Introdução ao curso - Teoria das Probabilidades

Prof. Marcio Eisencraft

[Peebles, 2000, Seções 1.0 a 1.4]; Apostila Seções 1.1 a 1.4

20 de fevereiro de 2019

Aula de hoje

1. Introdução: por que estudar aleatoriedade?
2. Os diferentes tipos de probabilidade
3. Conceitos elementares: conjuntos, álgebras e eventos
4. Definição axiomática de probabilidade e suas consequências
5. Probabilidade conjunta, condicional e total

O que é aleatório? O que não é aleatório? Para que serve essa disciplina?

"Randomness is what we call our inability to predict things which, in turn, reflects our lack of knowledge about the system of interest." (Sivia and Skilling [2006])

"It is remarkable that a Science, which commenced with a consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subjects of human knowledge." (Pierre Simon Laplace 1749-1827).

Ver vídeos "What is random??" e "What is not random??" no STOA.

Sinais aleatórios

- Muitos sinais na Engenharia são caracterizados apenas de forma probabilística. Não há fórmulas fechadas para eles.
  - O ruído de fundo ouvido quando escutamos uma rádio.
  - Interferência em uma imagem.
  - Num sistema sonar, sons do mar gerados de forma aleatória geram ruídos que interferem com os ecos desejados.
  - Bits em uma comunicação entre computadores.
  - Saída de tensão de um gerador eólico.
  - Incidência luminosa em um gerador solar.
- Como aplicar conceitos de Sistemas e Sinais, PDS, Controle, etc. a esses sinais? Como representá-los temporal e espectralmente?
- Resposta: Processos Estocásticos ou Aleatórios, o assunto desse curso.
- Caminho: **Probabilidades** $\Rightarrow$ 1 VA$\Rightarrow$ 2VAs $\Rightarrow \infty$ VAs associadas com instantes de tempo (Processo Estocástico)

Aula de hoje

1. Introdução: por que estudar aleatoriedade?
2. Os diferentes tipos de probabilidade
3. Conceitos elementares: conjuntos, álgebras e eventos
4. Definição axiomática de probabilidade e suas consequências
5. Probabilidade conjunta, condicional e total

1. Probabilidade intuitiva Baseada em intuição, comportamento contraditório e pouco útil.
2. Probabilidade como razão entre eventos favoráveis pelo total (Teoria Clássica) Não experimental. Típica aplicação: Encontrar a probabilidade de ao menos 1 cara ao jogar 2 moedas. Problemas: não consegue lidar com resultados não equiprováveis. Não consegue lidar com resultados não enumeráveis.
3. Probabilidade como medida da frequência de ocorrência Experimental. Realizar experimento n vezes e verificar o número de vezes que E ocorre (n_e). Daí, $P[E] = \lim_{n\to\infty} \frac{n_e}{n}$. Problemas: Necessário estimar $P[E]$ a partir de um número finito de tentativas. Como veremos, limite em geral não existe.
4. Probabilidade baseada na Teoria Axiomática Baseada em teoria matemática rigorosa. Kolmogorov (1903-1987). Essa é que vamos utilizar.

Aula de hoje

1. Introdução: por que estudar aleatoriedade?
2. Os diferentes tipos de probabilidade
3. Conceitos elementares: conjuntos, álgebras e eventos
4. Definição axiomática de probabilidade e suas consequências
5. Probabilidade conjunta, condicional e total

Experimento e Espaço das amostras

Experimento $\mathcal{H}$

Qualquer ação ou processo cujo resultado está sujeito à incerteza. Exemplos: jogar um dado, determinar tipo sanguíneo de uma pessoa, determinar tempo de viagem casa - Poli.

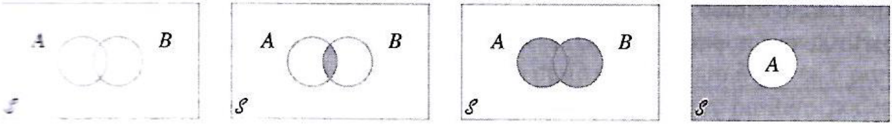
Espaço das amostras ou Espaço de eventos ou Espaço amostral - Ω

Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento.

