Análise Dimensional e Semelhança

PME3222 - Mecânica dos Fluidos Para Eng. Civil

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

1° Semestre de 2019

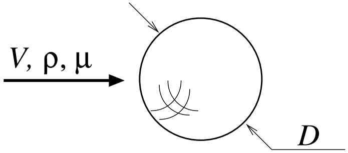
Conteúdo da Aula

Introdução

A Mecânica dos Fluidos é uma ciência extremamente dependente da investigação experimental. As teorias de semelhança, análise dimensional e modelagem permitem que ensaios em modelos (realizados em laboratório) possam ser aplicados em escalas reais.

A amplificação dos resultados com modelos possuem limitações, mas trazem sempre resultados que auxiliam na análise de problemas complexos.

Exemplo Introdutório



Considere o escoamento ao redor de uma esfera. Deseja-se saber como a força de arrasto aerodinâmico é influenciada pelas variáveis: velocidade, V, massa específica, ρ, e viscosidade, μ, do fluido e pelo diâmetro, D, da esfera.

Quantos experimentos serão necessários?

Quanto tempo para realizá-los?

Quais serão as principais dificuldades para sua realização?

E se V, ρ, μ **e** D **pudessem ser *agloremados* num único parâmetro**?

Dimensões

	FLt System	MLt System
Acceleration	Lt^{-2}	Lt^{-2}
Angle	$F^0L^0t^0$	$M^0L^0t^0$
Angular velocity	t^{-1}	t^{-1}
Area	L^2	L^2
Density	$FL^{-4}t^2$	ML^{-3}
Energy	FL	ML^2t^{-2}
Force	F	MLt^{-2}
Frequency	t^{-1}	t^{-1}
Length	L	L
Mass	$FL^{-1}t^2$	M
Moment of a force	FL	ML^2t^{-2}
Moment of inertia (area)	L^4	L^4
Momentum	Ft	MLt^{-1}
Power	FLt^{-1}	ML^2t^{-3}
Pressure	FL^{-2}	$ML^{-1}t^{-2}$
Specific weight	FL^{-3}	$ML^{-2}t^{-2}$
Stress	FL^{-2}	$ML^{-1}t^{-2}$
Time	t	t
Torque	FL	ML^2t^{-2}
Velocity	Lt^{-1}	Lt^{-1}
Viscosity (dynamic)	$FL^{-2}t$	$ML^{-1}t^{-1}$
Viscosity (kinematic)	L^2t^{-1}	L^2t^{-1}
Volume	L^3	L^3
Work	FL	ML^2t^{-2}

Toda grandeza física possui uma informação qualitativa (unidade de medida) e uma quantitativa (valor numérico). Ex: 75 m/s $\rightarrow$ 75 é a informação quantitativa e m/s é a informação qualitativa. A informação qualitativa possui grandeza primária quando é expressa em unidades de medidas fundamentais: m, kg, s, K, ... no SI; ou secundária quando é expressa em unidades de medidas derivadas (combinadas) das fundamentais: m/s, kg/m^3, N, J, Pa, ... no SI.

Premissas para Aplicação da Análise Dimensional

Homogeneidade Dimensional: Toda equação que envolve variáveis físicas deve ter a mesma unidade de medida em ambos os lados do sinal de igualdade. Ex: $W = p\Delta V \therefore$ N.m = (N/m^2) . m^3 $\Rightarrow$ N.m = N.m. Ou, simbolicamente, F.L = (F.L^{-2}).L^3 $\Rightarrow$ F.L = F.L

A **análise dimensional** só tem sentido quando o número de variáveis adimensionais necessárias para descrever o fenômeno físico for menor que o número de variáveis físicas dimensionais envolvidas no fenômeno.

Teorema de Buckingham para Termos Π

Se uma equação envolvendo k *variáveis for dimensionalmente homogênea, ela pode ser reduzida a uma relação entre* $k - r$ *produtos dimensionais independentes, onde* r *é o número mínimo de dimensões básicas necessárias para descrever as variáveis* (Munson).

É comum em análise dimensional usar o símbolo Π (pi grego maiúsculo) para representar um produto de variáveis dimensionais cujo resultado seja adimensional.

