$

com

$$x_R = \frac{I_{xy}}{y_c.A}$$

Teorema dos eixos paralelos:

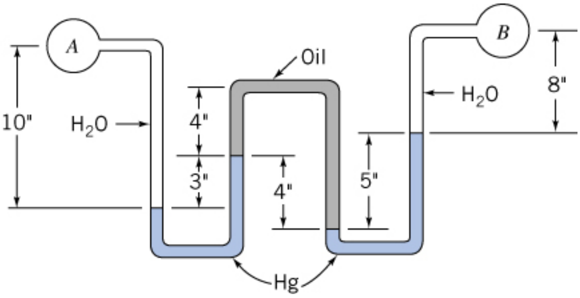
$$I_{xy} = I_{xyc} + A.x_c.y_c$$

Segue-se que

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c.A} + x_c$$

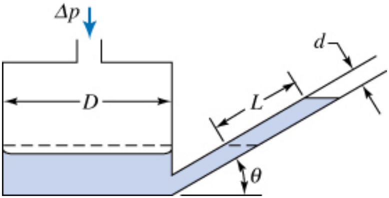
Exercício de Aula 1

Enunciado: Água escoa no interior dos tubos A e B. Óleo lubrificante ($SG = 0,88$) está na parte superior do tubo em **U** invertido. Mercúrio ($SG = 13,6$) está na parte inferior dos dois tubos em **U**. Determine a diferença de pressão, $p_A - p_B$, em kPa. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.3, 6a Edição]



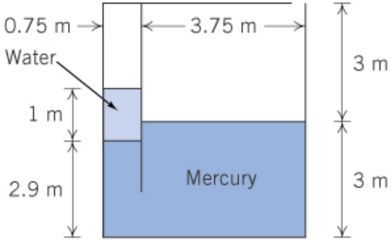
Exercício de Aula 2

Enunciado: Um manômetro de reservatório com tubo inclinado é construído como mostrado na figura abaixo. Analise o manômetro para obter uma expressão geral para a deflexão do líquido, L, no tubo inclinado, em termos da diferença de pressão aplicada, Δp. Obtenha, também, uma expressão geral para a sensibilidade do manômetro. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.2, 6a Edição]



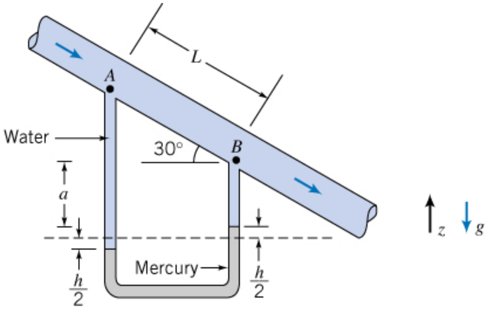
Exercício de Aula 3

Enunciado: Um tanque repartido contém água e mercúrio ($SG = 13,6$) conforme mostrado na figura. Qual é a pressão manométrica do ar preso na câmara esquerda? A que pressão deveria o ar da câmara esquerda ser comprimido de modo a levar a superfície da água para o mesmo nível da superfície livre na câmara direita? [Fox, McDonald e Pritchard, 3.15, 6a Edição]



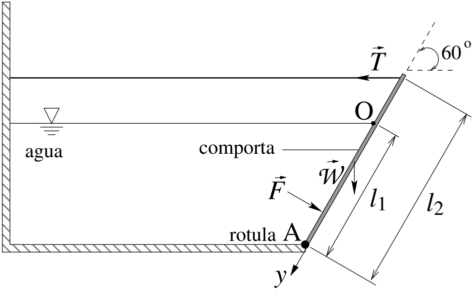
Exercício de Aula 4

Enunciado: Água flui para baixo ao longo de um tubo inclinado de 30° em relação à horizontal conforme mostrado na figura. A diferença de pressão $p_A - p_B$ é causada parcialmente pela gravidade e parcialmente pelo atrito. Obtenha uma expressão algébrica para a diferença de pressão citada. Calcule esta diferença se $L = 5$ pés e $h = 6''$. [Fox, McDonald e Pritchard, 3.24, 6a Edição]



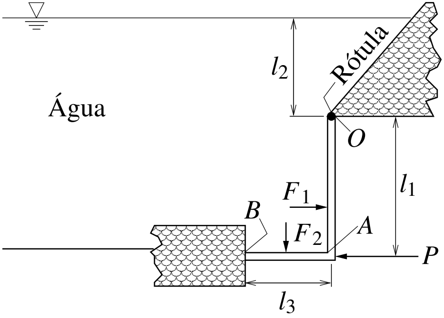
Exercício de Aula 5

Uma comporta homogênea retangular, com 4 ft (= 1,2192 m) de largura, 8 ft (= 2,4384 m) de comprimento (l_2) e pesando 800 lbf (= 3558,5773 N) é mantida no local por um cabo flexível horizontal, conforme mostrado na figura abaixo. A água atua contra a comporta, que é articulada no ponto A. O atrito na rótula pode ser desprezado. A distância da rótula ao nível de água, l_1, vale 6 ft (= 1,8288 m), medida ao longo da superfície da comporta. Determine a tensão no cabo. [Munson, 2.52 , 4a Edição]



