Processos Estocásticos: Introdução e Caracterização Temporal

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP

Abril 2019

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺
2. Variáveis Aleatórias (VA) ✓☺

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺
2. Variáveis Aleatórias (VA) ✓☺
3. Operações sobre uma VA - Esperança ✓☺

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺
2. Variáveis Aleatórias (VA) ✓☺
3. Operações sobre uma VA - Esperança ✓☺
4. Múltiplas VAs e operações sobre múltiplas VAs ✓☺

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺
2. Variáveis Aleatórias (VA) ✓☺
3. Operações sobre uma VA - Esperança ✓☺
4. Múltiplas VAs e operações sobre múltiplas VAs ✓☺
5. Operações sobre múltiplas VAs ✓☺

Curso de Processos Estocásticos

1. Revisão de Probabilidades ✓☺
2. Variáveis Aleatórias (VA) ✓☺
3. Operações sobre uma VA - Esperança ✓☺
4. Múltiplas VAs e operações sobre múltiplas VAs ✓☺
5. Operações sobre múltiplas VAs ✓☺
6. Processos Estocásticos - caracterização temporal

Objetivos da aula

- Apresentar e exemplificar o que é um processo estocástico;

Objetivos da aula

- Apresentar e exemplificar o que é um processo estocástico;
- Definir conceitos associados à representação temporal de um processo, como estacionariedade, ergodicidade e autocorrelação;

Objetivos da aula

- Apresentar e exemplificar o que é um processo estocástico;
- Definir conceitos associados à representação temporal de um processo, como estacionariedade, ergodicidade e autocorrelação;
- Exercitar os conhecimentos adquiridos por meio de exemplos e exercícios.

Principais Referências

- Peebles, P. Z. *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*, 4th edition, 2001. Cap. 5.
- Stark, H.; Woods, J. W. *Probability and Random Process with Applications to Signal Processing*, 3th edition, 2002. Cap. 7.

Aula de hoje

Aula de hoje

1. Conceito de Processo Estocástico
2. Estacionariedade
3. Caracterização Temporal para Processos
4. Ergodicidade
5. Conclusões e Próximas Aulas

Introdução: Processo Estocástico

- Ferramenta na modelagem de sinais e sistemas em inúmeras áreas da Engenharia e das Ciências em geral.

Introdução: Processo Estocástico

- Ferramenta na modelagem de sinais e sistemas em inúmeras áreas da Engenharia e das Ciências em geral.
- Vamos considerar um *espaço de probabilidades* $(S, \mathcal{F}, P)$, com
  - S - Espaço das amostras;
  - $\mathcal{F}$ - σ-álgebra dos eventos definidos em S;
  - P - função $S \to \mathbb{R}$ que obedece aos axiomas estudados.

Introdução: Processo Estocástico

- Ferramenta na modelagem de sinais e sistemas em inúmeras áreas da Engenharia e das Ciências em geral.
- Vamos considerar um *espaço de probabilidades* $(S, \mathcal{F}, P)$, com
  - S - Espaço das amostras;
  - $\mathcal{F}$ - σ-álgebra dos eventos definidos em S;
  - P - função $S \to \mathbb{R}$ que obedece aos axiomas estudados.
- Conceito parecido com o de VA:
  - VA associa a cada $s \in S$ um número $X(s)$;
  - Processo estocástico associa a cada $s \in S$ uma função $X(t,s)$.

Definição formal

Processo Estocástico

Seja $(S,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidades e um mapeamento X de S em um espaço de funções de uma variável t (tempo).

- O mapeamento X é chamado de *processo estocástico* ou *aleatório* se para cada t fixo o mapeamento é uma VA.

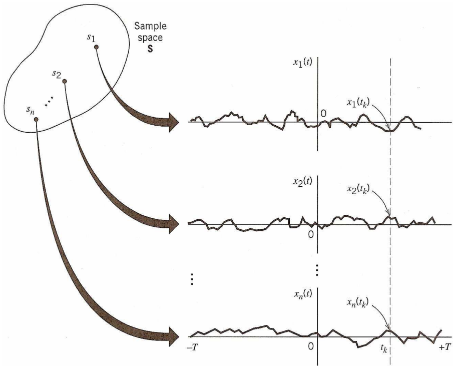
Definição formal

Processo Estocástico

Seja $(S,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidades e um mapeamento X de S em um espaço de funções de uma variável t (tempo).