Método da Repetição de Variáveis

1. Liste todas as variáveis que estão envolvidas no problema (determinação de k);
2. Represente cada uma das variáveis em termos das dimensões básicas (determinação de r);
3. Determine o número necessário de termos Π ($k - r$);
4. Escolha as variáveis de repetição, onde o número necessário é igual ao número de dimensões básicas;
5. Forme um termo Π multiplicando uma das variáveis não repetidas pelo produto das variáveis de repetição, cada uma delas elevada a um expoente que torne a combinação adimensional;
6. Repita o passo 5 para cada uma das variáveis não repetidas remanescentes;
7. Verifique todos os termos Π resultantes cuidadosamente para ter certeza de que eles sejam adimensionais;
8. Represente a forma final como uma relação entre os termos Π e pense sobre o que isso significa. Geralmente:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_{k-r})$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

São dados: $F_D = f(\rho, V, D, \mu)$

Passo 1: $F_D, \rho, V, D, \mu \Rightarrow k = 5$ parâmetros (variáveis) dimensionais.

Passo 2: Usando o sistema MLt: $F_D \rightarrow$ M.L.t^{-2}; $\rho \rightarrow$ M.L^{-3}; $V \rightarrow$ M.t^{-1}; $D \rightarrow$ L; e $\mu \rightarrow$ M.L^{-1}.t^{-1}. Portanto bastam 3 dimensões básicas para montar as dimensões de todas as variáveis: $r = 3$.

Passo 3: $k - r = 5 - 3 = 2$ grupos Π.

Passo 4: $r = 3 \Rightarrow 3$ variáveis de repetição devem ser escolhidas. Escolhe-se, por exemplo, ρ, V, D. Sempre que possível escolhas aquelas cujas dimensões envolvidas sejam as mais simples em termos de combinação de unidades básicas.

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 5: Determinação de Π_1.

$$\Pi_1 = \rho^a.V^b.D^c.F_D \therefore \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\right)^a \cdot \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}}\right)^b \cdot (\mathrm{L})^c \cdot \frac{\mathrm{M.L}}{\mathrm{t}^2} = \mathrm{M}^0.\mathrm{L}^0.\mathrm{t}^0$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho.V^2.D^2} : \begin{cases} \mathrm{M}:\ a+1=0 \rightarrow a=-1 \\ \mathrm{L}:\ -3.a+b+c+1=0 \rightarrow c=-2 \\ \mathrm{t}:\ -b-2=0 \rightarrow b=-2 \end{cases}$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 6: Determinação de Π_2.

$$\Pi_2 = \rho^d.V^e.D^f.\mu \therefore \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\right)^d \cdot \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{t}}\right)^e \cdot (\mathrm{L})^f \cdot \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L.t}} = \mathrm{M}^0.\mathrm{L}^0.\mathrm{t}^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho.V.D} : \begin{cases} \text{M: } d+1=0 \rightarrow d=-1 \\ \text{L: } -3.d+e+f-1=0 \rightarrow f=-1 \\ \text{t: } -e-1=0 \rightarrow e=-1 \end{cases}$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 7: Verificação da adimensionalidade.

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho.V^2.D^2} \equiv \frac{\mathrm{M.L}}{\mathrm{t}^2}.\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M}}.\frac{\mathrm{t}^2}{\mathrm{L}^2}.\frac{1}{\mathrm{L}^2} \equiv 1 \text{ OK!}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho.V.D} \equiv \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L.t}}.\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M}}.\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{L}}.\frac{1}{\mathrm{L}} \equiv 1 \text{ OK!}$$

Passo 8: Conclusão.

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2) \therefore \frac{F_D}{\rho.V^2.D^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho.V.D}\right)$$

Principais Grupos Adimensionais em Mecânica dos Fluidos

Número de Reynolds, Re: Importante na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos. É uma medida da razão entre as forças de inércia de um elemento fluido e os efeitos viscosos no elemento. Em homenagem a Osborne Reynolds (1842 a 1912).

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho.V.L}{\mu}$$

Número de Froude, Fr: Utilizado em escoamento com superfície livre (rios, oceanos, canais abertos...). Indica a razão entre forças de inércia e o peso do elemento fluido. Em homenagem a William Froude (1810 a 1879).