Exercício de Aula 6

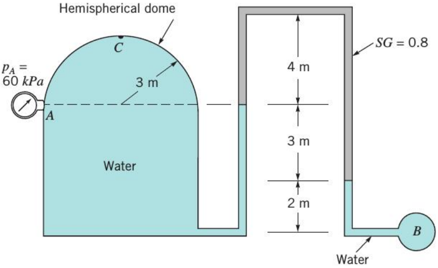
A comporta rígida, *OAB*, da figura abaixo é articulada em *O* e repousa contra um suporte rígido em *B*. Que força horizontal mínima, *P*, é necessária para manter a comporta fechada se sua largura é 3 m? Despreze o peso da comporta e o atrito na rótula. A parte posterior da comporta está exposta à atmosfera. Na figura, $l_1 = 4$ m; $l_2 = 3$ m; e $l_3 = 2$ m. [Munson, 2.58 , 4a Edição]



Exercício Proposto 1

Enunciado: Um tanque cilíndrico fechado preenchido com água tem um domo hemisférico e está conectado a uma tubulação invertida conforme mostra a figura abaixo. O líquido na parte superior da tubulação tem densidade relativa de 0,8. As demais partes do sistema estão preenchidas com água. Se a leitura do manômetro é de 60 kPa, determine: (a) a pressão no tubo B; and (b) a pressão no ponto C em mmHg. [Munson, 2.29 , 6a Edição]

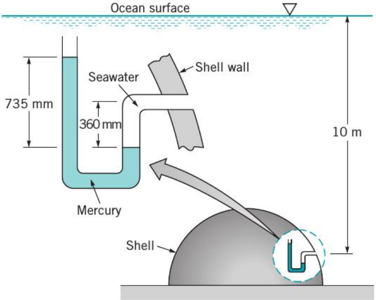
Resp.: (a) 103 kPa; (b) 230 mmHg.



Exercício Proposto 2

Enunciado: A figura abaixo mostra uma casca hemisférica cheia de ar que está presa no fundo do oceano (profundidade igual a 10 m). Um barômetro localizado dentro da casca hemisférica apresenta uma coluna de mercúrio com altura de 765 mm e o manômetro em U mostrado na figura indica uma leitura diferencial de 735 mm de mercúrio. Utilizando estes dados, determine qual o valor da pressão atmosférica na superfície livre do oceano. [Munson, 2.38 , 4a Edição]

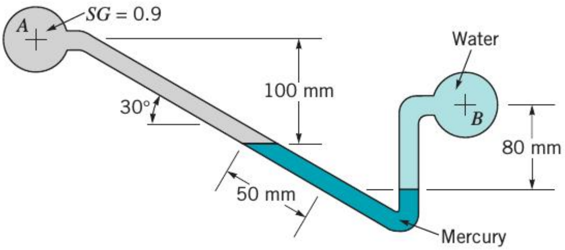
Resp.: 94,9 kPa.



Exercício Proposto 3

Enunciado: Determine a nova leirura de pressão diferencial no mercúrio ao longo do tubo inclinado mostrado na figura abaixo se a pressão em A for diminuída de 10 kPa e a pressão em B permanecer inalterada. O fluido em A tem densidade relativa de 0.9 e o fluido em B é água. [Munson, 2.45 , 6a Edição]

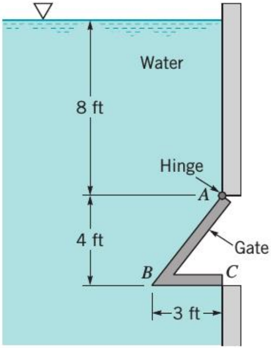
Resp.: 0,212 m.



Exercício Proposto 4

Enunciado: Uma comporta com seção transversal mostrada na figura ao lado tem 5 pés de largura e 4 pés de altura. A comporta pesa 500 lb e seu centro de gravidade está a 1 pé à esquerda de AC e 2 pés acima de BC. Determine a reação na comporta em C. OBS: 1 pé = 0,3048 m; 1 lbf = 4,4482216 N. [Munson, 2.67, 6a Edição]

Resp.: 28.1 kN.



Exercício Proposto 5

Enunciado: A figura mostra o esboço de uma comporta homogênea (10 pés de largura) que pesa 200 lbf e está articulada em A. Note que a comporta é mantida na posição mostrada na figura através de uma barra que apresenta comprimento de 12 pés. Quando o ponto inferior da barra é movimentado para a direita, o nível de água permanece no topo da comporta. A linha de ação da força que a barra exerce sobre a comporta coincide com o eixo da barra. (a) Faça um gráfico do módulo da força exercida pela pela barra em função do ângulo da comporta para *theta* entre 0 e 90°; (b) Repita seus cálculos admitindo que o peso da comporta é desprezível. Analise seus resultados para $\theta \to 0$. OBS: 1 pé = 0,3048 m; 1 lbf = 4,4482216 N. [Munson, 2.60 , 4a Edição]