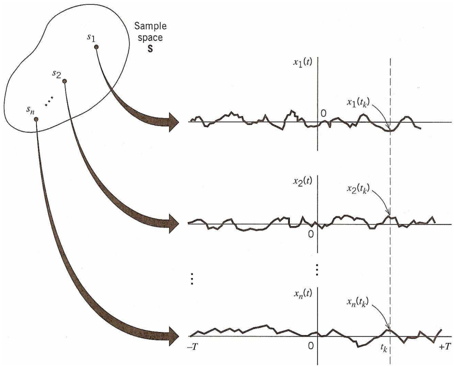
- O mapeamento X é chamado de *processo estocástico* ou *aleatório* se para cada t fixo o mapeamento é uma VA.
- Os elementos da imagem de X são chamados de *funções-amostra*.

Notação



$$\boxed{X(t,s)}$$

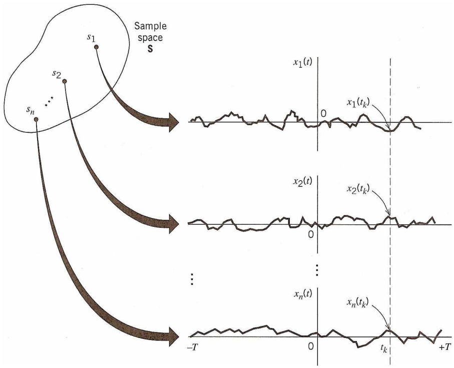
Notação



- Para s_j fixo, $X\left(t,s_j\right) \triangleq x_j(t)$ é uma função do tempo determinista.

$$\boxed{X(t,s)}$$

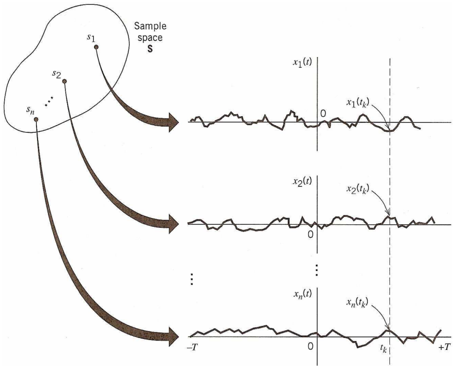
Notação



$\boxed{X(t,s)}$

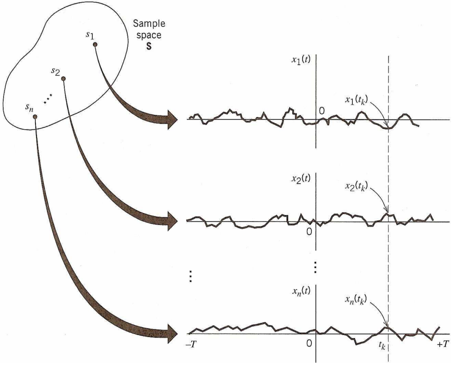
- Para s_j fixo, $X\left(t,s_j\right) \triangleq x_j(t)$ é uma função do tempo determinista.
- Para t_k fixo, $X\left(t_k,s\right) \triangleq X(t_k)$ é uma VA que assume valores $\{x_1\left(t_k\right),x_2\left(t_k\right),\ldots,x_n\left(t_k\right)\}$.

Notação



$$\boxed{X(t{,}s)}$$

- Para s_j fixo, $X\left(t{,}s_j\right) \triangleq x_j(t)$ é uma função do tempo determinista.
- Para t_k fixo, $X\left(t_k{,}s\right) \triangleq X(t_k)$ é uma VA que assume valores $\{x_1\left(t_k\right){,}x_2\left(t_k\right){,}\ldots{,}x_n\left(t_k\right)\}$.
- Quando S ficar implícito, $X(t{,}s)$ é representado como $X(t)$ e uma função-amostra por $x(t)$.

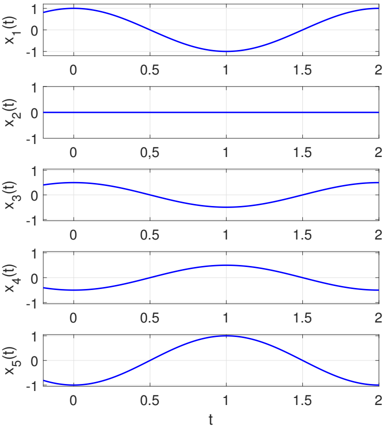


$$\boxed{X(t,s)}$$

- Para s_j fixo, $X(t,s_j) \triangleq x_j(t)$ é uma função do tempo determinista.
- Para t_k fixo, $X(t_k,s) \triangleq X(t_k)$ é uma VA que assume valores $\{x_1(t_k), x_2(t_k), \ldots, x_n(t_k)\}$.
- Quando S ficar implícito, $X(t,s)$ é representado como $X(t)$ e uma função-amostra por $x(t)$.
- Vejamos alguns exemplos. ☺

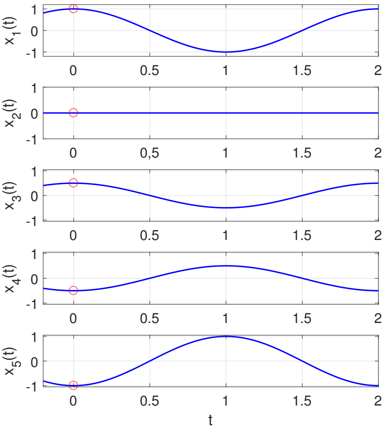
Processo Estocástico: Exemplo

- Processo definido por $X(t) = A\cos \pi t$, $t \in \mathbb{R}$ em que A é uma VA $A \sim U[-1,1]$.