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g.L}}$$

Principais Grupos Adimensionais em Mecânica dos Fluidos

Número de Euler, Eu: Utilizado em problemas onde a pressão, ou diferençã de pressão, são importantes. É uma medida da razão entre as forças de pressão e forças de inércia um elemento fluido. Em homenagem a Leonhard Euler (1707 a 1783).

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho . V^2}$$

Números de Cauchy, Ca, e de Mach, Ma: Utilizados em situações onde a compressibilidade do fluido é importantes. É uma medida da razão entre as forças de inércia e as de compressibilidade. Em homenagem a Augustin Louis de Cauchy (1789 a 1857) e Ernst Mach (1838 a 1916).

$$\mathrm{Ca} = \frac{\rho . V^2}{E_v} \; ; \mathrm{Ma} = \frac{V}{c} \; ; \mathrm{Ma}^2 = \mathrm{Ca}$$

Principais Grupos Adimensionais em Mecânica dos Fluidos

Número de Strouhal, St: Utilizado em escoamentos transitórios ou com frequência de oscilação característica. É uma medida da relação entre as forças de inércia devidas a transitoriedade do escoamento (aceleração local) e as forças de inércia devidas a variação da velocidade de ponto a ponto do campo de escoamento (aceleração convectiva). Em homenagem a Vicenz Strouhal (1850 a 1922).

$$\mathrm{St} = \frac{f.L}{V}$$

Número de Weber, We: Utilizado em problemas onde os efeitos da tensão superficial são importantes. Indica a razão entre forças de inércia e força devida à tensão superficial que atuam num num elemento fluido. Em homenagem a Moritz Weber (1871 a 1951).

$$\mathrm{We} = \frac{\rho.V^2.L}{\sigma}$$

Modelagem e Semelhança

Modelo é uma representação de um sistema físico que pode ser utilizada para predizer o comportamento de um sistema com relação a algum aspecto desejado. O sistema físico para o qual as estimativas são feitas é denominado protótipo.

Se $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_n)$ para um protótipo, então $\Pi_{1m} = \phi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, ..., \Pi_{nm})$ para o modelo: a função ϕ é a mesma. Assim diz-se que $\Pi_1 = \Pi_{1m}$ é a equação de predição, enquanto $\Pi_2 = \Pi_{2m}$, $\Pi_3 = \Pi_{3m}$, ..., $\Pi_n = \Pi_{nm}$ são as leis de modelagem (ou condições de similaridade).

As condições de escoamento para o teste de um modelo são completamente semelhantes se todos os parâmetros adimensionais relevantes tiverem os mesmos valores correspondentes para o modelo e para o protótipo. (White, 2018)

Modelagem e Semelhança (White, 2018)

Semelhança geométrica: *Um modelo e um protótipo são geometricamente semelhantes se e somente se todas as dimensões do corpo nas três coordenadas tiverem a mesma razão de escala linear*.

Semelhança cinemática: *Os movimentos de dois sistemas são cinematicamente semelhantes se partículas homólogas estiverem em pontos homólogos em instantes homólogos*. Aqui acrescenta-se, além da mesma razão para escala de comprimento, também a mesma razão para a escala de tempo, o que equivale, portanto, à mesma razão de escala de velocidade.

Semelhança dinâmica: *Existe a semelhança dinâmica quando o modelo e o protótipo têm as mesmas razões de escala de comprimento, escala de tempo e escala de força (ou escala de massa)*.

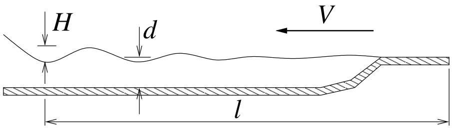
COMENTÁRIOS SOBRE DISCREPÂNCIAS EM SALA DE AULA!

Exercício de Aula 1

Enunciado: A elevação de pressão, Δp, por meio de uma bomba pode ser representada como $\Delta p = f\left(D,\ \rho,\ \omega,\ \dot{V}\right)$ onde D é o diâmetro do impelidor, ρ é a massa específica do fluido, ω é a velocidade de roação e $\dot{V}$ é a vazão volumétrica. Determine um conjunto de parâmetros adimensionais apropriados.