Exemplos de espaços das amostras

- Jogar um dado - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Tipo sanguíneo - $\Omega = \{A,B,AB,O\}$
- Tempo de viagem -$\Omega = \mathbb{R}_+$ ou $\Omega = \left\{t \in \mathbb{R}/t \geq \frac{\text{distância}}{c}\right\}$

Álgebra de conjuntos



(a) Diagrama de Venn dos eventos A e B

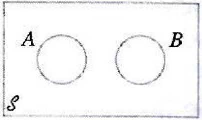
(b) Área sombreada é $A \cap B$

(c) Área sombreada é $A \cup B$

(d) Área sombreada é A'

Conjuntos mutuamente exclusivos ou disjuntos

Conjuntos que não possuem nenhum elemento comum: $A \cap B = \emptyset$.



(e) Eventos mutuamente exclusivos

Notação:

- Reunião: $A \cup B$ ou $A + B$
- Complementar: A' ou A^c
- Interseção: $A \cap B$ ou AB

Álgebras e σ-álgebras

Álgebra

Considere um conjunto Ω e uma coleção de subconjuntos de Ω. Sejam E, F subconjuntos dessa coleção. Essa coleção de subconjuntos forma uma álgebra $\mathcal{M}$ se

1) $\emptyset \in \mathcal{M}$ e $\Omega \in \mathcal{M}$
2) Se $E \in \mathcal{M}$ e $F \in \mathcal{M}$, então $E \cup F \in \mathcal{M}$ e $EF \in \mathcal{M}$ (consequentemente uniões e intersecções finitas)
3) Se $E \in \mathcal{M}$ então $E^c \in \mathcal{M}$

σ-álgebra ou σ-campo $\mathcal{F}$

É uma álgebra que é fechada sob qualquer conjunto enumerável de uniões e intersecções. Isto é, se E_1, ..., E_n, ..., $\in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ também pertencem a $\mathcal{F}$.

Eventos

Seja um experimento $\mathcal{H}$ com espaço de amostras Ω

- Se Ω é enumerável, então a classe de todos os subconjuntos forma uma σ-álgebra.
- Se Ω é não enumerável, considere-se uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ formada por subconjuntos para os quais pode-se atribuir probabilidades condizentes com os axiomas que serão formulados na sequência.
- Em ambos os casos, cada um dos elementos dessa σ-álgebra é chamada de evento.
- Temos então 2 dos 3 objetos para a Teoria Axiomática de Probabilidades:
  - Um espaço das amostras Ω
  - Uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de eventos definidos em Ω
- Precisamos agora de uma medida de probabilidade P.
- Esses três objetos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ foram uma tripla chamada de espaço de probabilidades $\mathcal{P}$

Exercício

[Dantas, 2013, Exemplo 1.3.1, p. 21]

Uma urna contém bolas numeradas de um a quinze. Uma bola é retirada da urna e seu número anotado. Sejam A e B os seguintes eventos:

- A - número da bola retirada é par
- B - número da bola retirada é múltiplo de 3

Determine os eventos

a) $A \cup B$

b) AB

c) A^C

Aula de hoje

1. Introdução: por que estudar aleatoriedade?
2. Os diferentes tipos de probabilidade
3. Conceitos elementares: conjuntos, álgebras e eventos
4. Definição axiomática de probabilidade e suas consequências
5. Probabilidade conjunta, condicional e total

Probabilidade - Definição e axiomas

Probabilidade

Dado um espaço de amostras Ω e uma σ-álgebra de eventos $\mathcal{F}$, probabilidade é uma função $P[\cdot]\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que atribui a cada evento $E \in \mathcal{F}$ um número real $P[E]$ que satisfaz os seguintes axiomas.

Axioma 1 Para qualquer evento E, $P[E] \geq 0$

Axioma 2 $P[\Omega] = 1$

Axioma 3 $P[E \cup F] = P[E] + P[F]$ se $EF = \emptyset$

Tripla $(\Omega,\mathcal{F},P)$ forma um *espaço de probabilidades $\mathcal{P}$.*

Exemplo

Considere um dado de 6 faces e o experimento jogar o dado e observar o seu resultado. Podemos atribuir $P\left[\{1\}\right] = \pi$?

Consequências da definição

Propriedades das probabilidades - Demonstrar!