Processo Estocástico: Exemplo

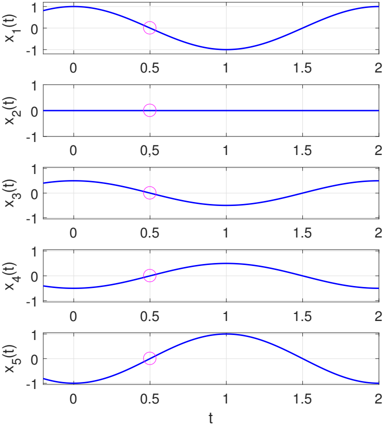
- Processo definido por $X(t) = A\cos \pi t$, $t \in \mathbb{R}$ em que A é uma VA $A \sim U[-1,1]$.



- $X(0) = A$; $X(0) \sim U[-1,1]$

Processo Estocástico: Exemplo

- Processo definido por $X(t) = A\cos\pi t$, $t \in \mathbb{R}$ em que A é uma VA $A \sim U[-1{,}1]$.

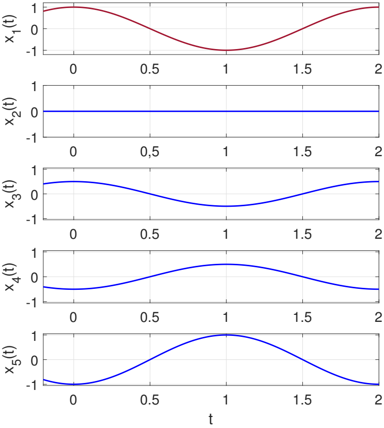


- $X(0) = A$; $X(0) \sim U[-1{,}1]$

- $X(0{,}5)$ é VA com $P[X(0{,}5) = 0] = 1$

Processo Estocástico: Exemplo

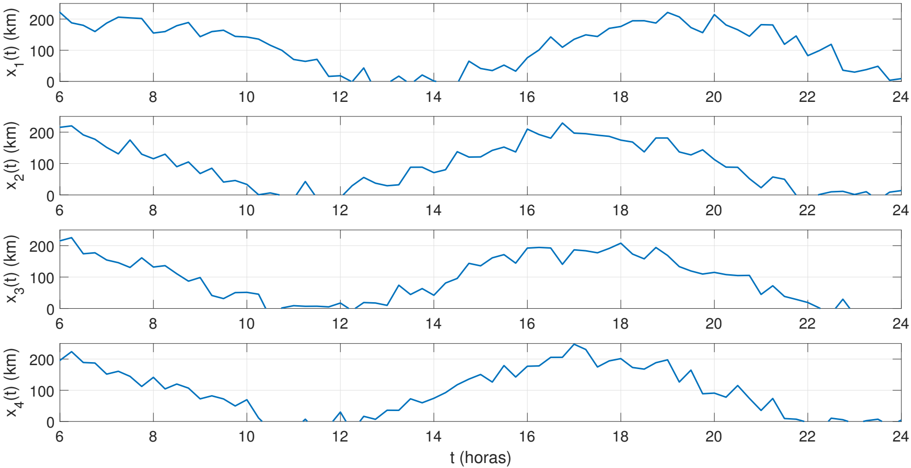
- Processo definido por $X(t) = A\cos\pi t$, $t \in \mathbb{R}$ em que A é uma VA $A \sim U[-1,1]$.



- $X(0) = A$; $X(0) \sim U[-1,1]$
- $X(0,5)$ é VA com $P[X(0,5) = 0] = 1$
- $x_1(t) = \cos\pi t$ é função determinista

Processo Estocástico: outro exemplo

Vias congestionadas em São Paulo num dia útil



Aula de hoje

Estacionariedade

- Propriedades estatísticas das VAs $X\left(t_k\right)$ dependem de t_k?

Estacionariedade

- Propriedades estatísticas das VAs $X\left(t_k\right)$ dependem de t_k?
- Sejam $X\left(t_1\right)$, $X\left(t_2\right)$, $\ldots$,$X\left(t_k\right)$ VAs obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, ..., t_k.