Exercício de Aula 2

Enunciado: Deseja-se determinar a altura de uma onda quando o vento sopra a superfície de um lago. Admite-se que a altura, H, da onda seja uma função da velocidade do vento, V, da massa específica da água, ρ, da massa específica do ar, ρ_a, da profundidade da água, d, da distância da margem, l, e da aceleração da gravidade, g, conforme mostrado na Figura a seguir. Utilize d, V e ρ como variáveis de repetição para determinar um conjunto apropriado de termos pi, que possa ser utilizado para descrever este problema.



Exercício de Aula 3

Enunciado: A queda de pressão por unidade de comprimento, $\Delta p_l = \Delta p/l$, (N/m^2)/m, para o escoamento do sangue através de um tubo horizontal de pequeno diâmetro é uma função da vazão volumétrica, $\dot{V}$, do diâmetro, D, e da viscosidade do sangue, μ. Para uma série de testes no qual $D = 2$ mm e $\mu = 0,004$ N.s/m^2, foram obtidos os seguintes dados, onde os valores listados de Δp foram medidos ao longo do comprimento, $l = 300$ mm:

$\dot{V}$	Δp
[m^3/s]	[N/m^2]
$3,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{4}$
$4,9 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{4}$
$6,3 \times 10^{-6}$	$1,9 \times 10^{4}$
$7,9 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^{4}$
$9,8 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^{4}$

Desenvolva uma análise dimensional para este problema e utilize os dados fornecidos na Tabela acima para determinar uma relação geral entre Δp_l e $\dot{V}$ que seja válida para ouros valores de D, l e μ.

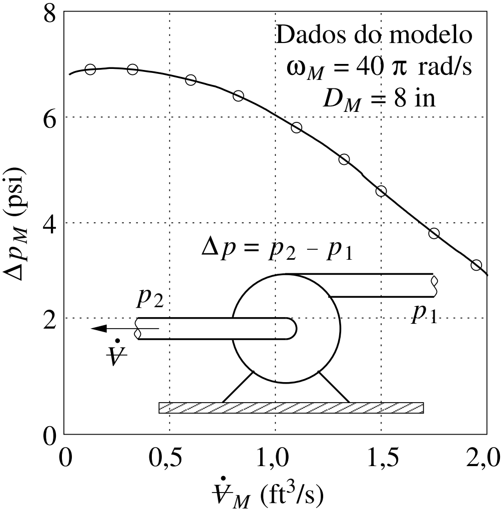
Exercício de Aula 4

Enunciado: O projeto de um modelo de um rio é baseado na similaridade do número de Froude, onde o número de Froude, $\mathrm{Fr} = V/(g.y)^{1/2}$, é uma função da velocidade, V, da água, da profundidade, y, da água e da aceleração da gravidade, g. Se a profundidade do rio for de 3 m e a profundidade do modelo for de 100 mm, que velocidade do protótipo corresponde à velocidade de 2 m/s do modelo?

Exercício de Aula 5

Enunciado: A elevação de pressão, Δp, por meio de uma bomba centrífuga de uma dada forma (veja Figura a seguir) pode ser expressa por $\Delta p = f\left(D,\ \omega,\ \rho,\ \dot{V}\right)$ onde D é o diâmetro do impelidor, ω é a velocidade angular do impelidor, ρ é a massa específica do fluido e $\dot{V}$ é a vazão volumétrica através da bomba. Um modelo de bomba com um diâmetro de 8 in (= 0,2032 m) é testado em laboratório, utilizando água. Quando operando a uma velocidade angular de 40π rad/s, a elevação da pressão no modelo em função de $\dot{V}$ é mostrada na Figura a seguir. Utilize essa curva para estimar o aumento de pressão por meio de uma bomba geometricamente semelhante (protótipo) para uma vazão no protótipo de 6 ft^3/s (= 0,17 m^3/s). O protótipo tem um diâmetro de 12 in (= 0,3048 m) e opera a uma velocidade angular de 60π rad/s. O fluido do protótipo também é água.

