Gabarito!!

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Prova P2 de PTC3405 - Processos Estocásticos
1o sem. 2019

Nome:________________________________ NUSP: ________

Assinatura: __________________

Instruções:

1. A prova terá duração de 1h40min.
2. Use a folha de cada questão (frente e verso) para resolvê-la.
3. A prova pode ser feita a lápis.
4. É proibida consulta a qualquer material estranho à prova.
5. A interpretação dos enunciados é parte integrante da avaliação.

1) (2,0 pontos) [Hsu, 1996, p. 178] Considere o processo aleatório $X(t)$ definido por

$$X(t) = Y\cos(\omega t), t \geq 0,$$

em que ω é uma constante e Y é uma VA uniforme no intervalo (0,1).

a) Encontre $E[X(t)]$.

b) Encontre a função de autocorrelação $R_{XX}(t,t+\tau)$ de $X(t)$.

c) Encontre a função de autocovariância $C_{XX}(t,t+\tau)$ de $X(t)$.

(a) $E[X(t)] = E[Y\cos(\omega t)] =$

$= \frac{1}{2}\cos\omega t, t \geq 0$

0,7

(b) $R_{XX}(t,t+\tau) = E[X(t)\,X(t+\tau)]$

$E[Y^2\cos\omega t\cos(\omega t+\omega\tau)]$

$= E[Y^2]\cos\omega t\cos(\omega t+\omega\tau)$

Mas $E[Y^2] = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$

0,4

Assim,

$\boxed{R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{1}{3}\cos\omega t\cos(\omega t+\omega\tau)}$

0,4

(c) $C_{xx}(t, t+\tau) = R_{xx}(t, t+\tau) - \mu_x(t)\,\mu_x(t+\tau)$

$$= \frac{1}{3}\cos\omega t \cos(\omega t+\omega\tau) - \frac{1}{2}\cos\omega t \cdot \frac{1}{2}\cos(\omega t+\omega\tau$$

$$= \frac{1}{12}\cos\omega t \cos(\omega t+\omega\tau)$$

0,5

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

2) (2,0 pontos) [Peebles, 2000, p. 262] Para um processo aleatório $X(t)$, assuma que sua função de autocorrelação seja

$$R_{XX}(t,t+\tau) = 12e^{-4|\tau|}\cos^2(24t)$$

a) $X(t)$ é ESA? Justifique sua resposta.

b) Encontre a média temporal de $R_{XX}(t,t+\tau)$, $\widetilde{R_{XX}(t,t+\tau)}$.

c) Encontre a DEP de $X(t)$.

(a) Não! Pois $R_{xx}(t,t+\tau)$ depende de t. 0,7 com justificativa correta

(b) $\widetilde{R_{xx}(t,t+\tau)} =$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 12e^{-4|\tau|}\cos^2(24t)\,dt$$

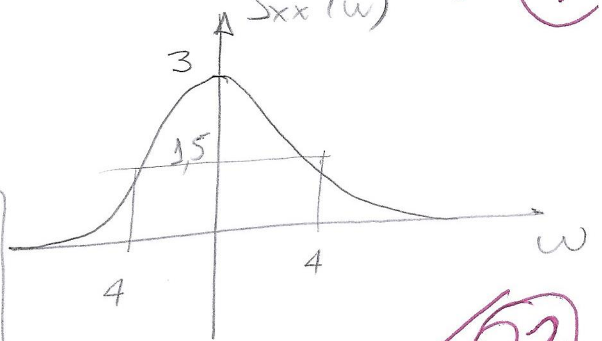
$$= 12e^{-4|\tau|} \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^2(24t)\,dt}_{\text{Potência média de } \cos(24t) = 1/2}$$

$$= 6e^{-4|\tau|}$$ 0,6

(c) $S_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{\widetilde{R_{xx}(t,t+\tau)}\}$

$$= 6 \cdot \frac{2\cdot 4}{4^2+\omega^2}$$

$$\rightarrow \boxed{S_{xx}(\omega) = \frac{48}{\omega^2+16}}$$ 0,4



0,3

Pelo menos 1 valor de máximo

3) (2,0 pontos) [Stark and Woods, 2001, p. 480] O processo aleatório $X(t)$ com valor médio 128 e função de autocovariância

$$C_{XX}(\tau) = 1000 \exp(-10|\tau|)$$

é filtrado por um filtro passa baixas

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \qquad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

para gerar o processo de saída $Y(t)$.

a) Encontre a função média $\mu_Y(t)$.

b) Encontre uma expressão para a DEP $S_{YY}(\omega)$.