Estacionariedade

- Propriedades estatísticas das VAs $X\left(t_k\right)$ dependem de t_k?
- Sejam $X\left(t_1\right)$, $X\left(t_2\right)$, $\ldots$,$X\left(t_k\right)$ VAs obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, ..., t_k.
- A FDP conjunta é $F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}\left(\cdot\right)$.

Estacionariedade

- Propriedades estatísticas das VAs $X\left(t_k\right)$ dependem de t_k?
- Sejam $X\left(t_1\right)$, $X\left(t_2\right)$, $\ldots$,$X\left(t_k\right)$ VAs obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, ..., t_k.
- A FDP conjunta é $F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}\left(\cdot\right)$.
- Deslocam-se todos os tempos de observação de τ, obtendo novas variáveis $X(t_1+\tau)$, $X(t_2+\tau)$, $\ldots$, $X(t_k+\tau)$.

Estacionariedade

- Propriedades estatísticas das VAs $X\left(t_k\right)$ dependem de t_k?
- Sejam $X\left(t_1\right)$, $X\left(t_2\right)$, $\ldots$,$X\left(t_k\right)$ VAs obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, ..., t_k.
- A FDP conjunta é $F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}\left(\cdot\right)$.
- Deslocam-se todos os tempos de observação de τ, obtendo novas variáveis $X(t_1+\tau)$, $X(t_2+\tau)$, $\ldots$, $X(t_k+\tau)$.

Processo estacionário em sentido estrito

O processo estocástico $X(t)$ é dito *estacionário no sentido estrito* ou *estritamente estacionário* se

$$F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}\left(\cdot\right) = F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_k)}\left(\cdot\right) \tag{1}$$

quaisquer que sejam τ, k e os instantes de observação t_1, $\ldots$, t_k.

Casos especiais: $k = 1$

- **Para $k = 1$**, (1) torna-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) \triangleq F_X(x) \tag{2}$$

Casos especiais: $k = 1$

- **Para $k = 1$**, (1) torna-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) \triangleq F_X(x) \tag{2}$$

- Para processo estritamente estacionário, FDP de $X(t)$ não depende de t.

Casos especiais: $k = 1$

- **Para $k = 1$**, (1) torna-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) \triangleq F_X(x) \tag{2}$$

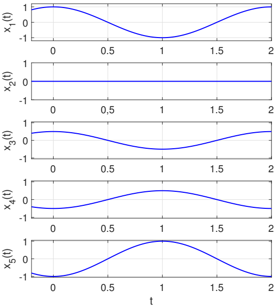
- Para processo estritamente estacionário, FDP de $X(t)$ não depende de t.
- Processo que satisfaz (2) é chamado de *estacionário de 1^a ordem*

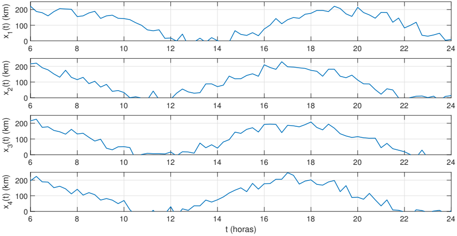
Casos especiais: $k = 1$

- **Para $k = 1$**, (1) torna-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) \triangleq F_X(x) \tag{2}$$

- Para processo estritamente estacionário, FDP de $X(t)$ não depende de t.
- Processo que satisfaz (2) é chamado de *estacionário de 1^a ordem*
- Casos dos exemplos são claramente não estacionários!





Casos especiais: $k = 2$

- **Para $k = 2$ e $\tau = -t_1$**,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \tag{3}$$

Casos especiais: $k = 2$

- **Para $k = 2$ e $\tau = -t_1$,**

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \quad (3)$$

- A FDP conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2.

Casos especiais: $k = 2$

- **Para $k = 2$ e $\tau = -t_1$**,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \tag{3}$$

- A FDP conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2.
- Processo que satisfaz (3) é chamado de *estacionário de 2^a ordem*.

Casos especiais: $k = 2$

- **Para $\boldsymbol{k = 2}$ e $\boldsymbol{\tau = -t_1}$**,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \tag{3}$$

- A FDP conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2.
- Processo que satisfaz (3) é chamado de *estacionário de 2ª ordem*.
- Estacionário de 2ª ordem $\Rightarrow$ Estacionário de 1ª ordem.

Casos especiais: $k = 2$

- **Para $\boldsymbol{k = 2}$ e $\boldsymbol{\tau = -t_1}$**,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \tag{3}$$

- A FDP conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2.
- Processo que satisfaz (3) é chamado de *estacionário de 2ª ordem*.
- Estacionário de 2ª ordem $\Rightarrow$ Estacionário de 1ª ordem.