Continuação do Exercício de Aula 5



Exercício Proposto 1

Enunciado: A velocidade, V, de uma partícula esférica caindo lentamente em um líquido muito viscoso pode ser expressa por $V = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$ onde d é o diâmetro da partícula, μ é a viscosidade do líquido e γ e γ_s são os pesos específicos do líquido e da partícula, respectivamente. Desenvolva um conjunto de parâmetros adimensionais que possam ser utilizados neste problema.

Resposta: $\frac{V.\mu}{d^2.\gamma} = \phi\left(\frac{\gamma_s}{\gamma}\right)$

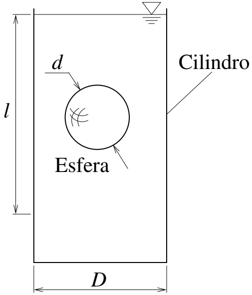
Exercício Proposto 2

Enunciado: A sustentação e o arraste de um hidrofólio devem ser determinados através de teste em túnel de vento utilizando ar padrão. Se houver necessidade de realizar testes correspondentes à escala plana, qual a velocidade necessária no túnel de vento correspondente à velocidade do hidrofólio na água do mar de 20 mph (= 8,94 m/s)? Admita a similaridade do número de Reynolds.

Resposta: $V_m \cong 111,6$ m/s.

Exercício Proposto 3

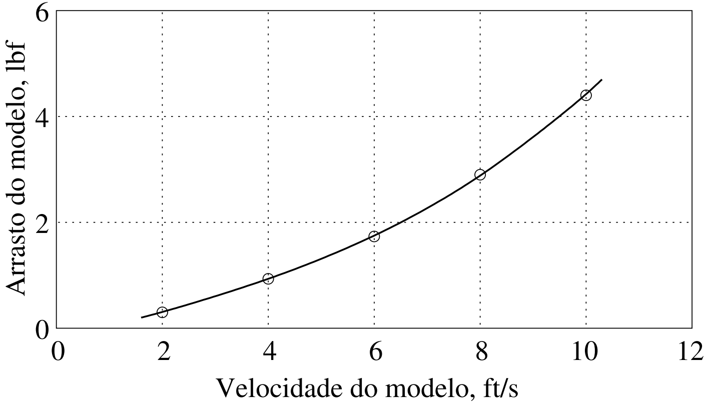
Enunciado: A viscosidade, μ, de um líquido pode ser medida através da determinação do tempo, t, tomado por uma esfera de diâmetro, d, para cair lentamente através de uma distância, l, em um cilindro vertical de diâmetro, D, contendo o líquido (Figura ao lado). Admita que $t = f\left(l,\ d,\ D,\ \mu,\ \Delta\gamma\right)$, onde $\Delta\gamma$ é a diferença entre os pesos específicos da esfera e do líquido. Utilize análise dimensional para mostrar como t é relacionado com μ e descreva como esse instrumento pode ser utilizado para medir viscosidade.



Exercício Proposto 4

Enunciado: O arraste sobre uma esfera em movimento no interior de um fluido é uma função do diâmetro, da velocidade da esfera, da viscosidade e da massa específica do fluido. Testes em laboratório com uma esfera de 4 in (= 0,1016 m) de diâmetro foram realizados em um túnel de água e alguns dados do modelo foram representados graficamente na Figura a seguir. Para esses testes a viscosidade da água foi de $2,3 \times 10^{-5}$ lbf.s/ft^2 (= $1,10124 \times 10^{-3}$ N.s/m^2) e a massa específica da água foi de 1,94 slug/ft^3 (= 999,876 kg/m^3). Estime o arraste em um balão de 8 ft (= 2,4384 m) de diâmetro movendo-se no ar com uma velocidade de 3 ft/s (= 0,9144 m/s). Admita o ar com uma viscosidade de $3,7 \times 10^{-7}$ lbf.s/ft^2 (= $1,7716 \times 10^{-5}$ N.s/m^2) e uma massa específica de $2,38 \times 10^{-3}$ slug/ft^3 (= 1,2267 kg/m^3). Admita semelhança do número de Reynolds.

Continuação do Exercício Proposto 4



Resposta: 1,22 N (o resultado deste exercício admite variações dentro de uma faixa de 10% em torno da resposta dada).