$\mu_X = 128$

a) $\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau =$

$= \mu_X H(0) = 128 \cdot 1 = 128$

$\boxed{\mu_Y = 128}$

1,0

b) $R_{XX}(\tau) = C_{XX}(\tau) + \mu_X^2$

$R_{XX}(\tau) = 1000\, e^{-10|\tau|} + 128^2$

0,2

$S_{XX}(\omega) = \frac{1000 \cdot 2 \cdot 10}{100 + \omega^2} + 128^2 2\pi\, \delta(\omega)$

$= \frac{2 \cdot 10^4}{\omega^2 + 100} + 128^2 \delta(\omega) \cdot 2\pi$

0,3

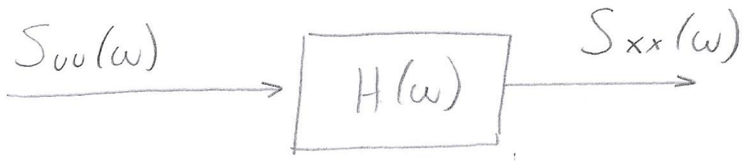
$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

$= \left(\frac{2 \cdot 10^4}{100 + \omega^2} + 128^2 \cdot 2\pi\, \delta(\omega)\right) \cdot \frac{1}{1 + \omega^2}$

$= \frac{2 \cdot 10^4}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 100)} + 128^2 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$

0,5

4) (2,0 pontos) [Peebles, 2000, p. 240] Ruído branco de tempo contínuo com densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$ é aplicado a uma rede passa-baixas para a qual $|H(0)| = 2$. Essa rede tem largura de banda de ruído de 2 MHz. Se a potência média de saída é 0,1 W sobre um resistor de 1 Ω, qual o valor de N_0?



$$S_{vv}(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

$$|H(0)| = 2$$

$$W_N = 2\ MHz = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6\ rad/s$$

$$P_{xx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\, d\omega =$$

0,5

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{vv}(\omega)\, |H(\omega)|^2\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{N_0}{\cancel{2}}\, \cancel{2} W_N \cdot |H(0)|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{2\pi \cdot P_{xx}}{W_N\, |H(0)|^2} = \frac{\cancel{2\pi} \cdot 0{,}1}{\cancel{2\pi} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{8} \cdot 10^{-7} \Rightarrow$$

(P_{xx}: V^2)

1,5

$$\Rightarrow \boxed{N_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-8}\ V^2/rad}$$

5) Um processo aleatório de tempo discreto com DEP

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{2}exp(-j\omega)\right|^2}$$

deve ser filtrado com um sistema LIT para gerar um processo ruído branco $U[n]$ com variância $\sigma_U^2 = 4$ na saída. Qual deve ser a equação de diferenças que descreve o sistema LIT?

$$X[n] \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow U[n]$$

$$S_{UU}(\omega) = \sigma_U^2$$

0,5

$$S_{UU}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \Rightarrow \boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{S_{UU}(\omega)}{S_{XX}(\omega)}}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 = \sigma_U^2 \cdot \left|1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Possível } \boxed{H(\omega) = 2 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = 2 - e^{-j\omega}}$$

1,0

$$\text{Possível } H(z) = 2 - z^{-1} = \frac{U(z)}{X(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u[n] = 2x[n] - x[n-1]}$$

0,5

Formulário

$$C_{XX}(t,t+\tau) = R_{XX}(t,t+\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

$$W_N = \frac{\int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(0)|^2}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)d\omega$$

Se $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ então $E[X^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$.

Referências

Hsu, H. (1996). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes.* Schaum's Outlines. McGraw-Hill.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

Stark, H. and Woods, J. W. (2001). *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing (3rd Edition).* Prentice Hall.

$\frac{48}{32} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4}$