Exemplos

1. Resolver Exercícios 6.1 e 6.2 da apostila.

Casos especiais: $k = 2$

- **Para $\boldsymbol{k = 2}$ e $\boldsymbol{\tau = -t_1}$**,

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) \qquad (3)$$

- A FDP conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$ depende apenas da diferença $t_2 - t_1$ e não de t_1 e t_2.
- Processo que satisfaz (3) é chamado de *estacionário de 2^a ordem*.
- Estacionário de 2^a ordem $\Rightarrow$ Estacionário de 1^a ordem.

Exemplos

1. Resolver Exercícios 6.1 e 6.2 da apostila.
2. Dê um exemplo de um processo estacionário.

Aula de hoje

Caracterização temporal: média

- Assim como definimos números que resumem propriedades de VAs (momentos), vamos definir funções que resumem características de $X(t)$.

Caracterização temporal: média

- Assim como definimos números que resumem propriedades de VAs (momentos), vamos definir funções que resumem características de $X(t)$.

Média ou valor esperado de $X(t)$

Valor esperado da variável aleatória obtida observando o processo num instante t:

$$\boxed{\mu_X(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx,}$$

em que $f_{X(t)}(x)$ é a fdp de $X(t)$.

Caracterização temporal: média

- Assim como definimos números que resumem propriedades de VAs (momentos), vamos definir funções que resumem características de $X(t)$.

Média ou valor esperado de $X(t)$

Valor esperado da variável aleatória obtida observando o processo num instante t:

$$\boxed{\mu_X(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx,}$$

em que $f_{X(t)}(x)$ é a fdp de $X(t)$.

- Se $X(t)$ for pelo menos estacionário de 1^{a} ordem, $f_{X(t)}(x) = f_X(x)$ e $\mu_X(t) \triangleq \mu_X =$ cte., para todo t.

Caracterização temporal: autocorrelação

Função de autocorrelação

Valor esperado do produto das VAs $X(t_1)$ e $X(t_2)$:

$$\boxed{R_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)\,X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2.}$$

em que $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)$ é a fdp conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$.

Caracterização temporal: autocorrelação

Função de autocorrelação

Valor esperado do produto das VAs $X(t_1)$ e $X(t_2)$:

$$\boxed{R_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)\,X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2.}$$

em que $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)$ é a fdp conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$.

- Fazendo $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$, tem-se a forma conveniente

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)\,X(t+\tau)\right].$$

Caracterização temporal: autocorrelação

Função de autocorrelação

Valor esperado do produto das VAs $X(t_1)$ e $X(t_2)$:

$$\boxed{R_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)\,X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2.}$$

em que $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)$ é a fdp conjunta de $X(t_1)$ e $X(t_2)$.

- Fazendo $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$, tem-se a forma conveniente

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)\,X(t+\tau)\right].$$

- Se $X(t)$ for pelo menos estacionário de 2^{a} ordem, $f_{X(t)X(t+\tau)}(\cdot)$ depende apenas de τ e, portanto, R_{XX} é função apenas de τ:

$$\boxed{R_{XX}(\tau) = \mathbb{E}\left[X(t)X(t+\tau)\right]}$$

Estacionariedade em sentido amplo e exemplo

Estacionariedade em sentido amplo

Se $X(t)$ é tal que $\mu_X(t)$ é constante e $R_{XX}(t,t+\tau)$ depende apenas de τ, processo é dito *estacionário em sentido amplo* (ESA).

Estacionariedade em sentido amplo e exemplo

Estacionariedade em sentido amplo

Se $X(t)$ é tal que $\mu_X(t)$ é constante e $R_{XX}(t,t+\tau)$ depende apenas de τ, processo é dito *estacionário em sentido amplo* (ESA).

- ESA é definição de estacionariedade mais usada na prática.

Estacionariedade em sentido amplo e exemplo

Estacionariedade em sentido amplo

Se $X(t)$ é tal que $\mu_X(t)$ é constante e $R_{XX}(t,t+\tau)$ depende apenas de τ, processo é dito *estacionário em sentido amplo* (ESA).

- ESA é definição de estacionariedade mais usada na prática.
- Note que Estacionariedade de 2^{a} ordem $\Rightarrow$ ESA, mas não o contrário.

Estacionariedade em sentido amplo e exemplo

Estacionariedade em sentido amplo

Se $X(t)$ é tal que $\mu_X(t)$ é constante e $R_{XX}(t,t+\tau)$ depende apenas de τ, processo é dito *estacionário em sentido amplo* (ESA).

- ESA é definição de estacionariedade mais usada na prática.
- Note que Estacionariedade de 2^{a} ordem $\Rightarrow$ ESA, mas não o contrário.

Exemplo 1: Processo estacionário em sentido amplo?