Propriedade 1 $P[\emptyset] = 0$

Propriedade 2 $P\left[EF^c\right] = P[E] - P[EF]$

Propriedade 3 $P[E] = 1 - P\left[E^c\right]$

Propriedade 4 $P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[EF]$

Propriedade 5 $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P\left[E_i\right]$ se $E_i E_j = \emptyset$, $i \neq j$

Nota: Um 4^o axioma

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P\left[E_i\right] \text{ se } E_i E_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

precisa ser incluído para lidar rigorosamente com limites e uniões contáveis infinitas

Aula de hoje

1. Introdução: por que estudar aleatoriedade?
2. Os diferentes tipos de probabilidade
3. Conceitos elementares: conjuntos, álgebras e eventos
4. Definição axiomática de probabilidade e suas consequências
5. **Probabilidade conjunta, condicional e total**

Probabilidade Condicional

- $P[AB]$ - Probabilidade conjunta dos eventos A e B

Probabilidade Condicional

Para quaisquer dois eventos A e B com $P[A] \neq 0$, a probabilidade condicional $P[B|A]$ é definida por

$$\boxed{P[B|A] \triangleq \frac{P[AB]}{P[A]}}$$

- $P[B|A]$ - probabilidade de B dado que ocorreu A; condicionada a A; restrita a A

Exemplo

Exercício [Peebles, 2000]

Em uma caixa existem 100 resistores tendo a resistência e a tolerância mostradas na tabela a seguir.

	Tolerância		
Resistência (Ω)	**5%**	**10%**	**Total**
22	10	14	**24**
47	28	16	**44**
100	24	8	**32**
Total	**62**	**38**	**100**

Sejam os eventos: A "selecionar um resistor de 47Ω", B "selecionar um resistor com tolerância de 5%" e C "selecionar um resistor de $100\Omega''$. A partir da tabela, determine as seguintes probabilidades:
(a) $P[A]$ (b) $P[B]$ (c) $P[C]$ (d) $P[A \cap B]$ (e) $P[A \cap C]$
(f) $P[B \cap C]$ (g) $P[A|B]$ (h) $P[A|C]$ (i) $P[B|C]$

$P[E|A]$ é uma probabilidade?

Mostre que probabilidades condicionais satisfazem os 3 axiomas e portanto são uma função de probabilidade válida.

Resultados envolvendo probabilidade condicional

A regra da multiplicação

$$\boxed{P[AB] = P[A]P[B|A]}$$

Note que $P[AB] = P[A]P[B]$ se e somente se $P[B|A] = P[B]$.
Quando isso ocorre??

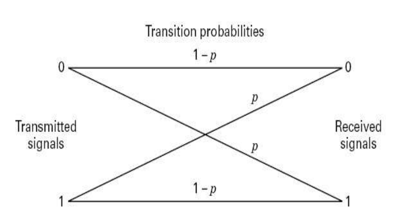
Teorema da Probabilidade Total

Seja A_i, $i = 1, \ldots, n$ uma partição n de Ω e B definido sobre o mesmo espaço de probabilidades da partição. Se $P\left[A_i\right] \neq 0$ para todo i, então

$$\boxed{P[B] = \sum_{i=1}^{n} P\left[B|A_i\right] P\left[A_i\right]}$$

Exemplos

Canal binário simétrico



A probabilidade de um "0" ser recebido como "1" ou vice-versa é igual a p. Suponha que as probabilidades de se transmitir um $X = 0$ ou um $X = 1$ sejam, respectivamente, Q e $1 - Q$.

a) Qual a probabilidade de se receber 0?

b) Qual a probabilidade de se receber 1?

Exemplos

Doação de sangue

Quatro pessoas se prontificaram a doar sangue a um enfermo. É necessário sangue do tipo O$+$ e sabe-se que apenas 1 dos 4 voluntários tem esse tipo de sangue[a]. Qual a probabilidade de que pelo menos 3 indivíduos precisem ser testados para obtenção do tipo desejado?

[a] Na população brasileira, a porcentagem de indivíduos O$+$ é cerca de 40%.

Emails e *spam*

Pedro possui 3 contas de correio eletrônico. 70% de suas mensagens chegam à sua conta no Gmail, 20% à sua conta da USP e 10% à sua conta da empresa em que faz estágio. Das mensagem do Gmail, 10% é *spam*, e nas outras duas contas 5% e 2% são *spam*. Qual a probabilidade de uma mensagem selecionada aleatoriamente ser *spam*?

Referências

Dantas, C. A. B. (2013). *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. EDUSP, 3a. edition.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Sivia, D. and Skilling, J. (2006). *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford University Press.

Stark, H. and Woods, J. W. (2001). *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing (3rd Edition)*. Prentice Hall.