Seja o processo estocástico

$$X(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right),$$

com A e ω_0 constantes e $\Theta \sim U(0,2\pi)$. Mostre que esse processo é ESA.

Estacionariedade em sentido amplo e exemplo

Estacionariedade em sentido amplo

Se $X(t)$ é tal que $\mu_X(t)$ é constante e $R_{XX}(t,t+\tau)$ depende apenas de τ, processo é dito *estacionário em sentido amplo* (ESA).

- ESA é definição de estacionariedade mais usada na prática.
- Note que Estacionariedade de $2^{\underline{a}}$ ordem $\Rightarrow$ ESA, mas não o contrário.

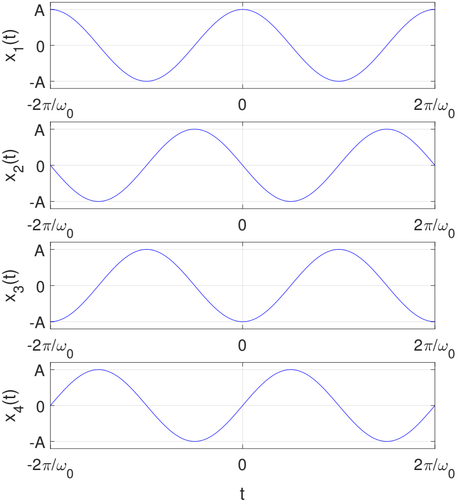
Exemplo 1: Processo estacionário em sentido amplo?

Seja o processo estocástico

$$X(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right),$$

com A e ω_0 constantes e $\Theta \sim U(0,2\pi)$. Mostre que esse processo é ESA. *Dica:* $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.

Algumas funções-amostras do Exemplo 1



Algumas propriedades de $R_{XX}(\tau)$

Para processos ESA,

A) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right] \triangleq$ Potência de $X(t)$

Algumas propriedades de $R_{XX}(\tau)$

Para processos ESA,

A) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right] \triangleq$ Potência de $X(t)$

B) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)

Algumas propriedades de $R_{XX}(\tau)$

Para processos ESA,

A) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right] \triangleq$ Potência de $X(t)$

B) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)

C) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Algumas propriedades de $R_{XX}(\tau)$

Para processos ESA,

A) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right] \triangleq$ Potência de $X(t)$

B) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)

C) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Exemplo 2: Propriedades da correlação

Demonstre a Propriedade C).

Algumas propriedades de $R_{XX}(\tau)$

Para processos ESA,

A) $R_{XX}(0) = E\left[X^2(t)\right] \triangleq$ Potência de $X(t)$

B) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)

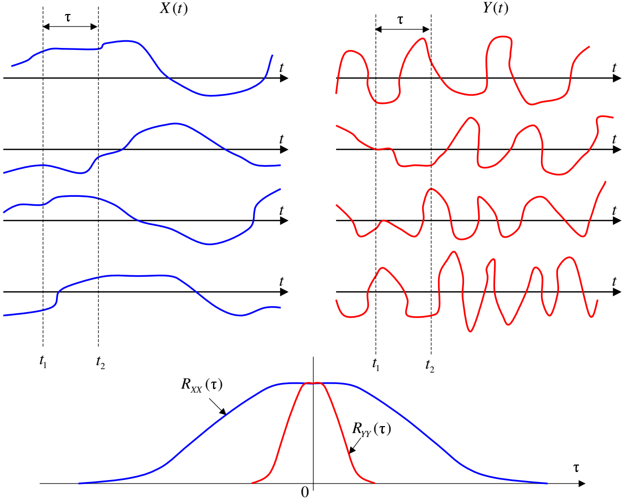
C) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Exemplo 2: Propriedades da correlação

Demonstre a Propriedade C).

D) Se $X(t)$ tem componente periódica, $R_{XX}(\tau)$ tem uma componente periódica com mesmo período.

Exemplo de correlação de processos estacionários



Função de autocovariância C_{XX}

Função de autocovariância

$$
\begin{aligned}
C_{XX}(t,t+\tau) &\triangleq \mathbb{E}\left[\left(X(t)-\mu_X(t)\right)\left(X(t+\tau)-\mu_X(t+\tau)\right)\right] \\
&=
\end{aligned}
$$

Função de autocovariância C_{XX}

Função de autocovariância

$$C_{XX}(t,t+\tau) \triangleq \mathbb{E}\left[(X(t)-\mu_X(t))\,(X(t+\tau)-\mu_X(t+\tau))\right]$$
$$= R_{XX}(t,t+\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$$

Função de autocovariância C_{XX}

Função de autocovariância

$$\begin{aligned} C_{XX}(t,t+\tau) &\triangleq \mathbb{E}\left[(X(t)-\mu_X(t))\,(X(t+\tau)-\mu_X(t+\tau))\right] \\ &= R_{XX}(t,t+\tau)-\mu_X(t)\mu_X(t+\tau) \end{aligned}$$

- Variância de $X(t)$:

$$\sigma_X^2(t) \triangleq C_{XX}(t,t) = \mathbb{E}\left[X(t)^2\right] - \mu_X(t)^2$$

Função de autocovariância C_{XX}

Função de autocovariância

$$C_{XX}(t,t+\tau) \triangleq \mathbb{E}\left[(X(t)-\mu_X(t))\,(X(t+\tau)-\mu_X(t+\tau))\right]$$
$$= R_{XX}(t,t+\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$$

- Variância de $X(t)$:

$$\sigma_X^2(t) \triangleq C_{XX}(t,t) = \mathbb{E}\left[X(t)^2\right] - \mu_X(t)^2$$

- Para processos ESA,

$$\boxed{C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2}$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = R_{XX}(0) - \mu_X^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

Aula de hoje

1. Conceito de Processo Estocástico
2. Estacionariedade
3. Caracterização Temporal para Processos
4. Ergodicidade
5. Conclusões e Próximas Aulas

Médias amostrais e temporais

- Valor esperado $\mathbb{E}[\cdot]$ para $X(t)$ é média sobre conjunto de realizações.

Médias amostrais e temporais

- Valor esperado $\mathbb{E}[\cdot]$ para $X(t)$ é média sobre conjunto de realizações.
- Por exemplo, para calcular $R_{XX}(\tau)$ é necessário conhecer FDP ou todas as funções-amostra.

Médias amostrais e temporais

- Valor esperado $\mathbb{E}[\cdot]$ para $X(t)$ é média sobre conjunto de realizações.
- Por exemplo, para calcular $R_{XX}(\tau)$ é necessário conhecer FDP ou todas as funções-amostra.
- Porém, muitas vezes só se tem acesso a uma única função-amostra e, mesmo assim, quer se obter a $R_{XX}(\tau)$ do processo.

Médias amostrais e temporais

- Valor esperado $\mathbb{E}[\cdot]$ para $X(t)$ é média sobre conjunto de realizações.
- Por exemplo, para calcular $R_{XX}(\tau)$ é necessário conhecer FDP ou todas as funções-amostra.
- Porém, muitas vezes só se tem acesso a uma única função-amostra e, mesmo assim, quer se obter a $R_{XX}(\tau)$ do processo.
- Se o processo for estacionário, pode-se definir médias temporais.

Médias amostrais e temporais

- Valor esperado $\mathbb{E}[\cdot]$ para $X(t)$ é média sobre conjunto de realizações.
- Por exemplo, para calcular $R_{XX}(\tau)$ é necessário conhecer FDP ou todas as funções-amostra.
- Porém, muitas vezes só se tem acesso a uma única função-amostra e, mesmo assim, quer se obter a $R_{XX}(\tau)$ do processo.
- Se o processo for estacionário, pode-se definir médias temporais.
- Será que elas são iguais às médias amostrais?

Médias temporais - Funções-amostra de tempo contínuo

$$\widetilde{X} \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Médias amostrais como estimadores

Médias temporais - Funções-amostra de tempo contínuo

$$\widetilde{X} \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

- $\widetilde{X}$ e $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$ são VAs - resultados variam, em princípio, de função-amostra para função-amostra

Médias amostrais como estimadores

Médias temporais - Funções-amostra de tempo contínuo

$$\widetilde{X} \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

- $\widetilde{X}$ e $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$ são VAs - resultados variam, em princípio, de função-amostra para função-amostra
- $\mathbb{E}[\widetilde{X}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)]dt = \mu_X$

Médias amostrais como estimadores

Médias temporais - Funções-amostra de tempo contínuo

$$\widetilde{X} \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

- $\widetilde{X}$ e $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$ são VAs - resultados variam, em princípio, de função-amostra para função-amostra
- $\mathbb{E}[\widetilde{X}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)]dt = \mu_X$
- $\mathbb{E}\left[\mathcal{R}_{XX}(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)]dt = R_{XX}(\tau)$

Médias amostrais como estimadores

Médias temporais - Funções-amostra de tempo contínuo

$$\widetilde{X} \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) \triangleq \mathbb{A}\left[x(t)x(t+\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

- $\widetilde{X}$ e $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$ são VAs - resultados variam, em princípio, de função-amostra para função-amostra
- $\mathbb{E}[\widetilde{X}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)]dt = \mu_X$
- $\mathbb{E}\left[\mathcal{R}_{XX}(\tau)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)X(t+\tau)]dt = R_{XX}(\tau)$
- $\widetilde{X}$ e $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$ são estimadores não enviesados para μ_X e $R_{XX}(\tau)$, respectivamente.

Ergodicidade

- Se var$[\widetilde{X}] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a μ_X, o processo é dito *ergódico em média*.

Ergodicidade

- Se var$[\widetilde{X}] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a μ_X, o processo é dito *ergódico em média*.
- Se var $[\mathcal{R}_{XX}(\tau)] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a $R_{XX}(\tau)$, o processo é dito *ergódico em correlação*.

Ergodicidade

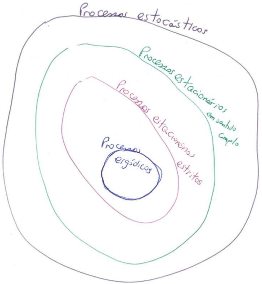
- Se var$[\widetilde{X}] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a μ_X, o processo é dito *ergódico em média*.
- Se var $[\mathcal{R}_{XX}(\tau)] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a $R_{XX}(\tau)$, o processo é dito *ergódico em correlação*.
- Se todas as médias temporais se igualam às médias amostrais, o processo é dito *ergódico*.

Ergodicidade

- Se var$[\widetilde{X}] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a μ_X, o processo é dito *ergódico em média*.
- Se var $[\mathcal{R}_{XX}(\tau)] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a $R_{XX}(\tau)$, o processo é dito *ergódico em correlação*.
- Se todas as médias temporais se igualam às médias amostrais, o processo é dito *ergódico*.
- Ergodicidade é uma forma restritiva de estacionariedade!

Ergodicidade

- Se var$[\widetilde{X}] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a μ_X, o processo é dito *ergódico em média*.
- Se var $[\mathcal{R}_{XX}(\tau)] = 0$, de modo que para qualquer $x(t)$ o resultado é o mesmo e igual a $R_{XX}(\tau)$, o processo é dito *ergódico em correlação*.
- Se todas as médias temporais se igualam às médias amostrais, o processo é dito *ergódico*.
- Ergodicidade é uma forma restritiva de estacionariedade!



Exemplo

Exemplo

Dado o processo estocástico $X(t) = K$ em que $K \sim U(-1,1)$.
Pede-se:

a) Esboce funções-amostras deste processo.

Exemplo

Exemplo

Dado o processo estocástico $X(t) = K$ em que $K \sim U(-1,1)$.
Pede-se:

a) Esboce funções-amostras deste processo.

b) Determine $\mu_X(t)$

Exemplo

Exemplo

Dado o processo estocástico $X(t) = K$ em que $K \sim U(-1,1)$.
Pede-se:

a) Esboce funções-amostras deste processo.

b) Determine $\mu_X(t)$

c) Determine $R_{XX}(t,t+\tau)$

Exemplo

Exemplo

Dado o processo estocástico $X(t) = K$ em que $K \sim U(-1,1)$.
Pede-se:

a) Esboce funções-amostras deste processo.

b) Determine $\mu_X(t)$

c) Determine $R_{XX}(t,t+\tau)$

d) Este processo é ESA?

Exemplo

Dado o processo estocástico $X(t) = K$ em que $K \sim U(-1,1)$.
Pede-se:

a) Esboce funções-amostras deste processo.

b) Determine $\mu_X(t)$

c) Determine $R_{XX}(t,t+\tau)$

d) Este processo é ESA?

e) Este processo é ergódico?

Ergodicidade e correlação

A correlação de processos ergódicos apresenta mais uma propriedade interessante:

E) Se $X(t)$ é ergódico sem componentes periódicas então

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = \mu_X^2$$

Ou seja, $X(t)$ e $X(t+\tau)$ tendem a ser variáveis não correlacionadas.

Exemplo 3: Propriedades da correlação e ergodicidade

Um processo ergódico $X(t)$ sem componentes periódicas tem função de autocorrelação

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}.$$

Determine sua variância σ_X^2.

Aula de hoje

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico
- Conceitos de estacionariedade em suas diversas formas

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico
- Conceitos de estacionariedade em suas diversas formas
- Média e autocorrelação de processo estocástico

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico
- Conceitos de estacionariedade em suas diversas formas
- Média e autocorrelação de processo estocástico
- Ergodicidade e suas consequências

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico
- Conceitos de estacionariedade em suas diversas formas
- Média e autocorrelação de processo estocástico
- Ergodicidade e suas consequências

Próximas aulas:

- Caracterização espectral de processos

Conclusões

O que aprendemos nessa aula?

- Definição de processo estocástico
- Conceitos de estacionariedade em suas diversas formas
- Média e autocorrelação de processo estocástico
- Ergodicidade e suas consequências

Próximas aulas:

- Caracterização espectral de processos
- Processos estocásticos e sistemas LIT